Comportamiento de economías de intercambio en el largo plazo

Enrique Covarrubias[1],[2]
Banco de México
Ciudad de México, México
enriquecovarr@gmail.com

Resumen

Presentamos resultados obtenidos al comparar el comportamiento de una economía infinita de intercambio puro después de un choque exógeno o de una variación continua de sus parámetros. Permitimos que la economía no sea lineal y contenga heterogeneidad de sectores y agentes. Estamos particularmente interesados en comparativas estáticas de los precios de equilibrio con un horizonte infinito, un tiempo continuo, o modelos con incertidumbre. Estamos implícitamente considerando la posibilidad de multiplicidad de equilibrios y por ende comportamientos catastróficos incluyendo aquellos de grandes saltos y caídas repentinas en los precios.

Abstract

We present results obtained when comparing the behaviour of an infinite pure exchange economy after an exogenous shock or after a continuous variation of its parameters. We allow for the economy to be nonlinear and to contain heterogeneity of sectors and agents. We are particularly interested in comparative statics of equilibrium prices with an infinite horizon, a continuous time, or models with uncertainty. We are implicitly allowing for the possibility of multiplicity of equilibria and, therefore, for catastrophic behaviour including those of large jumps and sudden drops in prices.

[1] El autor agradece a Elvio Accinelli, un referee anónimo y a los participantes del Segundo Encuentro en San Luis Potosí sobre Bienestar, Crecimiento y Trampas de Pobreza 2009.

[2] El contenido de este trabajo, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusivo del autor y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

Palabras clave: Equilibrio general, economías infinitas, elección intertemporal, incertidumbre.

Clasificación JEL: D5, D50, D51, D80, D90.

1. Introducción

En este trabajo, presentamos resultados obtenidos al comparar el comportamiento de una economía infinita de intercambio puro después de un choque exógeno o de una variación continua de sus parámetros. Permitimos que la economía no sea lineal y contenga heterogeneidad de sectores y agentes. Estamos implícitamente considerando la posibilidad de multiplicidad de equilibrios y por ende comportamientos catastróficos incluyendo aquellos de grandes saltos y caídas repentinas en los precios. Este tipo de estudios nos parece particularmente relevante en medio del clima económico por el que el mundo está pasando.

Existen diversos modelos de *economías infinitas* como las que describimos a continuación aunque podemos mencionar que estos modelos surgen básicamente de considerar un horizonte infinito, tiempo continuo o incertidumbre. Por ejemplo, en el caso de una economía con horizonte infinito, cada agente consume una secuencia de la forma

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

en el que cada x_t es un vector de los ℓ bienes disponibles en el periodo t. Una secuencia así puede verse también como una función de la forma

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^\ell.$$

Otro tipo de ejemplos surgen al considerar un tiempo continuo de tal manera que el consumo (o la tasa de consumo) de cada agente es una función de la forma

$$x : [0, T] \to \mathbb{R}^\ell.$$

Un tercer ejemplo surge de considerar incertidumbre a través del tiempo. Por ejemplo, en una economía con dos periodos de tiempo ($t = 0, 1$), el agente consume (x_0, x_1) en el que $x_0 \in \mathbb{R}^\ell$ y en $t = 1$ la incertidumbre está parametrizada por el intervalo $[0, 1]$ de tal forma que el agente consume a través de una función de la forma

$$x_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^\ell.$$

En los tres ejemplos puede observarse que el consumo es una función de la forma $x : M \to \mathbb{R}^\ell$. Aunque hay consideraciones matemáticas muy importantes que explicaremos en breve, las dotaciones iniciales y los precios serán también funciones del espacio de parámetros M a $\mathbb{R}^\ell$.

El estudio de economías infinitas a ha sido llevado a cabo previamente por diversos autores como Accinelli (1994, 1996, 2003) y Balasko (1997a, 1997b, 1997c). Dichos autores se han concentrado en comparar los pesos sociales después de un cambio en las dotaciones iniciales de los agentes de la economía. Nosotros además mencionaremos los cambios en los precios de equilibrio después de un cambio en las dotaciones individuales de los agentes.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En la sección 2 presentamos ejemplos y características de economías infinitas. Definimos preferencias representadas por una función de utilidad descontada y definimos también el flujo de consumo, la secuencia de precios y caracterizamos las funciones de demanda individual. Después, en la sección 3, presentamos los resultados principales que nos permiten comprender el conjunto de equilibrio de una economía infinita á la Balasko en donde hacemos un análisis cualitativo de los cambios en los precios de equilibrio al cambiar los parámetros que definen la economía. Para ello analizamos propiedades de la función de exceso de demanda de nuestra economía y propiedades del conjunto de equilibrio. Por último, en la sección 4, damos interpretaciones geométricas de los resultados principales.

2. Ejemplos de economías infinitas

2.1. Horizonte infinito

Suponemos que el tiempo es discreto e infinito y lo denotaremos por $t = 1, 2, 3, \ldots$. Suponemos que existe un número ℓ de bienes en cada periodo de tiempo y que existen $i = 1, \ldots, I$ agentes que viven por siempre. Debido a que los recursos que la naturaleza nos brinda son finitos a través del tiempo, un **flujo de consumo** es una secuencia infinita $x_i = \{x_i(t)\}_{t=1}^{\infty}$ en el que $x_i(t) \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$ es acotado, es decir, en la norma Euclideana $\|x_i(t)\| < K$ para alguna constante positiva K, y para todo tiempo t. Alternativa, y equivalentemente, el flujo de consumo del agente i puede verse como un mapeo $x_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\ell}_{++}$.

2.1.1. Similaridad de flujos de consumo

Nos gustaría definir la noción de *similaridad* entre dos flujos de consumo x e y. Nos parece natural requerir que **dos flujos de consumo son similares** si son similares en cada periodo de tiempo. Equiparemos entonces el espacio de consumo con la norma del supremo

$$\|x - y\| = \sup_{t \in \mathbb{N}} \|x(t) - y(t)\|$$

de tal forma que x e y son similares si $\|x - y\| = \sup_{t \in \mathbb{N}} \|x(t) - y(t)\| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Una propiedad matemática relevante de esta norma es que el cono positivo del espacio de consumo tendrá un interior que no es vacío y ello nos permitirá utilizar herramientas de análisis y de topología diferencial, como por ejemplo el teorema del valor regular o el de la función implícita. Secuencias infinitas con esta norma se denotan $\ell_\infty\left(\mathbb{R}^{\ell}_{++}\right)$.

2.1.2. Preferencias

Las **preferencias individuales** serán representadas por funciones de utilidad del tipo de descuento. Para ello suponemos que hay una función de utilidad de corto plazo $v_i : \mathbb{R}^\ell_{++} \to \mathbb{R}$ que es suave, suavemente creciente, suavemente estrictamente cóncava y tal que la clausura en $\mathbb{R}^\ell$ de cada conjunto de indiferencia está contenida en el cono estrictamente positivo del cuadrante de $\mathbb{R}^\ell_{++}$.

Sin perder generalidad, suponemos que la imagen de v_i es el intervalo $(-\infty, a)$. La utilidad obtenida en el largo plazo de consumir $x_i = \{x_i(t)\}_{t=1}^\infty$ está dada por

$$u_i(x_i) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t v_i(x_i(t))$$

en donde $\delta \in (0,1)$. Una condición suficiente (cf. Balasko, 1997a) para que la utilidad de largo plazo sea convergente es que la secuencia $\{x_i(t)\}$ sea uniformemente acotada lejos de 0, es decir, que exista $\bar{x_i}^* \in \mathbb{R}^\ell_{++}$ tal que $\bar{x_i}^* \leq x_i(t)$ para cada t. En este caso tenemos las desigualdades

$$v_i(\bar{x_i}^*) \leq v_i(x(t)) < a$$

que implica que $v_i(x(t))$ es acotada y esto implica a su vez la absoluta convergencia de la función de utilidad de largo plazo.

2.1.3. Espacio de consumo

Definiremos ahora el **espacio de consumo** que sea X_∞^{++}, el cono positivo de

$$X_\infty = \left\{ x \in \ell_\infty \left(\mathbb{R}^\ell_{++} \right) : x(t) \, \text{está acotado por debajo para todo } t \right\}$$

y recordamos al lector que X_∞^{++} tiene un interior que no es vacío.

2.1.4. Precios

Estrictamente hablando, un **precio** es una función lineal $P : X_\infty \to (0, \infty)$ que le da un valor finito a cada flujo de consumo, es decir, es un elemento del cono positivo del espacio dual de X_∞. Desafortunadamente este espacio dual, denotado $(\ell_\infty)^*$, es técnicamente difícil de manejar debido a su gran tamaño. Este tema ha sido tratado ampliamente por Prescott y Lucas (1982). Sin embargo, Bewley (1972) ha demostrado que, con utilidades separables como las nuestras, si el espacio de consumo es $\ell_\infty(\mathbb{R}^\ell_{++})$ entonces los precios de equilibrio estarán en $\ell_1(\mathbb{R}^\ell_{++})$, que es un subconjunto mucho más pequeño de $(\ell_\infty)^*$ y que está definido por

$$\ell_1(\mathbb{R}^\ell_{++}) = \left\{ P = (P_1, P_2, \dots) : P_i \in \mathbb{R}^\ell_{++}\,,\ \sum_{i=1}^{\infty} \|P_i\| < \infty \right\}$$

equipado con la norma

$$\|P\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|P_i\| \right).$$

El teorema de Bewley amerita una observación importante. De ahora en adelante podemos pensar que el espacio de precios es $\ell_1(\mathbb{R}^\ell_{++})$ ya que al hacer esto sólo estamos descartando precios que *no* tienen posibilidad alguna de ser precio de equilibrio y, por ende, no estamos perdiendo información alguna. Es decir, cualquier precio que sea un elemento del complemento de $\ell_1(\mathbb{R}^\ell_{++})$ en $\ell_\infty(\mathbb{R}^\ell_{++})$ no podrá ser un precio de equilibrio.

2.2. Economías con tiempo continuo o incertidumbre

En la sección 2.1 mencionamos cómo se definen las secuencias de consumo y los precios de economías con un horizonte infinito. Ahora mencionaremos, cómo se realiza el análogo para economías con tiempo continuo o con incertidumbre. Para simplificar notación e ideas suponemos que el parámetro (tiempo o incertidumbre) toma valores en $M = [0, \hat{M}]$.

En dichas economías también suponemos que hay un número finito de agentes $i = 1, \dots, I$. El consumo del agente i está dado por una función de la forma

$$x_i : M \to \mathbb{R}^\ell_{++}.$$

2.2.1. Similaridad de flujos de consumo

Para definir la noción de similaridad entre dos flujos de consumo lo natural es utilizar alguna norma L_p de tal manera que si x e y son dos flujos, y $\|x(t)\|$, $\|y(t)\|$ son Lebesgue integrables, entonces para $p \geq 1$,

$$\|x - y\|_p = \left(\int_0^{\hat{M}} \|x(t) - y(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

o si $p = \infty$, y $\|x(t)\|$, $\|y(t)\|$ son Lebesgue integrables y acotados entonces

$$\|x - y\|_\infty = ess\,sup \|x(t) - y(t)\|.$$

De esto modo, una vez escogida la norma, diremos que x e y son similares si $\|x - y\| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Una propiedad relevante de los espacios L_p, $1 \leq p \leq \infty$, es que el único de ellos que tiene un cono positivo con interior no vacío es L_∞. Lo natural, para espacios L_p, sería entonces definir el espacio de consumo como un subconjunto de $L_\infty(\mathbb{R}^\ell_{++})$.

Otra noción de similaridad ampliamente utilizada es la de las funciones continuas $C(M, \mathbb{R}^\ell)$, junto con la noción de similaridad dada por

$$\|x - y\| = \max_{t \in M} \|x(t) - y(t)\|.$$

Cabe mencionar que las funciones continuas satisfacen dos propiedades importantes:

- Las funciones continuas sobre M (que es compacto) son densas en todos los espacios L_p, $1 \leq p < \infty$ con respecto a la norma del espacio en cuestión (cf. Aliprantis y Border, p. 466). Es decir, cualquier flujo de consumo en L_p puede ser aproximado arbitrariamente cerca por un consumo continuo.

- El cono positivo del espacio de funciones continuas, con la norma del máximo, tiene un interior no vacío.

Con estas dos consideraciones en mente, a partir de este momento nos restringiremos únicamente a flujos continuos, y definiremos el espacio de bienes como

$$X = \{x \in C(M, \mathbb{R}^{\ell})\}$$

y el espacio de consumo como el cono positivo de X, es decir,

$$X^{++} = \{x \in C(M, \mathbb{R}^{\ell}_{++})\}.$$

De cierta manera, los resultados que detallamos a continuación podrían verse como resultados *aproximados*.

2.2.2. Preferencias

Las preferencias individuales están representadas por una utilidad de la forma

$$u_i(x_i) = \int_0^{\hat{M}} v_i(x(t), t)\, dt.$$

Nótese que en este caso no es necesario imponer restricciones adicionales en el espacio de consumo ya que estamos integrando sobre M, que es un espacio compacto.

2.2.3. Precios

Para definir el espacio de precios lo natural también sería definirlo como el cono positivo del espacio dual del espacio de consumo. Los mismos comentarios que para un horizonte infinito aplican; es decir, el dual de $C(M)$ es un espacio sumamente grande y difícil de manejar. Los resultados de Crès et al (2009) y de Chichilnisky y Zhou (1998) demuestran que, con utilidades separables como las nuestras, si un precio es de equilibrio entonces debe de estar en $C(M)$, que es un subconjunto mucho más pequeño y manejable que $(C(M))^*$.

Por último, escogeremos una normalización y definimos el **espacio de precios** que sea

$$S = \left\{ P \in C(M, \mathbb{R}^{\ell}_{++}) : \|P\| = 1 \right\}.$$

2.3. Propiedades de las funciones de demanda individuales

Definimos las **funciones de demanda individual** $f_i : S \times (0, \infty) \to X^{++}$ del agente i como

$$f_i(P, w) = \arg \left[\max_{x \in X} u_i(x) \, \text{s.t.} \, P \cdot x \leq w \right].$$

Esta definición tiene dificultades en dimensiones infinitas. Si el espacio de bienes fuese un espacio de Banach cualquiera, Araujo (1988) ha demostrado que la función de demanda existirá si y sólo si el espacio de bienes es reflexivo. Además, aún y cuando la función de demanda individual existiese, es continuamente diferenciable si y sólo si el espacio de bienes es un espacio de Hilbert.

Sin embargo, Chichilnisky y Zhou (1998) demuestran que, con el espacio de precios restringido, las funciones de demanda individual $f_i(P, w)$, $i = 1, \ldots, I$, sí existen y además satisfacen las siguientes propiedades (la tercera de ellas la discutimos con más detalle a continuación):

- Ley de Walras;
- Para cada i, f_i es un difeomorfismo de $S \times (0, \infty)$ a X^{++};
- Para cada i, f_i es un mapeo de Fredholm de índice cero.

La tercera de estas propiedades es crucial ya que algunos resultados de topología diferencial que nos serán relevantes pueden ser extendidos a infinitas dimensiones a través de mapeos de Fredholm (Smale, 1965). La idea es que los mapeos de tipo Fredholm son "casi invertibles": son invertibles módulo perturbaciones compactas. La teoría de Fredholm ha sido utilizada previamente en la teoría económica por ejemplo en Kehoe, Levine, Mas-Collel y Zame (1989), Balasko (1997a, 1997b), Chichilnisky y Zhou (1998) y en Accinelli (2003).

La siguiente sección muestra un pequeño resumen de las propiedades más importantes de la teoría de Fredholm, aunque el lector puede saltársela si recuerda que *ser Fredholm* es una propiedad matemática que las funciones deben de satisfacer para poder extender resultados de cálculo y de topología a dimensiones infinitas.

2.4. Teoría de Fredholm

Un **operador de Fredholm** es un operador lineal continuo $L : E_1 \rightarrow E_2$ entre espacios de Banach tal que

- dim ker $L < \infty$
- dim coker $L =$ dim E_2/rango L $< \infty$

Un **mapa de Fredholm** es un mapa C^1, $f : M \rightarrow V$ entre variedades diferenciales de Banach tal que la derivada en cada punto es un operador de Fredholm. El índice de un operador de Fredholm se define por

$$L = \text{dim ker}L - \text{dim coker}L$$

y el **índice de un mapa de Fredholm** $f : M \rightarrow V$ es el índice de su derivada. Smale (1965) demuestra que el índice es el mismo en todo el dominio de f si M es conexo.

3. El conjunto de equilibrio

En esta sección clasificaremos el conjunto de equilibrio de una economía de intercambio. Comenzaremos definiendo la función de exceso de demanda.

3.1. Propiedades de la función de exceso de demanda

Debido a que estamos fijando las preferencias de los individuos, definimos una **economía de intercambio puro** con I agentes parametrizada por las dotaciones individuales

$$\omega = (\omega_1, \ldots \omega_I) \in X^{++} \times \cdots \times X^{++} = \Omega.$$

Es decir, una economía es un punto $\omega \in \Omega$. Por otro lado, la **función de exceso de demanda** $Z_\omega : S \rightarrow X$ de la economía $\omega \in \Omega$ está dada por

$$Z_\omega = \sum_{i=1}^{I} f_i(P, P \cdot \omega_i) - \sum_{i=1}^{I} \omega_i$$

y escribimos la evaluación $Z(\omega, P) = Z_\omega(P)$.

El **conjunto de equilibrio** $\Gamma \subset \Omega \times S$ está definido por

$$\Gamma = \{(\omega, P) \in \Omega \times S : Z(\omega, P) = 0\}$$

y la **proyección natural** es $\pi : \Omega \times S|_\Gamma \to \Omega$ dada por $\pi(\omega, P) = \omega$. Es decir, π es la proyección natural restringida al conjunto de equilibrio.

Decimos que una economía es **regular** (respectivamente **crítica**) si y sólo si ω es un valor regular (respectivamente un valor crítico) de la proyección $\pi : \Gamma \to \Omega$.

3.2. Propiedades del conjunto de equilibrio

En (Covarrubias, 2009) demostramos los dos siguientes resultados.

Teorema 1 *El conjunto de equilibrio $\Gamma \subset \Omega \times S$ es una variedad suave de Banach y la proyección natural $\pi : \Gamma \to \Omega$ es suave. Aún más Γ es conexo y simplemente conexo.*

Teorema 2 *Las economías son genéricamente regulares. En otras palabras, el conjunto de economías críticas es una unión contable de conjuntos en ningún lugar densos.*

4. Interpretación de los Teoremas 1 y 2

Los Teoremas 1 y 2 son los que nos permiten analizar los efectos que ejerce en los precios de equilibrio una variación en los parámetros que definen una economía. En el gráfico estamos dibujando el conjunto de equilibrio Γ como subconjunto de $\Omega \times S$. Aunque es difícil representar conjuntos de dimensiones infinitas en un plano, el esquema al menos nos permite fijar ideas.

El Teorema 1 nos indica resultados en diversas direcciones. Lo primero es que Γ es una variedad diferencial; es decir, en cada punto sobre el conjunto de equilibrio, un par (ω, P) puede ser descrito por coordenadas locales. Además, de ser necesario, cada par (ω, P) puede ser linealizado localmente.

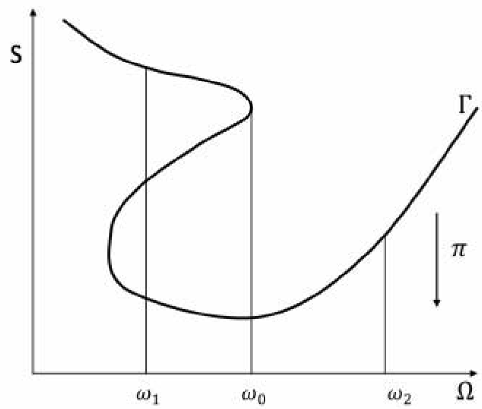

Figura 1: La variedad de equilibrio Γ. Aquí, ω_0 es una economía crítica, mientras que ω_1, ω_2 son economías regulares.

Se demuestra también que Γ es conexo y simplemente conexo. Para comprender esto, supongamos que (ω, P) es el equilibrio actual y que (ω', P') es un equilibrio al que se desea llegar en un futuro. Entonces, un camino continuo sobre Γ es la representacion matemática de una política económica. El hecho de que Γ sea conexo quiere decir que existe siempre una política económica. El que sea simplemente conexo quiere decir que cualesquiera dos políticas pueden siempre ser deformadas continuamente una en la otra.

En la gráfica se distinguen economías $\omega_0, \omega_1, \omega_2$. En este ejemplo, ω_1 y ω_2 son economías regulares. Ello se puede ver ya que en cualquiera de los precios de equilibrio asociados a ellas, la tangente a Γ sobre el precio de equilibrio no es vertical. Se aprecia además que ambas economías tienen un número impar de precios de equilibrio. Cada uno de estos precios de equilibrio son localmente funciones continuas de las dotaciones iniciales.

En este ejemplo, ω_0 es una economía crítica ya que en el precio de equilibrio *superior*, la tangente a Γ es vertical. Esta economía tiene dos precios de equilibrio, pero una pequeña variación de las dotaciones iniciales lleva a que el número de equilibrios sea nuevamente impar (hacia la *izquierda* son tres y a la *derecha* son uno).

Se aprecia además que los saltos en precios están asociados a las economías críticas. Por ejemplo, supongamos que estamos en el precio de equilibrio más alto de ω_1. Si nos movemos continuamente de ω_1 a ω_2, justo cuando pasamos por ω_0 es cuando el precio de equilibrio tiene una caída repentina hacia la rama inferior de Γ.

El Teorema 2 nos explica que las economías son genéricamente regulares. De hecho, en nuestro dibujo, existe solamente una economía crítica de entre todo el continuo de dotaciones iniciales. Es, en efecto, la unión contable de conjuntos en ningún lugar densos.

Referencias

[1] Accinelli, E. (1994) "Existence and uniqueness of the competitive equilibrium for infinite dimensional economies." *Estudios de Economía.* vol. 21, no. 2, 313-326.

Accinelli, E. (1996) "Some remarks about uniqueness of equilibrium for infinite dimensional economies." *Estudios Económicos.* vol. 11, no.1, 3-31.

Accinelli, E. (2003) "About manifolds and determinacy in general equilibrium theory." *Estudios de Economía.* vol. 30, no. 2, p. 169-177.

Aliprantis, C.D. & Border, K.C. "Infinite dimensional analysis." Springer-Verlag, Berlin, 2006.

Araujo, A. (1988) "The non-existence of smooth demand in general Banach spaces." *Journal of Mathematical Economics.* vol. 17, p. 309-319.

Balasko, Y. (1997a) "The natural projection approach to the infinite-horizon model." *Journal of Mathematical Economics.* vol. 27, p. 251-265.

Balasko, Y. (1997b) "Pareto optima, welfare weights, and smooth equilibrium analysis." *Journal of Economic Dynamics and Control.* vol. 21, p.473-503.

Balasko, Y. (1997c) "Equilibrium analysis of the infinite horizon model with smooth discounted utility functions." *Journal of Economic Dynamics and Control.* vol. 21, p. 783-829.

Bewley, T.F. (1972) "Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities." *Journal of Economic Theory.* vol. 4, p. 514-540.

Chichilnisky & Zhou (1998) "Smooth infinite economies." *Journal of Mathematical Economics.* vol. 29, p. 27-42.

Covarrubias, E. (2009) "General equilibrium theory in infinite dimensions" PhD dissertation, The University of Edinburgh, Scotland.

Crès, H., Markeprand, T. and Tvede, M. *Incomplete Financial Markets and Jumps in Asset Prices.* Discussion paper 09-12 (2009), Department of Economics, University of Copenhagen.

Kehoe, T.J., Levine, D.K., Mas-Colell, A. & Zame, W.R. (1989) "Determinacy of equilibrium in large-scale economies." *Journal of Mathematical Economics.* vol. 18, p. 231-262.

Prescott, E.C. & Lucas, R.E. (1972) "A note on price systems in infinite dimensional space." *International Economic Review.* vol. 13, no. 2, p. 416-422.

Smale, S. (1965) "An infinite dimensional version of Sard's theorem." *American Journal of Mathematics.* vol. 87, no. 4, p. 861-866.