PERSPECTIVAS *Revista de Análisis de Economía, Comercio y Negocios Internacionales*
Volumen 13 / No. 2 / Julio - Diciembre 2019 / 35 -50
ISSN 2007-2104

Equilibrio General: Un Mecanismo de Formación de Precios y la Equivalencia Nash-Walras

Gustavo de Jesús Benítez Meza
Jaime Velasco Sánchez
Elvio Accinelli Gamba
Facultad de Economía
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Resumen

A partir de demostrar la existencia de un equilibrio de Nash para un juego de Dubey-Geanakoplos generalizado explicamos la formación de precios en una economía de intercambio puro con un continuo de agentes, $\mathcal{E}_c := (l_\infty^+, w(t), u_t)_{t \in I}$, donde el espacio de mercancías es el espacio de sucesiones esencialmente acotadas, l_∞. Modificamos el juego para presentar las condiciones en las que es posible encontrar un equilibrio de Nash de tipo-simétrico del juego generalizado a partir de un equilibrio de Walras de la economía continua, y viceversa.

Palabras clave: Economía de Intercambio Puro, Equilibrio de Nash, Equilibrio de Walras, Juegos de Mercado.

Clasificación JEL: D5, D11.
Clasificación AMS: 91B24, 91B26, 46.

1. Introducción

Shapley y Shubik [10] demostraron la existencia del equilibrio de Nash de un juego no-cooperativo con finitos agentes y finitas mercancías, donde el dinero es considerado una mercancía y los pagos son funciones de utilidad continuas, cóncavas y monótonas. Dubey y Geanakoplos [5] retomaron esta idea y suponen que el dinero sólo sirve como medio de intercambio, que existe un agente externo que hace que los precios no se anulen y que existe un banco que presta cierta cantidad de dinero a los agentes. En los artículos mencionados, el objetivo principal es explicar la formación de precios de un equilibrio de Walras por medio de un juego, sin embargo, aún no se tiene un resultado general. En el presente trabajo se pretende contribuir en la consecusión de tal objetivo.
Nosotros extendemos el juego de Dubey y Geanakoplos [5], donde el espacio de mercancías es el espacio de sucesiones esencialmente acotadas, l_∞, y el agente externo distribuye una cantidad finita de dinero de tal forma que el precio de cada mercancía no se anule. Para demostrar la existencia del equilibrio de Nash de tipo-simétrico usamos la topología producto

asociada a l_∞ y algunos resultados conocidos, como el teorema de Tychonoff, el teorema de Berge y el teorema del punto fijo de Kakutani.
Por otro lado, Hervés-Beloso y Moreno-García [8] definen un juego sin agente externo, donde el dinero que el banco presta a cada tipo de jugador depende de un equilibrio de Walras de la economía, y encuentran un equilibrio de Nash de tipo-simétrico. Nosotros generalizamos este resultado definiendo el juego de tal forma que las cantidades que el banco presta son independientes, encontrando un equilibrio de Nash de tipo-simétrico a partir de cualquier equilibrio de Walras de la economía con sistema de precios en el espacio de sucesiones cuya serie es absolutamente convergente, l_1. Para considerar un agente externo, necesitamos modificar el juego de Dubey y Geanakoplos [5] y eliminar toda influencia sobre las mercancías. Este resultado es nuevo aún si consideramos una cantidad finita de mercancías y una cantidad finita de jugadores.
Finalmente, analizamos una condición suficiente para encontrar un equilibrio de Walras de la economía a partir de cualquier equilibrio de Nash de tipo-simétrico de nuestro juego.

2. Preliminares

2.1. Las mercancías y el sistema de precios

Los bienes y servicios que pueden existir en una economía son finitos porque los recursos naturales y la tecnología que se usa para producirlos son limitados. Sin embargo, a veces es conveniente diferenciar dos bienes que son teóricamente iguales, pero que el estado de la naturaleza, el lugar o el instante del tiempo en el que están disponibles los hacen diferentes. Una mercancía es un bien o servicio completamente especificado física, temporal y espacialmente. Esto nos permite relajar el supuesto de homogeneidad de las mercancías para cada bien o servicio, es decir, que los bienes siempre tienen la misma calidad, que se producen en un mismo instante del tiempo con la misma tecnología y que se encuentran en un mismo lugar. Bewley [3] propuso el espacio de funciones esencialmente acotadas, $\mathcal{L}_\infty$, para representar a todas las canastas de mercancías existentes en una economía. Nosotros usamos el espacio de sucesiones esencialmente acotadas, l_∞.

Consideremos (X, τ) un espacio localmente convexo, donde X es el espacio de mercancías tal que X' es su dual topológico y sistema de precios $p \in X'$. El valor de una canasta $x_0 \in X$ con respecto al sistema de precios p es igual a la aplicación del funcional p al elemento x_0, que denotamos como $\langle p, x_0 \rangle$. Dado el espacio de mercancías, l_∞, un sistema de precios es un elemento del dual topológico, $p \in l'_\infty$. Nos interesa trabajar con sistemas de precios que tengan una interpretación económica real, por eso consideramos aquellos que cumplan $p = (p_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l_1 \subset l'_\infty$, donde p_j denota el precio de la mercancía j, $\forall j \in \mathbb{N}$.

2.2. Las preferencias

Recordemos algunos conceptos que usamos para definir una economía de intercambio puro con infinitos agentes y un juego con estrategias de tipo-simétrico. En un espacio de mercancías X, relación de preferencia racional, $\succsim$, es una relación binaria, definida sobre X, que es completa y transitiva. Si las canastas $x_0, y_0 \in X$ cumplen $x_0 \succsim y_0$, entonces decimos que x_0 es débilmente preferido a y_0. Una relación de preferencia racional nos define un preorden. Si $\succsim$ es una relación de preferencia racional definida sobre el espacio X y $x_0, y_0 \in X$, decimos que x_0 es estríctamente preferido a y_0 si $x_0 \succsim y_0$, pero $y_0 \not\succsim x_0$, lo cual denotaremos por $x_0 \succ y_0$. Decimos que un agente es indiferente entre x_0 y y_0 si $x_0 \succsim y_0$ y, además, $y_0 \succsim x_0$, lo cual denotamos por $x_0 \sim y_0$. También se dice que x_0 es igualmente preferido a y_0. La relación de preferencia, $\succsim$, es monótona si, para cualesquiera dos canastas x_0, y_0 que satisfacen $x_0 \geq y_0$, se tiene que $x_0 \succsim y_0$. Si $X = l_\infty$, entonces $x_0 \geq y_0$ equivale a decir que $x_0^j \geq y_0^j$, $\forall j \in \mathbb{N}$.Decimos que $\succsim$ es convexa si, para cada $x_0 \in X$, el conjunto

$$U(x_0) := \{y_0 \in X; y_0 \succ x_0\}$$

es convexo.

Definición 2.1. *Sean X un espacio de mercancías dotado de una topología y una relación binaria $\succsim$. Decimos que $\succsim$ es continua si, $\forall x_0 \in X$, los conjuntos*

$$\bar{U}(x_0) := \{y_0 \in X; y_0 \succsim x_0\} \ ,$$

$$\bar{L}(x_0) := \{y_0 \in X; x_0 \succsim y_0\} \ ,$$

son cerrados y, además, los conjuntos

$$U(x_0) := \{y_0 \in X; y_0 \succ x_0\} \ ,$$

$$L(x_0) := \{y_0 \in X; x_0 \succ y_0\} \ ,$$

son abiertos.

Decimos que la relación de preferencia $\succsim$ es representable si existe una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 \succsim y_0 \iff u(x_0) \geq u(y_0), \ \ x_0, y_0 \in X \ .$$

La función de utilidad es cóncava si $\forall x_0, y_0 \in X$ y $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$u(\lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0) \geq \lambda u(x_0) + (1 - \lambda)u(y_0) \ .$$

La función es cuasicóncava si $\forall x_0, y_0 \in X$ y $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$u(\lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0) \geq \text{mín}\{u(x_0), u(y_0)\} \ .$$

La cuasiconcavidad de las funciones de utilidad implica convexidad en las preferencias.

3. Una generalización del juego de Dubey y Geanakoplos

3.1. Un juego con perfil de estrategias de tipo-simétrico

Dado un conjunto no vacío de agentes, I, tal que cada $t \in I$ tiene un conjunto de estrategias S_t, decimos que un perfil de estrategias es un elemento $\beta := (\beta_t)_{t\in I} \in \prod_{t\in I} S_t$, donde $\beta_t \in S_t$, para cada $t \in I$. Un perfil de estrategias puede pensarse como una función $\beta : I \to E$, donde E es un espacio de estrategias y $\beta(t) := \beta_t$, $\forall t \in I$. Dado un juego

$\Gamma := (S, \pi)_{t \in I}$, donde S un conjunto de perfiles de estrategias y π un perfil de pagos, decimos que el perfil de estrategias β^* es un equilibrio de Nash del juego Γ si, para todo agente $t \in I$,

$$\beta^*(t) \in \text{argmax}\{\pi_t(\beta_t, \beta^*_{-t}); \beta_t \in S_t\}.$$

Supongamos que $I := \bigcup_{i \in N} I_i = \bigcup_{i \in N}(i-1, i]$ es un conjunto continuo de agentes, donde $N := \{1, 2, \cdots, n\}$. El perfil de estrategias β es de tipo-simétrico si $\beta(t) = \beta_i$, $\forall t \in I_i$, $\forall i \in N$.

3.2. Definición del juego de Dubey y Geanakoplos

Para definir nuestro juego, supongamos que existe una cantidad numerable de puestos comerciales (uno para cada mercancía $j \in \mathbb{N}$), en donde cada agente pone a la venta toda su dotación inicial, y que nadie puede intercambiar mercancías por su cuenta (como ocurre con la economía de intercambio puro).

Un banco está dispuesto a prestarle una cantidad máxima $M_i \in \mathbb{R}$ de dinero fiat a los agentes del subconjunto $I_i \subset I$, sin intereses . La cantidad que pide prestado cada agente $t \in I$ se puede interpretar como una densidad de dinero fiat si suponemos que la acción de préstamo se puede representar con una función integrable en el sentido de Lebesgue, con la medida usual.

Dubey y Geanakoplos [5] sugieren un agente externo que ofrece una cantidad de dinero fiat positiva en cada puesto, pero nuestro modelo tiene una cantidad numerable de mercancías y el total de dinero que el agente pone podría ser infinito. Para evitar esto suponemos que el agente externo ofrece una cantidad positiva c_j en cada puesto $j \in \mathbb{N}$ tal que $C := \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j \leq +\infty$.

Dado un agente $t \in I_i$ del tipo $i \in N$, la cantidad de dinero que pone en el puesto comercial $j \in \mathbb{N}$ es $\beta_{ij} \geq 0$. Supongamos que todos los perfiles de estrategia $\beta := (\beta_t)_{t \in I}$ son de tipo-simétrico, de tal manera que el conjunto de estrategias de cada agente $t \in I_i := (i-1, i]$ es

$$S_t = S(M_i) := \{\beta_i \in l_1^+; \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_{ij} \leq M_i\},$$

para cada tipo $i \in N$. Como las estrategias de cada jugador $t \in I$ siempre son elementos de S_t, entonces el espacio de estrategias es l_1. El perfil de estrategias $\beta : I \to l_1^+$ es una función medible con respecto a la medida de Lebesgue. Recordemos que $\forall i \in N$ $\beta(t) = \beta_i$, $\forall t \in I_i$. Entonces

$$\int_{t \in I_i} \beta_j(t) d\mu(t) = \mu(I_i)\beta_{ij} = \beta_{ij},$$

para cada tipo de agente $i \in N$. Como el banco distribuye uniformemente una cantidad máxima de dinero, M_i, entre todos los agentes del intervalo I_i, para cada tipo $i \in N$, entonces $\sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_{ij} \leq M_i$ y

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{t \in I_i} \beta_j(t) d\mu(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_{ij} \leq M_i \quad ; \forall t \in I_i \quad ; \forall i \in N.$$

Las estrategias y los pagos de todos los agentes del intervalo I serán representados de acuerdo a los tipos de agentes, a menos que se requiera enfatizar el cambio de estrategia de un sólo jugador $t \in I$. De esta manera, consideraremos un número finito de estrategias y de pagos en el juego. Supongamos que todos los agentes en I_i del tipo $i \in N$ tienen una dotación inicial $w(t) := w_i \in l_\infty^+$, donde $w_j(t) \geq 0$ representa la cantidad de la mercancía $j \in \mathbb{N}$ que el agente tenía inicialmente. Sean

$$\bar{b} := \int_{t \in I} \beta(t) d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} \beta(t) d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \in l_1^+$$

el total de dinero que los agentes ofrecen en los puestos comerciales y

$$\bar{w} := \int_{t \in I} w(t) d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} w(t) d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i \in l_\infty^+$$

la cantidad total de mercancía que está disponible. Para poder definir nuestro mecanismo de formación de precios, debemos suponer que $\bar{w}$ es un punto interior de l_∞^+, es decir, que existe $\epsilon > 0$ tal que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{w}_j > \epsilon$. Entonces el sistema de precios se forma tal que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$p_j(\beta) := \frac{\bar{b}_j + c_j}{\bar{w}_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} + c_j}{\sum_{i=1}^{n} w_{ij}}.$$

Para que tenga sentido relacionar un equilibrio de Walras con un equilibrio de Nash, supongamos que el agente externo recibe como pago el excedente de mercancía de cada puesto comercial $j \in \mathbb{N}$. Definimos una función de asignación, $x : I \times (S(M))^n \to l_\infty^+$, tal que

$$x_{ij}(\beta) := \frac{\beta_{ij}}{p_j(\beta)}$$

para cada agente $t \in I_i$ del tipo $i \in N$. Además, cada tipo de agente $i \in N$ obtiene $p_j(\beta) w_{ij}$ unidades de dinero como ganancia por la venta de su dotación inicial, dejándolos con un déficit neto de

$$d_i(\beta) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_{ij} - \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j(\beta) w_{ij}$$

y un pago de

$$\pi_i(\beta) := u_i(x_i(\beta)) - \text{máx}\{0, d_i(\beta)\} = u_i(x_i(\beta)) - d_i^+(\beta). \tag{1}$$

Supongamos que $w_i \gg 0$ y que u_i es continua, monótona y cóncava, para cada agente $i \in N$. Denotamos al juego como $\Gamma(M_i)_{i \in N}$ con estrategias $\beta_i \in S(M_i)$ y pagos $\pi_i(\beta) \in \mathbb{R}^+$, para cada tipo de agente $i \in N$.

Proposición 3.1. *El sistema de precios que resulta de jugar el perfil de estrategias β, $p(\beta)$, es un elemento de l_1^+.*

Demostración. Sea $T := \sum_{i=1}^{n} M_i$. Como las dotaciones iniciales son puntos interiores, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $w_i^j > \epsilon$ para cada $j \in \mathbb{N}$, $i \in N$. Luego, existe $a > 0$ tal que $\sum_{i \in N} w_i^j > a$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j(\beta) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\int_{t \in I} b_j(t) d\mu(t) + c_j}{\sum_{i \in N} w_i^j} &< \frac{1}{a} \left[\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{t \in I} b_j(t) d\mu(t) + \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j \right] \\ &\leq \frac{1}{a} \left[\int_{t \in I} \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j(t) d\mu(t) + C \right] \leq \frac{T + C}{a}. \end{aligned} \tag{2}$$

Por la ecuación 2 sabemos que la sucesión $(p_j(\beta))_{j\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada, entonces $p(\beta) \in l_1$. □

3.3. Existencia del equilibrio de Nash de tipo-simétrico

Supongamos que β es un perfil de estrategias de tipo-simétrico. Sea $\varphi_t : \prod_{r=1}^{n} S(M_r) \twoheadrightarrow S(M_i)$ la correspondencia de mejores respuestas de un agente $t \in I$, de tipo $i \in N$, a β_{-t}, definida como

$$\varphi_t(\beta) := \operatorname{argmax}\{\pi_t(\beta_t, \beta_{-t}); \beta_t \in S(M_i)\}.$$

Como β es de tipo-simétrico, entonces $\varphi_t(\beta) = \varphi_i(\beta)$, $\forall t \in (i-1, i]$, para cada $i \in N$. Como hay un continuo de agentes, un cambio de estrategia de un jugador $t \in I$ no afecta los precios, es decir, $p(\beta) = p(\beta_t, \beta_{-t})$ para cada $\beta_t \in S(M_i)$.

Sea $[0,T] \subset \mathbb{R}$ con la topología usual, donde $T := \sum_{i=1}^{n} M_i$. Entonces $\prod_{j\in\mathbb{N}}[0,T] \subset \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ y consideramos la topología producto correspondiente.

Proposición 3.2. *El conjunto de estrategias $S(M_i)$ es cerrado en l_1 bajo la topología producto, $\forall i \in N$.*

Demostración. Supongamos que existe un punto adherente b que no pertenece a $S(M_i)$, para algún $i \in N$. Entonces $\exists m = m(b) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=1}^{m} b_j > M_i + \epsilon$, para algún $\epsilon > 0$. Sea

$$V = \left[\prod_{j=1}^{m}\left(b_j - \frac{\epsilon}{2m}, b_j + \frac{\epsilon}{2m}\right)\right] \times \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$$

un entorno de b, entonces $V \cap S(M_i) = \emptyset$. Lo anterior contradice que b sea punto de adherencia. Por lo tanto, $S(M_i)$ es cerrado, $\forall i \in N$. □

Notar que el conjunto de estrategias de cada tipo de jugador $i \in N$, $S(M_i)$, está contenido en el producto de intervalos cerrados y acotados definido por M_i, $\prod_{j=1}^{\infty}[0, M_i] = [0, M_i]^{\mathbb{N}}$. Recordemos los siguientes resultados.

Teorema 3.3 (Tychonoff [11]). *El producto arbitrario de espacios compactos es compacto.*

Teorema 3.4. *[9] Los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos, son compactos.*

Los teoremas 3.3, 3.4 nos garantizan que el conjunto $S(M_i)$ es compacto con la topología producto, $\forall i \in N$, y, por lo tanto, la correspondencia $F_i : \prod_{i=1}^{n} S(M_i) \twoheadrightarrow S(M_i)$, definida como $F_i(\beta) := S(M_i)$, toma valores compactos.

Teorema 3.5 (Berge [2], 1963). *Sean $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ dos espacios topológicos, $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ una función continua y $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una correspondencia continua que toma valores compactos. Entonces la función $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, definida como $g(x) := \max\{f(x,y); y \in F(x)\}$, es continua y la correspondencia $\Phi : \mathbb{X} \twoheadrightarrow \mathbb{Y}$,*

$$\Phi(x) := \{y \in F(x); f(x,y) = g(x)\},$$

es semicontinua superior y toma valores compactos.

Aplicando el teorema 3.5 tenemos que φ_i es semicontinua superior y toma valores compactos. Entonces la correspondencia $\varphi : \prod_{i=1}^n S(M_i) \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^n S(M_i)$, definida como $\varphi(\beta) := \prod_{i\in N} \varphi_i(\beta)$ también es semicontinua superior y toma valores compactos.

Proposición 3.6. *$\varphi_t(\beta)$ es convexo $\forall t \in I_i$, $\forall i \in N$.*

Demostración. Sean $b, b' \in S(M_i)$, $\lambda \in (0,1)$, $t \in I_i$. La función $x_t(\cdot, \beta_{-t}) : S(M_i) \to l_\infty^+$ es lineal. Más específicamente, $x_t^j(b_t, \beta) = \frac{b_j}{p_j(\beta)}$ y, como $u_t : l_\infty^+ \to \mathbb{R}$ es cóncava $\forall t \in I$, entonces

$$u_t(\lambda b + (1-\lambda)b') \geq \lambda u_t(b) + (1-\lambda)u_t(b').$$

Además

$$\pi_t(\lambda b + (1-\lambda)b'), \beta_{-t}) \geq \lambda u_t(b) + (1-\lambda)u_t(b') - \text{máx}\left\{0, \sum_{j\in\mathbb{N}}(\lambda b_j + (1-\lambda)b'_j) - \langle p(\beta), w_t\rangle\right\}$$

$$\geq \lambda\pi_t(b) + (1-\lambda)\pi_t(b').$$

Luego $\pi_t(\cdot, \beta_{-t}) : S(M_i) \to \mathbb{R}$ cóncava y, en particular, es cuasicóncava.

Para probar que $\varphi_t(\beta)$ es convexo para todo $t \in I$, sean $b.b' \in \varphi_t(\beta)$ y $\lambda \in [0,1]$. Como $S(M_i)$ es convexo, entonces $\lambda b + (1-\lambda)b'$ es factible para toda $\lambda \in [0,1]$ y, por definición

$$\pi_t(b, \beta_{-t}) = \text{máx}\{\pi_t(\beta_t, \beta_{-t}); \beta_t \in S(M_i)\} = \pi_t(b', \beta_{-t})$$

y por cuasiconcavidad

$$\begin{aligned}\pi_t(\lambda b + (1-\lambda)b', \beta_{-t}) &\geq \text{mín}\{\pi_t(b, \beta_{-t}), \pi_t(b', \beta_{-t})\}\\ &= \text{máx}\{\pi_t(\beta_t, \beta_{-t}); \beta_t \in S(M_i)\}.\end{aligned}$$

Es claro que $\lambda b + (1-\lambda)b' \in \varphi_t(\beta)$ y, por lo tanto, $\varphi_t(\beta)$ es convexo para todo $t \in I$. $\square$

Recordemos ahora el teorema de Kakutani.

Teorema 3.7 (Kakutani [7])**.** *Sea X un conjunto compacto y convexo. Si $G : X \twoheadrightarrow X$ es unca correspondencia semicontinua superior tal que $G(x)$ es compacto y convexo $\forall x \in X$, entonces G tiene un punto fijo.*

Por la proposición 3.6 sabemos que $\varphi(\beta)$ es convexo, entonces, aplicando el teorema 3.7, tenemos que $\exists \beta \in (S(M))^n$ tal que $\beta \in \varphi(\beta)$ es un equilibrio de Nash de tipo-simétrico del juego $\Gamma(M_i)_{i\in N}$.

4. De Walras a Nash, y viceversa

4.1. Una economía continua de intercambio puro

Supongamos que $I := \bigcup_{i\in N} I_i = (0, n]$ es un conjunto continuo de agentes, donde todos los individuos en $I_i := (i-1, i]$ tienen la misma función de utilidad y la misma dotación inicial, para cada $i \in N$. Lo anterior nos define una economía continua de intercambio puro, asociada a la economía $\mathcal{E} := (l_\infty^+, w_i, u_i)_{i\in N}$ con agentes finitos, que denotaremos como

$$\mathcal{E}_c := \left(l_\infty^+, w(t), u_t\right)_{t\in I}, \tag{3}$$

donde $w : I \to l_\infty^+$ es una función medible y denotaremos por μ a la medida de Lebesgue.

Definición 4.1. *Un punto* $(x^*, p^*) \in (l_\infty^+)^n \times l'_\infty$ *es un equilibrio de Walras de la economía* $\mathcal{E}_c$ *si*

(I)
$$\int_{t\in I} x^*(t)d\mu(t) \leq \int_{t\in I} w(t)d\mu(t),$$

(II)
$$x^*(t) \in \operatorname{argmax}\{u_t(x(t)); x(t) \in B_t(p^*)\},$$

donde $B_t(p^*) := \{x(t) \in l_\infty^+; \langle p^*, x(t)\rangle \langle p^*, w(t)\rangle\}$ *es la restricción presupuestaria para cada agente* $t \in I$.

Proposición 4.2 (García-Cutrín y Hervés-Beloso [6], 1993)**.** (x', p') *es un equilibrio Walrasiano de* $\mathcal{E}$ *si, y sólo si* (x^*, p^*) *es un equilibrio Walrasiano de* $\mathcal{E}_c$*, donde* $p^* = p'$ *y* $x^*(t) = x'_i$*, para cada* $t \in (i-1, i]$, $\forall i \in N$.

Recordemos que la topología de Mackey es la topología localmente convexa más fina que hace que los funcionales lineales del dual sean continuos.

Proposición 4.3 (Araujo [1], 1985)**.** *Si las dotaciones iniciales son puntos interiores de* l_∞^+ *y las preferencias de los agentes son convexas, monótonas y Mackey-continuas, entonces la economía con finitos agentes,* $\mathcal{E}$*, tiene un equilibrio de Walras* (x', p')*, con* $p' \in l_1 \subset l'_\infty$.

4.2. De Walras a Nash, sin agente externo

Sea $\mathcal{E} := (l_\infty^+, \succcurlyeq_i, w_i)_{i\in N}$ una economía con finitos agentes. La economía continua asociada es $\mathcal{E}_c := (I, l_\infty^+, \succcurlyeq_t, w_t)_{t\in I}$, donde el intervalo $I = (0, n]$ y la medida de Lebesgue μ representan el conjunto de consumidores. Supongamos que $w_i \gg 0$ y que u_i es continua, monótona y cóncava, para cada agente $i \in N$.

Observación 4.4. Por las proposiciones 4.2 y 4.3, siempre podemos encontrar un equilibrio de Walras de la economía $\mathcal{E}_c$, con precios $p^* \in l_1$.

Hervés-Beloso y Moreno-García [8] definieron un juego exactamente como el de la subsección 3.2, pero sin agente externo. Si el precio de una mercancía es cero, entonces todos los jugadores no obtendrán nada de esa mercancía. Los resultados que hemos mostrado hasta ahora se siguen cumpliendo al tratarse de un caso particular. La proposición 3.1 se sigue cumpliendo sin agente externo, es decir, $p(\beta) \in l_1^+$.
Cada perfil de estrategias β resulta en una asignación factible de la economía $\mathcal{E}_c$ porque

$$\int_{t\in I} x_t^j(\beta)d\mu = \frac{\int_{t\in I} b_j(t)d\mu(t)}{p_j(\beta)} = \int_{t\in I} b_j(t)d\mu(t) \left(\frac{\sum_{i\in N} w_i^j}{\int_{t\in I} b_j(t)d\mu(t)}\right) \leq \sum_{i\in N} w_i^j.$$

El cambio de estrategia de un sólo individuo no afecta los precios, es decir, $p(b_t, \beta_{-t}) = p(\beta)$ $\forall b_t \in S(M_i)$, para cualquier perfil de estrategias β.

El siguiente teorema es un resultado de Hervés-Beloso y Moreno-García [8], quienes definen las cantidades que el banco presta a los jugadores a partir de un equilibrio de Walras de la economía con un continuo de agentes, con sistema de precios en el espacio de sucesiones absolutamente convergentes, l_1.

Teorema 4.5 (Hervés-Beloso y Moreno-García [8], 2019). *Sean (x^*, p^*) un equilibrio de Walras de una economía con un continuo de agentes, $\mathcal{E}_c$, y $\Gamma(M_i)_{i\in N}$ un juego sin agente externo tal que $M_i = \langle p^*, x_i^*\rangle$, $\forall i \in N$. Entonces el perfil de estrategias β^*, definida como $\beta_{ij} = p_j^* x_{ij}^*$, $\forall j \in \mathbb{N}$,$\forall i \in N$, es un equilibrio de Nash de tipo simétrico de $\Gamma(M_i)_{i\in N}$.*

4.3. El problema del agente externo

Sea (x^*, p^*) un equilibrio de Walras de la economía $\mathcal{E}_c$. Por la observación 4.4 tenemos que $p^* \in l_1^+$. Siguiendo la idea de Hervés-Beloso y Moreno-García [8], definimos el juego $\Gamma(M_i)_{i\in N}$ con agente externo tal que $M_i = \langle p^*, w_i\rangle$, $\forall i \in N$. El juego se define exactamente igual que en la subsección 3.2. Recordar que el agente externo pone una cantidad estríctamente positiva de dinero fiat, c_j, en cada puesto comercial $j \in \mathbb{N}$, de tal manera que $C := \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j < +\infty$. Por la proposición 3.1 sabemos que $p(\beta) \in l_1^+$. Cada perfil de estrategias β resulta en una asignación factible de la economía $\mathcal{E}_c$ porque

$$\int_{t\in I} x_t^j(\beta) = \frac{\int_{t\in I} b_j(t)d\mu(t)}{p_j(\beta)} = \int_{t\in I} b_j(t)d\mu(t)\left(\frac{\sum_{i\in N} w_i^j}{\int_{t\in I} b_j(t)d\mu(t) + c_j}\right) \leq \sum_{i\in N} w_i^j.$$

El candidato para ser equilibrio de $\Gamma(M_i)_{i\in N}$ es el perfil de estrategias β^*, definida como $\beta_j^*(t) = p_j^* x_j^*(t)$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Vemos que

$$p_j(\beta^*) = \frac{\int_{t\in I} p_j^* x_j^*(t)d\mu(t) + c_j}{\int_{t\in I} w_j(t)d\mu(t)} = \frac{p_j^* \int_{t\in I} x_j^*(t)d\mu(t) + c_j}{\int_{t\in I} w_j(t)d\mu(t)}.$$

Como (x^*, p^*) es un equilibrio de la economía $\mathcal{E}_c$, entonces $x^*(t)$ maximiza las preferencias en el conjunto $B_t(p^*) = \{z \in l_\infty^+; \langle p^*, z\rangle \leq \langle p^*, w(t)\rangle\}$, para cada $t \in I$. Luego $\langle p^*, x^*(t)\rangle = \langle p^*, w(t)\rangle$, para cada $t \in I$, entonces

$$p_j(\beta^*) = p^* + \epsilon_j,$$

donde $\epsilon_j = \frac{c_j}{\sum_{i\in N} w_i^j}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. De la misma forma

$$x_t^j(\beta^*) = \frac{\beta_j^*(t)}{p_j(\beta^*)} = \left(\frac{p_j^*}{p_j^* + \epsilon_j}\right) x_j^*(t).$$

Buscamos que el perfil β^* sea un equilibrio de Nash de tipo-simétrico. Sea $\hat{\beta} = (b_t, \beta^*)$, para algún $t \in I_i$, para algún $i \in N$. Sabemos que existe $y(t) \in B_t(p^*)$ tal que $b_t^j = p_j^* y_j(t)$ $\forall j \in \mathbb{N}$ y, además,

$$\langle p(\beta^*), x_t(\hat{\beta})\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{p_j^*}{p_j^* + \epsilon_j}\right)(p_j^* + \epsilon_j)y_j(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_t^j \leq M_i = \langle p^*, w_i\rangle.$$

Para poder concluir, necesitamos garantizar que $x_t(\hat{\beta}) \in B_t(p^*)$, pero esto no necesariamente es cierto. Por lo tanto, no podemos garantizar que el perfil de estrategias β^* sea equilibrio de Nash de tipo simétrico del juego $\Gamma(M_i)_{i\in N}$.

Proposición 4.6. *Sea $\Gamma(M_i)_{i\in N}$ el juego con agente externo. Entonces los puestos comerciales no se vacían (en el sentido de Walras).*

Demostración. Sea β cualquier perfil de estrategias de tipo-simétrico del juego. Recordemos que

$$x_i^j(\beta) = \frac{\beta_i^j}{p_j(\beta)} = \frac{\beta_i^j \sum_{i\in N} w_i^j}{\sum_{i\in N} \beta_i^j + c_j} < \frac{\beta_i^j \sum_{i\in N} w_i^j}{\sum_{i\in N} \beta_i^j} \ \ \forall i \in N \ \forall j \in \mathbb{N},$$

entonces

$$\sum_{i\in N} x_i^j(\beta) < \sum_{i\in N} \left(\frac{\beta_i^j \sum_{i\in N} w_i^j}{\sum_{i\in N} \beta_i^j} \right) = \sum_{i\in N} w_i^j \ \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

□

Si los puestos comerciales no se vacían, entonces existe al menos un agente que puede mejorar su pago porque Dubey y Geanakoplos [5] demostraron que exise al menos un $i \in N$ tal que $d_i(\beta^*) < 0$. Por eso podemos asegurar que el perfil de asignaciones de equilibrio del juego no es un óptimo de Pareto y, por lo tanto, no es un equilibrio de Walras de la economía.

Recordemos que nos interesa explicar la formación de precios de una economía de intercambio puro por medio del juego de Dubey y Geanakoplos, pero si el equilibrio de Nash de tipo-simétrico del juego no nos conduce a un equilibrio de Walras de una economía de iguales características, entonces el agente externo no ayuda a entender el proceso de formación de precios.

En otras palabras, si suponemos que podemos encontrar un equilibrio de Nash de tipo simétrico, β^*, tal que $p_j(\beta^*) = p_j^* + \epsilon_j$ y $x_{tj}(\beta^*) = \left(\frac{p_j^*}{p_j^* + \epsilon_j}\right) x_{tj}^*$, $\forall j \in \mathbb{N}$ y $\forall t \in I$, entonces el par $(x(\beta^*), p(\beta^*))$ puede ser equilibrio de Walras de una economía distinta, con dotaciones iniciales, w_t', tales que $w_{tj}' = \left(\frac{p_j^*}{p_j^* + \epsilon_j}\right) w_{tj}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ y $\forall t \in I$. Si repetimos el proceso para la nueva economía $\mathcal{E}_c'$, encontraremos un equilibrio de una nueva economía, con dotaciones iniciales aún más reducidas. Si el proceso lo repetimos infinitamente, llegaremos a una economía donde las dotaciones iniciales son nulas. Este caso puede suceder y lo explicamos mejor con el siguiente ejemplo de una economía con dos agentes y dos mercancías.

Ejemplo 4.7. *Supongamos que hay dos agentes en una economía $\mathcal{E}$ con dos mercancías, que tienen las mismas dotaciones iniciales $w = (2, 2)$ y las mismas preferencias representadas por la función de utilidad $u(x, y) = x^2 y$.*

Suponiendo que el precio del primer bien es $p_1 = 1$, el problema de maximización para ambos agentes es $\text{máx}\{x^2y; x + p_2 y = 2 + 2p_2\}$. Usando multiplicadores de Lagrange, sea $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 y - \lambda(x + p_2 y - 2 - 2p_2)$, entonces

$$\mathcal{L}_x = 2xy - \lambda = 0 \tag{4}$$
$$\mathcal{L}_y = x^2 - p_2\lambda = 0 \tag{5}$$
$$\mathcal{L}_\lambda = -x - p_2 y + 2 + 2p_2 = 0 \tag{6}$$

Por (4) y (5) tenemos que $2xy = \frac{x^2}{p_2}$, entonces $y = \frac{x}{2p_2}$. Sustituyendo y en (6) tenemos $x + \frac{x}{2} - 2 - 2p_2 = 0$, entonces $x = \frac{4}{3}(p_2 + 1)$ y $y = \frac{2(p_2 + 1)}{3P_2}$. Por la ley de Walras $x + x = \frac{8}{3}(p_2 + 1) = 4$, por lo que $p_2 = \frac{1}{2}$. Luego $x = 2$ y $y = 2$, es decir, hemos encontrado un único equilibrio de la economía. Para el juego de Dubey y Geanakoplos, supongamos que el ajente externo ofrece $c = (1, 1)$, entonces $\epsilon := (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ Ahora sean

$$\hat{x} = \left(\left(\frac{p_1}{p_1 + \epsilon_1} \right) x, \left(\frac{p_2}{p_2 + \epsilon_2} \right) y \right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{3} \right),$$

$$\hat{w} = \left(\left(\frac{p_1}{p_1 + \epsilon_1} \right) w_1, \left(\frac{p_2}{p_2 + \epsilon_2} \right) w_2 \right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{3} \right),$$

$$\hat{p} = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4} \right).$$

Veamos si $\hat{x}$ maximiza las preferencias en el conjunto

$$B(\hat{p}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y \leq \hat{p}_1 \hat{w}_1 + \hat{p}_2 \hat{w}_2 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 5x + 3y \leq 12 \right\}.$$

De manera análoga, sea $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 y - \lambda(5x + 3y - 12)$, entonces

$$\mathcal{L}_x = 2xy - 5\lambda = 0 \tag{7}$$

$$\mathcal{L}_y = x^2 - 3\lambda = 0 \tag{8}$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -5x - 3y + 12 = 0 \tag{9}$$

La única canasta que resuelve el problema de maximización es $\hat{x} = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{3}\right)$. Sea b_t cualquier estrategia del agente $t \in I_1$. Sea x' la canasta que obtiene el agente al jugar con dicha estrategia, entonces

$$\hat{p} \cdot x' = b_t^1 + b_t^2 \leq M_1 = p \cdot x_t = \hat{p} \cdot \hat{x}.$$

Como $\hat{x}$ maximiza las utilidades en $B(\hat{p})$, entonces $\pi_t(b_t, \beta) = u_t(x') \leq u_t(\hat{x}) = \pi_t(\beta)$. Por lo tanto, β es equilibrio de Nash de tipo-simétrico del juego.

Si el proceso de Walras a Nash y de Nash a Walras lo repitiéramos una infinidad de veces, anularíamos las dotaciones iniciales de los agentes y no podríamos recuperar la economía original. Este problema también ocurre si la cantidad que el agente externo pone en los puestos comerciales va incrementando cada vez que se repite el juego. Una posible solución puede ser incrementar la cantidad que el banco está dispuesto a prestarle a los agentes, pero hacer tender el dinero a infinito carece de sentido económico. Es por esto que lo ideal es definir un nuevo juego, al estilo de Dubey y Geanakoplos, que haga que el agente externo no afecte a la formación de precios que se tendría naturalmente en una economía de intercambio puro.

4.4. Redefiniendo el juego con agente externo

Supongamos que, además de la cantidad que se llevan los agentes de la mercancía $j \in \mathbb{N}$, repartimos la cantidad sobrante de acuerdo a la participación de los agentes en el puesto comercial j, es decir,

$$x_t^j(\beta) = \frac{\beta_t^j}{p_j(\beta)} + \frac{c_j \beta_i^j}{(p(\beta) - \epsilon_j)(\sum_{i \in N} \beta_i^j + c_j)} = \frac{\beta_i^j}{p(\beta) - \epsilon_j},$$

si $p_j(\beta) - \epsilon_j \neq 0$ y $x_t^j(\beta) = 0$ si $p_j(\beta) - \epsilon_j = 0$, donde $\epsilon_j = \frac{c_j}{\sum_{i \in N} w_i^j}$.

Los puestos comerciales se vacían con esta pequeña modificación del juego de Dubey y Geanakoplos [5], pero no tomamos en cuenta los precios $p_j(\beta)$, es decir, ignoramos al ajente externo. El nuevo juego es interesante porque si hubiera un agente externo lo suficientemente rico como para reducir drásticamente las asignaciones de los agentes en el juego original, nosotros podríamos anular su influencia repartiendo lo que sobra entre los agentes.

Proposición 4.8. *Sea (x^*, p^*) un equilibrio de Walras de la economía $\mathcal{E}_c$ y Γ' el nuevo juego con agente externo tal que $M_i = \langle p^*, x_i^* \rangle$, $\forall i \in N$. Entonces el perfil de estrategias β^*, definida como $\beta_{ij}^* = p^* x_{ij}^*$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall i \in N$, es un equilibrio de Nash de tipo-simétrico.*

Demostración. Sea (x^*, p^*) un equilibrio de Walras de la economía $\mathcal{E}_c$ y $\beta_j^*(t) = p_j^* x_{tj}^*$ $\forall t \in I$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Entonces $p_j(\beta^*) = p_j^* + \epsilon_j$ y $x_t^j(\beta^*) = x_{tj}^*$ $\forall t \in I$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Como $\beta_t^j = p_j^* x_t^j(\beta)$ $\forall t \in I$, entonces

$$\langle p^*, x_t(\beta) \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_t^j \leq M_i = \langle p^*, w_t \rangle,$$

donde $\beta = (b_t, \beta_{-t}^*)$, para cualquier $b_t \in S(M_i)$. Sabemos que x_t^* maximiza la utilidad en el conjunto $B_t(p^*)$ $\forall t \in I$, entonces

$$\pi_t(\beta) = u_t(x_t(\beta)) \leq u_t(x_t^*) = \pi_t(\beta^*).$$

Por lo tanto, β^* es equilibrio de Nash de tipo-simétrico del juego Γ'. □

Notar que si $c_j = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$, entonces el juego Γ' es el juego sin agente externo que definimos en la subsección 4.2.

4.5. Hervés-Beloso y Moreno-García, una extensión

Hervés-Beloso y Moreno-García [8] definieron el juego sin agente externo a partir del equilibrio de Walras, es decir, dos equilibrios competitivos distintos pueden definir juegos distintos. Nosotros buscamos definir primero un juego y despúes encontrar un equilibrio de Nash de tipo-simétrico a partir de un equilibrio de Walras de la economía con continuos agentes. El primer paso es definir un subjuego tal que podamos garantizar la existencia del equilibrio.

Sea (x^*, p^*) un equilibrio de Walras de $\mathcal{E}_c$ y Γ' el juego modificado con agente externo que definimos en la sección 4.4. Para cada agente $i \in N$, siempre existe un escalar $k_i > 0$ tal que $M_i = \langle k_i p^*, w_i \rangle$, entonces definimos

$$k := \min_{i \in N} \{k_i \in \mathbb{R}_+; \langle k_i p^*, w_i \rangle = M_i\} \ .$$

Definimos el subjuego $\Gamma'(M_i^*)_{i \in N}$, tal que $M_i^* = \langle kp^*, w_i \rangle$ para cada $i \in N$.

Proposición 4.9. *Sea (x^*, p^*) un equilibrio de Walras de $\mathcal{E}_c$ y Γ' el juego modificado con agente externo. El perfil de estrategias β^*, definido como $\beta_{ij}^* = kp_j^* x_{ij}^*$ $\forall i \in N$ $\forall j \in \mathbb{N}$, es equilibrio de Nash de tipo-simétrico del subjuego, $\Gamma'(M_i^*)_{i \in N}$, que acabamos de definir.*

Demostración. Veamos que $p_j(\beta^*) = kp_j^* + \epsilon_j$ y $x_i^j(\beta^*) = x_{ij}^*$. Como $\langle kp \cdot x_t(\beta) \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_{ij} \leq M_i^* = \langle kp^*, w_i \rangle$ $\forall t \in I$, entonces $\max\{0, d_t(\beta)\} = 0$ $\forall t \in I$, donde $\beta = (b_t, \beta^*)$, para cualquier $b_t \in S(M_i)$. Luego

$$\langle kp^*, x_t(\beta) \rangle \leq M_i^* = \langle kp^*, w_t \rangle.$$

Por definición $x_t^* \in B_t(kp^*) = B_t(p^*)$ y, como x_t^* maximiza la utilidad en $B_t(p^*)$, entonces

$$\pi_t(\beta) = u_t(x_t(\beta)) \leq u_t(x_t(\beta^*)) = \pi_t(\beta^*).$$

Por lo tanto β^* es equilibrio de Nash de tipo-simétrico del subjuego $\Gamma'(M_i^*)_{i\in N}$. □

Corolario 4.10. *Sea (x^*, p^*) un equilibrio de Walras de $\mathcal{E}_c$ y Γ' el juego original sin agente externo. El perfil de estrategias β^*, definido como $\beta_{ij}^* = rp_j^* x_{ij}^*$ $\forall i \in N$ $\forall j \in \mathbb{N}$, es equilibrio de Nash de tipo-simétrico del subjuego $\Gamma'(M_i')_{i\in N}$, donde $r \in (0, k]$ y $M_i' = \langle rp^*, w_i\rangle$ para cada $i \in N$.*

El siguiente teorema garantiza que el perfil de estrategias, β^*, del corolario 4.10 es equilibrio de Nash de tipo-simétrico del juego Γ'.

Teorema 4.11. *Sea (x^*, p^*) un equilibrio de Walras de $\mathcal{E}_c$ y Γ' el juego modificado con agente externo. El perfil de estrategias β^*, definido como $\beta_{ij}^* = kp_j^* x_{ij}^*$ $\forall i \in N$ $\forall j \in \mathbb{N}$, es equilibrio de Nash de tipo-simétrico de Γ'.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que β^* no es equilibrio de Nash de tipo-simétrico, entonces existe un tipo de agente $i \in N$, un agente $t \in I_i$ y una estrategia $b_t \in S(M_i)$ tal que $\pi_t(x_t(b_t, \beta_{-t}^*)) > \pi_t(x_t(\beta^*))$. Sea $\hat{\beta}$ tal que $\hat{\beta}_t = b_t$ y $\hat{\beta}_{-t} = \beta_{-t}^*$.

Si $d_t(\hat{\beta}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \hat{\beta}_{tj} - \langle kp^*, w_t\rangle \leq 0$, entonces $\pi_t(\hat{\beta}) = u_t(x_t(\hat{\beta}))$. Por lo anterior $u_t(x_t(\hat{\beta})) > \pi_t(x_t^*) = u_t(x_t^*)$, entonces $x_t(\hat{\beta}) \notin B_t(kp^*)$, pero esto no es posible porque $d_t(\hat{\beta}) \leq 0$.

Si $d_t(\hat{\beta}) > 0$, entonces $\sum_{j\in\mathbb{N}} \hat{\beta}_{tj} > \langle kp^*, w_t\rangle = \langle kp^*, x_t^*\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{tj}^*$. Sea $r > k$ tal que $\sum_{j\in\mathbb{N}} \hat{\beta}_{tj} = \langle rp^*, w_t\rangle$ y $\beta' := (b_t', \beta_{-t}^*)$, donde $b_{tj}' = rp^* x_{tj}^*$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Es claro que $d_t(\beta') = 0$ y $x_t(\beta') = x_t^*$ maximiza las preferencias en el conjunto presupuestario $B_t(rp^*)$. Notar que $x_t(\hat{\beta}) \in B_t(rp^*)$, pero esto no puede ser porque $\pi_t(x_t(\hat{\beta})) > \pi_t(x_t(\beta^*))$.

Por lo tanto, β^* es equilibrio de Nash de tipo-simétrico del juego Γ'. □

4.6. De Nash a Walras

El teorema 4.11 nos garantiza que siempre existe un equilibrio de Nash de tipo-simétrico, β^*, del juego modificado con agente externo, Γ', tal que el déficit de cada agente sea cero. En general, dado cualquier equilibrio de Nash de tipo-simétrico, β', también pueden ocurrir las siguientes dos situaciones:

1. Existe un tipo $i \in N$ tal que $d_t(\beta') = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{tj}' - \langle p(\beta'), w_t\rangle < 0$, $\forall t \in I_i$. Esto sólo puede ocurrir si $M_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{tj}' < \langle p(\beta'), w_t\rangle$, $\forall t \in I_i$, es decir, el banco perjudica a todos los agentes $t \in I_i$ al estar dispuesto a prestarles una cantidad menor al valor de sus dotaciones iniciales.

2. Existe un tipo $i \in N$ tal que $d_t(\beta') = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{tj}' - \langle p(\beta'), w_t\rangle > 0$, $\forall t \in I_i$. Esto sólo puede ocurrir si $M_i > \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{tj}' > \langle p(\beta'), w_t\rangle$, $\forall t \in I_i$, es decir, el banco beneficia a todos los agentes $t \in I_i$ al estar dispuesto a prestarles una cantidad mayor al valor de sus dotaciones iniciales.

Si suponemos que el dinero se conserva, entonces los casos anteriores son equivalentes, es decir, existe $i \in N$ tal que $d_t(\beta') < 0$, $\forall t \in I_i$, si y sólo si existe $m \in N$ tal que $d_t(\beta') > 0$, $\forall t \in I_m$. Si el déficit no es cero para algún agente $t \in I$, entonces el par $(x(\beta'), p(\beta'))$ no es equilibrio de Walras de la economía $\mathcal{E}_c$.

Proposición 4.12. *Sea β^* un equilibrio de Nash de tipo-simétrico del juego Γ' tal que $d_t(\beta^*) = 0$, $\forall t \in I$, y sea $\mathcal{E}_c$ la economía de intercambio puro. El par $(x(\beta^*), p(\beta^*))$ es equilibrio de Walras de la economía $\mathcal{E}_c$.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que $(x(\beta^*), p(\beta^*))$ no es equilibrio de Walras. Entonces existe un tipo de agente $i \in N$, un agente $t \in I_i$ y una canasta $x_t \in B_t(p(\beta^*))$ tal que $u_t(x_t) > u_t(x_t(\beta^*))$. Supongamos que x_t maximiza las preferencias del agente $t \in I_i$ en el conjunto presupuestario $B_t(p(\beta^*))$, entonces $\langle p(\beta^*), x_t \rangle = \langle p(\beta^*), w_t \rangle$. Sea $\hat{\beta} = (b_t, \beta^*_{-t})$, para alguna $b_t \in S(M_i)$ tal que $b_{tj} = p_j(\beta^*)x_{tj}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Como $d_t(\beta^*) = d_t(\hat{\beta}) = 0$, entonces $\pi_t(\hat{\beta}) > \pi_t(\beta^*)$, pero esto no es posible porque β^*_t maximiza los pagos en $S(M_i)$. Por lo tanto, $(x(\beta^*), p(\beta^*))$ es equilibrio de Walras de $\mathcal{E}_c$. □

Conclusión

Al considerar el espacio de sucesiones esencialmente acotadas, l_∞, como espacio de mercancías y suponiendo la existencia de un banco que presta cantidades no necesariamente iguales a los agentes, hemos demostrado la existencia de un equilibrio de Nash de tipo-simétrico del juego con agente externo planteado por Dubey y Geanakoplos [5].
Hemos extendido el juego planteado por Hervés-Beloso y Moreno-García [8] suponiendo que no existe agente externo, a partir de un equilibrio de Walras de la economía continua y encontraron un equilibrio de Nash de tipo-simétrico. Nosotros buscamos verificar el mismo resultado en nuestro juego original, pero el resultado no se puede garantizar siquiera para un número finito de mercancías. El agente externo perturba los precios y las asignaciones de tal manera que los puestos comerciales no se vacían en el sentido de Walras y, por lo tanto, no es posible asociarlo con un equilibrio de Walras de la economía con continuo de agentes. Hicimos una modificación del juego de Dubey y Geanakoplos [5], donde la influencia del agente externo se elimina. Garantizamos el resultado de Hervés-Beloso y Moreno-García [8] para el nuevo juego y extendimos el trabajo de tal forma que, a partir de un equilibrio de Walras de la economía con un continuo de agentes, pudimos encontrar un equilibrio de Nash de tipo-simétrico del juego, sin importar las cantidades máximas que el banco puede prestar. Finalmente, buscamos encontrar un equilibrio de Walras de la economía continua a partir del equilibrio de Nash del juego modificado con agente externo, pero para que esto sea posible es necesario garantizar que el déficit de todos los agentes es cero en el equilibrio. Si el déficit no necesariamente es cero en el equilibrio, entonces el banco debe garantizarlo de tal forma que el valor de las dotaciones iniciales coincidan con las cantidades que el banco está dispuesto a prestar. El problema del déficit queda abierto para futuros trabajos.

Referencias

[1] A. Araujo. Lack of pareto optimal allocations in economies with infinitely many commodities: The need for impatience. *Econometrica*, 53(2):455, mar 1985.

[2] Claude Berge. *Topological Spaces: including a treatment of multi-valued functions, vector spaces, and convexity.* Courier Corporation, 1997.

[3] Truman F Bewley. Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities. *Journal of Economic Theory*, 4(3):514–540, jun 1972.

[4] Gerard Debreu. *Theory of value: An axiomatic analysis of economic equilibrium*. Number 17. Yale University Press, 1959.

[5] Pradeep Dubey and John Geanakoplos. From nash to walras via shapley–shubik. *Journal of Mathematical Economics*, 39(5-6):391–400, jul 2003.

[6] Javier García-Cutrín and Carlos Hervés-Beloso. A discrete approach to continuum economies. *Economic Theory*, 3(3):577–583, sep 1993.

[7] A Hitchhiker's Guide. *Infinite dimensional analysis*. Springer, 2006.

[8] Carlos Hervés-Beloso and Emma Moreno-García. Market games and walrasian equilibria. submitted, may 2019.

[9] Walter Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1964.

[10] Lloyd Shapley and Martin Shubik. Trade using one commodity as a means of payment. *Journal of Political Economy*, 85(5):937–968, oct 1977.

[11] Albert Wilansky. *Topology for analysis*. Courier Corporation, 2008.

Gustavo de Jesús Benítez Meza: *gbenitezmeza@outlook.com*
Jaime Velasco Sánchez: *jaimeroma82@gmail.com*
Elvio Accinelli Gamba: *elvioaccinelli@hotmail.com*
Facultad de Economía, Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Av. de los Pintores s/n, Burócrátas de Estado, 78213 San Luis Potosí, S.L.P.