PERSPECTIVAS *Revista de Análisis de Economía, Comercio y Negocios Internacionales*
Volumen 13 / No. 2 / Julio - Diciembre 2019 / 21 -34
ISSN 2007-2104

Juegos de Mercado y Equilibrio General: Dubey-Geanakoplos en Dimensión Infinita

Jaime Velasco Sánchez*
Gustavo Benítez Meza†
Armando García Martínez‡
Facultad de Economía, Universidad Autónoma de San Luis Potosí§

Abstract

En una economía de intercambio puro consideramos el espacio de mercancías ℓ_∞ y contamos con un continuo de agentes. A través de representar dicha economía como un juego de mercado, encontramos un Equilibrio de Nash. Al agregar hipótesis de convergencia, obtenemos un Equilibrio de Walras a partir del Equilibrio de Nash.

Palabras clave: Economía de Intercambio Puro, Equilibrio de Nash, Equilibrio de Walras, Juegos de Mercado.
Clasificación JEL: D5, D11.
Clasificación AMS: 91B24, 91B26, 46.

1 Introducción

El Equilibrio de Walras ha sido estudiado desde los primeros trabajos de Debreu [5] y Arrow y Debreu [7], donde se estudió el Equilibrio General desde un punto de vista "competitivo". El enfoque de Edgeworth es representado, primeramente, en el resultado de Debreu y Scarf [12]. La equivalencia core-Walras fortalece el resultado de la convergencia para economías no atómicas y fue presentado por Aumann [2]. Sin embargo, en dichos trabajos, no se revisó ni se presentó un mecanismo explícito en la formación de precios.

Por lo anterior, surge la pregunta: ¿Cómo se generan los precios de equilibrio en una economía de intercambio puro?. Una de las formas de resolver esta cuestión es por medio de juegos de mercado. La ventaja de dicho enfoque es que se vuelve necesaria una explicación de la formación de las asignaciones y precios.Los primeros en dicha tradición de juegos de mercado son los presentados por Shubik [15], Shapley [13] y Shapley y Shubik [14]. De este último se hace una modificación para llegar al juego de Dubey y Geanakoplos [8], del cuál hacemos una generalización a dimensión infinita.

Por su parte, Hervés-Beloso y Moreno-García [10] han mostrado que existe una clara relación entre el Equilibrio de Walras de una economía de intercambio puro y el Equilibrio de Nash de

*jaimeroma82@gmail.com
†gbenitezmeza@outlook.com
‡gama.slp@gmail.com
§Av. Pintores s/n, Col. Burócratas del Estado, C.P. 78213, San Luis Potosí, S.L.P., México.

un juego de mercado de Dubey-Geanakoplos modificado. Los cambios estriban en la exclusión de la figura del agente externo, contar con una cantidad numerable de mercancías y un continuo de agentes. Con ello, pueden obtener el Equilibrio de Nash del juego a partir del Equilibrio de Walras de la economía asociada.

En el presente trabajo extendemos este resultado y le devolvemos al juego el agente externo. Nos enfocamos en encontrar el Equilibrio de Nash de Tipo Simétrico y, posteriormente, buscamos recuperar el Equilibrio de Walras dela economía de intercambio puro subyacente a través de una sucesión de juegos, haciendo tender a infinito la cantidad de dinero que presta el banco para los agentes. Esta técnica sigue aquella presentada en el ensayo original de Dubey y Geanakoplos. Bajo esta construcción podría no existir un Equilibrio de Walras en el límite, por lo que introducimos hipótesis adicionales que nos permiten garantizar su existencia. Esto se debe a las condiciones en la topología que fueron encontradas por Araujo [1] para la existencia del equilibrio competitivo en una economía de intercambio puro con espacio de mercancías ℓ_∞ y precios en su dual ℓ'_∞.

2 Preliminares

2.1 Economía de Intercambio y Equilibrio Walrasiano

Sea la economía de intercambio puro $\mathcal{E}$ como sigue

$$\mathcal{E} = \left(\ell_\infty^+, \succcurlyeq_i, w_i\right)_{i \in N}.$$

Cada consumidor $i \in N = \{1, \ldots, , n\}$ está caracterizado por su relación de preferencias $\succcurlyeq_i$ en ℓ_∞^+ y dotaciones iniciales $w_i \in \ell_\infty^+$. Para dicha economía, el sistema de precios es $p \in \ell'_\infty$.

Definición 1. Un **Equilibrio de Walras** es el par $((\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}), \hat{p}) \in (\ell_\infty^+)^n \times \ell'_\infty$ con $p \neq 0$ tal que

1. $\sum\limits_{i \in N} \hat{x}_i = \sum\limits_{i \in N} w_i$,
2. $\hat{x_i}$ maximiza $\succcurlyeq_i$ en $B_i(\hat{p}) = \left\{y \in l_\infty^+ : \hat{p} \cdot y \leq \hat{p} \cdot w_i\right\}$.

Bajo interioridad de las dotaciones iniciales (i.e. $\exists \epsilon > 0$ tal que $w_{i_j} > \epsilon$; $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall i \in N$), convexidad, monotonía y Mackey-continuidad de las preferencias, Araujo [1] mostró la existencia de Equilibrio de Walras para $\mathcal{E}$ con $p \in \ell_1 \leq \ell'_\infty$. Por lo tanto, nos gustaría encontrar, en una economía como la anteriormente descrita, precios que pertenezcan a ℓ_1 en tanto que así podríamos garantizar la existencia de Equilibrio de Walras.

Antes de continuar, aclaremos el pasaje anterior con las siguiente definición:

Definición 2. La **topología de Mackey**, μ, es la topología más fina en X que hace de X' el dual de X. En este caso, $\mu(\ell_\infty, \ell_1)$ es la que hace de ℓ_1 el dual de ℓ_∞.

Ahora, siguiendo el trabajo de García-Cutrín y Hervés-Beloso [9], consideramos la economía con un continuo de agentes, divididos en $N = \{1, \ldots, n\}$ tipos siendo N el conjunto de tipos

$$\mathcal{E}_c = \left(I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \ell_\infty^+, \succcurlyeq_t, w_t\right)_{t \in I},$$

donde el intervalo real $I = (0, n]$ con la medida de Lebesgue μ, es el intervalo de agentes. Cada $t \in I_i = (i-1, i]$ es caracterizado por sus dotaciones iniciales $w_t = w_i$ y sus preferencias $\succcurlyeq_t = \succcurlyeq_i$. Dichas preferencias se suponen representadas por una función de utilidad u_i cóncava, continua y estrictamente monótona para cada $t \in I_i$. Con los supuestos anteriores, el Equilibrio de Walras $(\hat{x}, \hat{p})$ de $\mathcal{E}$, con $\hat{p} \in \ell_1$, define un Equilibrio de Walras (x^*, p^*) en $\mathcal{E}_c$ con $p^* = \hat{p}$ y $x^*(t) = \hat{x}_i$ si $t \in I_i$.

Dos aclaraciones se vuelven pertinentes antes de continuar con el siguiente epígrafe: La primera es la diferencia entre bienes y mercancías. Tal como lo indica Debreu en su famoso libro Teoría del Valor [6], un bien es aquello que se puede intercambiar en la economía, en tanto que una mercancía es un bien con características muy particulares, llámese situación temporal, circunstancias, situación geográfica y demás.

El otro punto importante por aclarar es qué sentido tiene tomar a ℓ_∞^+ como espacio de mercancías: Podemos tomar una cantidad finita de bienes, r, en un horizonte de tiempo infinito. Los individuos toman decisiones acerca del consumo de dichos bienes a lo largo de su vida, lo que vuelve a los elementos $x \in \ell_\infty^+$ planes de consumo en un horizonte de tiempo infinito. En este sentido, las circunstancias de algún bien cambian en tanto varía el tiempo en el cuál es considerado, por lo tanto, se vuelven infinitas las mercancías que integran los planes de consumo. Podemos considerar a los planes de consumo de la siguiente manera:

$$x_i = (\underbrace{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}}_{t=1}, \underbrace{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}}_{t=2}, \ldots).$$

Buscar que dichas asignaciones pertenezcan a ℓ_∞^+ y no a otro espacio de dimensión infinita es que la sucesión debe estar esencialmente acotada por un elemento de dotaciones iniciales totales de la economía en cuestión. Es decir, cualquier asignación $x_i \in \ell_\infty^+$ debe ser menor o igual a $w \in \ell_\infty^+$, $x_i \leq w$; $\forall i \in N$, pues ningún agente puede consumir más de lo que se encuentra disponible inicialmente en una economía de intercambio.

2.2 Definiendo el Juego

En esta sección estableceremos los componentes de nuestra variante del juego propuesto por Dubey y Geanakoplos [8]. Los jugadores involucrados son el banco, encargado de prestar una cantidad de dinero M a los consumidores; un agente externo, cuya función es "disparar" el comercio ofreciendo una cantidad positiva de dinero en los puestos de comercio; los consumidores, quienes ofrecerán una suma de dinero para obtener uno o más bienes de cada puesto de comercio. Hay un continuo de consumidores $\overline{N} = (0, n]$ con n tipos, y los agentes del tipo $i \in N$ pertenecen al intervalo $I_i = (i-1, i]$, $i \in N$. Es claro que el conjuntos de todos los intervalos I_i es una partición de $\overline{N}$.

La dinámica del juego es la siguiente: los consumidores piden prestado al banco una cantidad de dinero M y dejan en cada puesto de comercio j sus dotaciones iniciales para su venta "en consigna", así como el dinero de su oferta por dicho bien. A través de un mecanismo de formación de precios y otro de asignaciones, el mercado reparte, dejándole al agente externo el sobrante de mercancías en caso de ser positivo. Al finalizar el reparto, los consumidores pagan sus adeudos con el banco con los recursos recaudados de las ventas. Si no alcanza a liquidar dicha deuda el consumidor, será penalizado en el pago que recibe.

Veamos ahora el resto de los componentes del juego a detalle. La dotación inicial de cada agente $t \in I_i$ es $w_t = w_i$ y su función de utilidad es $u_t = u_i$, ambas son funciones Lebesgue medibles. Acerca de las dotaciones iniciales, supondremos que son puntos interiores de ℓ_∞^+ (i.e.

$\exists\epsilon > 0$ tal que $w_{i_j} > \epsilon$; $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall i \in N$. El banco distribuye una cantidad máxima M de unidades monetarias en préstamo a todos los individuos del conjunto I_i, lo cual determina su conjunto de estrategias. El conjunto de estrategias para cada $t \in I_i$ con la cantidad de dinero M es

$$S(M) = \left\{ b_t \in l_1^+ : \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{t_j} \leq M \right\}. \tag{3}$$

Supongamos que los perfiles de estrategia $b = \{b_t\}_{t\in\bar{N}}$ es una función Lebesgue medible. Por otro lado, lo que está disponible para la venta en el puesto j de la mercancía j es

$$\int_{\overline{N}} w_{i_j} dt = \sum_{i\in N} w_{i_j} = \overline{w}_j,$$

adoptando esta notación como usual para cualquier función Lebesgue integrable, es decir

$$\int_{\overline{N}} f_{i_j} dt = \sum_{i\in N} f_{i_j} = \overline{f}_j.$$

Como se dijo, el agente externo ofrece una cantidad finita de dinero en cada puesto de comercio. Es natural que se tome $c \in \ell_1^+$, con $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}}$, como oferta del agente externo. Lo anterior hace que dicho agente distribuya una cantidad finita total sobre todos los puestos de comercio. Con lo dicho, podemos proponer el mecanismo de formación de precios. La regla es la siguiente:

$$p_j(b) = \frac{\overline{b}_j + c_j}{\overline{w}_j}. \tag{4}$$

Observemos que dicho sistema de precios pertenece a ℓ_1. Debido a que $w_{i_j} > \epsilon\ \forall j \in \mathbb{N}$, $\forall i \in N$, existe $a > 0$ tal que $\sum_{i\in N} w_{i_j} > a$, y usando el Teorema de Convergencia Monótona de Lebesgue, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(\beta) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\overline{b}_j + c_j}{\overline{w}_j} < \frac{1}{a} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\overline{b}_j + c_j\right) \\ &\leq \frac{1}{a} \int_I \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{t_j} d\mu(t) + \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j \leq \frac{M + \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j}{a}. \end{aligned}$$

Con la regla de formación de precios establecida, la forma en que se asignan las canastas de consumo es bastante natural:

$$x_{t_j} = \frac{b_{t_j}}{p_j(b)}. \tag{5}$$

Habiendo establecido ya precios y asignaciones, es necesario determinar la manera en que se penalizará a los agentes en caso de caer en impago de sus deudas. Restaremos del total de ofertas que presenta el agente en cada puesto, el ingreso por ventas que recibe el agente. Si la cantidad es positiva, el agente presenta un déficit neto de la siguiente manera:

$$d_t \equiv d_t\big(p(b), b_t\big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{t_j} - \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b) \cdot w_{t_j}.$$

Finalmente, definimos la función de pagos del juego para cada agente t:

$$\begin{aligned}\Pi_t(b) &= u_t(x_t) - d_t^+ \\ \Pi_t(b) &= u_t(x_t) - \max\{0, d_t\} \\ &= u_t(x_t) - \max\left\{0, \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(b_{t_j} - p_j \cdot w_{t_j}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{6}$$

Los puestos de comercio, al recibir todas las mercancías existentes para venta en consigna, así como todos los ofrecimientos de los consumidores, se encargan de redistribuir todo aquello que reciben, tanto mercancías como dinero. El agente externo podría recibir mercancías a cambio. Ambos hechos se reflejan en las siguientes condiciones, en donde la primera de ellas refleja el valor total de la economía:

$$\begin{gathered}\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j + \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{b}_j = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot\overline{w}_j = \sum_{i\in N}\sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot w_{i_j}, \\ \sum_{i\in N} \overline{x}_{i_j} \leq \overline{w}_j;\ \forall j\in\mathbb{N},\end{gathered} \tag{7}$$

para cualquier $b : (0,n] \to S(M)$. Lo anterior se sigue, usando (4) y (5), de:

$$\begin{aligned}\overline{w}_j \cdot p_j(b) = \overline{b}_j + c_j \Rightarrow \overline{w}_j &= \frac{\overline{b}_j + c_j}{p_j(b)} = \frac{\int_{\overline{N}} b_{t_j} dt + c_j}{p_j(b)} \\ = \int_{\overline{N}} x_{t_j} dt + \frac{c_j}{p_j(b)} &= \overline{x}_j + \frac{c_j}{p_j(b)} = \sum_{i\in N}\overline{x}_{i_j} + \sum_{i\in N}\frac{c_j}{p_j(b)} \\ &\geq \sum_{i\in N}\overline{x}_{i_j}.\end{aligned}$$

El juego anteriormente definido será llamado de ahora en adelante $\Gamma(M)$.

2.3 Equilibrio de Nash

Definición 8. Una elección $b^* : (0,n] \to S(M)$ es un **Equilibrio de Nash** si para casi toda $t \in (0,n]$

$$b_t^* \in \underset{\beta\in S(M)}{\operatorname{argmax}}\, \Pi_t(b_{-t}^*, \beta)$$

Es necesario notar que la notación (b_{-t}^*, β) indica que las estrategias de todos los consumidores que no son t permanecen fijas en b^*, en tanto la del agente t es β. Para el caso en donde tenemos tipos de agentes, usaremos la siguiente definición.

Definición 9. Una estrategia es de **tipo simétrico** si, para cada $i \in N$, $b_t = b_i;\ \forall t \in I_i$.

Por la definición 9, si queremos un equilibrio de Nash de tipo simétrico, requerimos que el banco distribuya uniformemente las unidades monetarias destinadas al tipo i tal que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{I_i} b_{t_j} dt \leq M.$$

3 Resultados

3.1 Existencia de Equilibrio de Nash de Tipo Simétrico

El conjunto de mejores estrategias para los consumidores $t \in I_i$, es decir, para el conjunto de consumidores del tipo i, es

$$\begin{aligned}\varphi_t(b) &= \underset{\beta \in S(M)}{\operatorname{argmax}}\, \Pi_t(b_{-t}, \beta)\\ &= \underset{\beta \in S(M)}{\operatorname{argmax}} \left\{ u_i \left(\left(\frac{b_{i_j}}{p_j(b)} \right)_{j \in \mathbb{N}} \right) - \max \left\{ 0, \sum_{j \in \mathbb{N}} (b_{i_j} - p_j(b) \cdot e_{i_j}) \right\} \right\}.\end{aligned}$$

Lo anterior debido a que $p_j(b_{-t}, \beta) = p_j(b)$. Ya que $\varphi_t(b)$ es la misma $\forall t \in I_i$, le llamaremos de ahora en adelante $\varphi_i(b)$. Ahora analizaremos algunas propiedades de $x_t(p(b), \beta)$, $d_t(p(b), \beta)$, Π_t y φ_i. Es fácil ver que las asignaciones $x_t(p(b), \beta)$ y los déficits $d_t(p(b), \beta)$ son lineales[1] en β y que la función de pagos Π_t es cóncava en β. Usando ambos hechos, se puede demostrar que la correspondencia $\varphi_i(b)$ es convexa.

Para probar la siguiente afirmación, recordemos los siguientes resultados:

Teorema 10 (Tychonnof, 1930 [16]). *El producto de espacios compactos es compacto.*

Teorema 11 ([11]). *Los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos son compactos.*

Veamos que el conjunto de estrategias $S(M)$ es compacto bajo la topología producto: primero tenemos que notar que los elementos de dicho conjunto en realidad pertenecen a ℓ_1, que es el espacio de sucesiones absolutamente sumables. Lo anterior debido a que la suma de las ofertas en cada puesto por parte del jugador debe alcanzar una cantidad menor o igual a M. Por contradicción, supóngase que $b \in \overline{S(M)}$, con $\overline{S(M)}$ siendo la adherencia de $S(M)$, y que $b \notin S(M)$. Por lo anterior, $\exists k = k(b)$ tal que $\sum_{j=1}^{k} b_j > M + \epsilon$. Sea un entorno de b como sigue:

$$U = \left[\prod_{j=1}^{k} \left(b_j - \frac{\epsilon}{2k}, b_j + \frac{\epsilon}{2k} \right) \right] \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

y se tiene que $U \cap S(M) = \emptyset$. Lo anterior contradice que $b \in \overline{S(M)}$ y prueba que $S(M)$ es cerrado bajo la topología producto. Usando el teorema 11, se tiene que $S(M)$ es compacto.

Otros resultados que nos ayudarán a encontrar un Equilibrio de Nash de tipo simétrico para el juego $\Gamma(M)$ son[2]:

Teorema 12 (Berge, 1963 [3]). *Sean X y Y espacios topológicos, y sean*

$$\begin{aligned}&f : X \times Y \to \mathbb{R} \text{ una función continua,}\\ &F : X \twoheadrightarrow Y \text{ u.s.c. y l.s.c.}^3 F(x) \text{ compacto en } Y.\end{aligned}$$

Entonces

1. $\xi : x \in X \mapsto \xi(x) = \max\{f(x, y) : y \in F(x)\}$ *es continua,*

[1] Lineales en el sentido de que $x_t = a\beta + c$, $d_t = a\beta + c$.

[2] La abreviación u.s.c. hace referencia a upper semi-continuous y, a su vez, l.s.c. a lower semi continuous.

2. $\Xi : x \in X \twoheadrightarrow \Xi(x) = \{y \in F(x) : f(x,y) = \xi(x)\} \subset Y$ *es u.s.c y toma valores compactos.*

Teorema 13 (Kakutani-Fan-Glicksberg [4]). *Sea k un subconjunto convexo, no-vacío y compacto de un espacio de Hausdorff localmente convexo, y sea la correspondencia $\nu : k \twoheadrightarrow k$ con grafo cerrado y valores convexos no-vacíos. Entonces el conjunto de puntos fijos de ν es compacto y no-vacío.*

Aplicamos el teorema 12 a cada tipo i, con $X = (S(M))^n$, $Y = S(M)$, $\Pi_i = f$ y una correspondencia constante $E : (S(M))^n \twoheadrightarrow S(M)$ que toma el lugar de F. Podemos obtener las dos siguientes correspondencias:

$$\begin{aligned} \Psi : b \in (S(M))^n \mapsto \Psi(b) &= \max_{\beta \in S(M)} \{\Pi_i(b_{-i}, \beta)\}, \\ \varphi_i = b \in (S(M))^n \twoheadrightarrow \varphi_i(b) &= \operatorname*{argmax}_{\beta \in S(M)} \{\Pi_i(b_{-i}, \beta)\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Habiendo probado que la correspondencia (14) es convexa, definimos la siguiente correspondencia:

$$\Phi = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i : (S(M))^n \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^{n} S(M) = (S(M))^n, \tag{15}$$

que es u.s.c. cerrada y convexa. Lo anterior debido a que cada φ_i lo es.

Aplicando el teorema 13 a la correspondencia (15), tenemos que existe $\beta^* \in \Phi(\beta^*)$, es decir, $\Phi(\beta^*) = \beta^*$. Entonces

$$\Pi_i(\beta^*, \beta^*_{-i}) \geq \Pi_i(z, \beta^*_{-i});\ \forall z \in S(M),\ \forall i \in N.$$

Lo anterior demuestra que existe el Equilibrio de Nash de tipo simétrico para el juego $\Gamma(M)$.

3.2 De Equilibrio de Nash a Equilibrio de Walras

Para cada entero $M \geq 1$, sean $b^*_M = \left(b^{i^*}_M\right)_{i \in N} \in (\ell_1)^n$ equilibrios de Nash de tipo simétrico en $\Gamma(M)$ con precios $p_M \in \ell^{'}_\infty$ y resultados de equilibrio del juego $(x^i_M, d^i_M)_{i \in N}$.

La sucesión x^i_M es uniformemente acotada, esto debido a que $\sum_{i \in N} x^i_M \leq \overline{w}$, y en particular cada sumando también lo cumple, es decir, $x^i_M \leq \overline{w}$.

Ya que u_i es monótona para todo $i \in N$, entonces

$$\begin{aligned} u_i(\overline{w}) &\geq u_i\left(x^i_M\right) \\ u_i(\overline{w}) - \max\{0, d^i_M\} &\geq u_i\left(x^i_M\right) - \max\{0, d^i_M\} = \Pi_i(b^*). \end{aligned}$$

Veamos que $\Pi_i(b^*)$ está acotada también por debajo. Por contradicción, supóngase que $\exists i \in N$ tal que

$$\begin{aligned} u_i\left(x^i_M\right) - \max\{0, d^i_M\} &< u_i(0) - 0 \\ &\Rightarrow \Pi_i(b^*) < \Pi_i(0, b^{-i^*}), \end{aligned}$$

lo anterior contradice que b^{i^*} sea una estrategia de equilibrio para el tipo i. Por lo tanto,

$$u_i(\overline{w}) - d^{i+}_M \geq \Pi_i(b^*) \geq u_i(0). \tag{16}$$

A partir de la desigualdad (16) tenemos que

$$u_i(\overline{w}) - u_i(0) \geq d_M^{i+},$$

lo cual hace que d_M^{i+} sea uniformemente acotado por arriba $\forall M \in \mathbb{N}$. Para demostrar que d_M^i es acotado por abajo, sean

$$\begin{aligned} \delta(M) &= \{i \in N : d_M^i > 0\} \\ \sigma(M) &= \{i \in N : d_M^i < 0\} \\ \Rightarrow \sum_{i \in N} d_M^i &= \sum_{i \in \delta(M)} d_M^i + \sum_{i \in \sigma(M)} d_M^i. \end{aligned}$$

Sabemos por (7) que el dinero es conservado en los puestos de comercio. Usando dicha ecuación, esta suma puede re-expresarse como

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j - \sum_{i \in \sigma(M)} (-d_M^i) + \sum_{i \in \delta(M)} d_M^{i+} &= \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j \\ + \sum_{i \in \sigma(M)} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_{i_j} - \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j \cdot w_{i_j} \right) &+ \sum_{i \in \delta(M)} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_{i_j} - \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j \cdot w_{i_j} \right) \\ = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j + \sum_{i \in N} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_{i_j} - \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j \cdot w_{i_j} \right) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j + \sum_{i \in N} d_M^i \\ \Rightarrow \sum_{i \in \sigma(M)} (-d_M^i) = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j + \sum_{i \in \delta(M)} d_M^{i+} &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j + u_i(\overline{w}) - u_i(0). \end{aligned} \tag{17}$$

Por lo anterior, $-d_M^i$ es uniformemente acotada por arriba y d_M^i es uniformemente acotada.

A continuación, recordemos el siguiente teorema de Tychonoff. A partir de esto, veamos que $(x_M^i)_{M \in \mathbb{N}}$, $(d_M^i)_{M \in \mathbb{N}}$ y $\left(\frac{p_M}{\|p_M\|_1}\right)_{M \in \mathbb{N}}$ tienen, cada una de ellas, subsucesiones convergentes.

Teorema 18 (Tychonoff, 1930 [16].)**.** *Un producto numerable de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto.*

Usando el teorema anterior, notamos que las sucesiones $(x_M^i)_{M \in \mathbb{N}}$, $(d_M^i)_{M \in \mathbb{N}}$ y $\left(\frac{p_M}{\|p_M\|_1}\right)_{M \in \mathbb{N}}$ tienen, cada una, una subsucesión convergente. Para ello, usamos un método de diagonalización basado en el método de Wilansky [16], el cual nos permitirá garantizar que dichas subsucesiones convergen a la misma velocidad entre sí.

Lamentablemente, al aplicar el mismo método, no podemos garantizar que p, el límite de $\left(\frac{p_M}{\|p_M\|_1}\right)_{M \in \mathbb{N}}$, pertenezca a ℓ_1 sino a ℓ_∞. Otro problema importante al cuál nos enfroentaremos a continuación es que la convergencia puntual heredada de usar la topología producto no es suficiente para poder garantizar que los limites x_i y p de las sucesiones $\left(x_{M_k}^i\right)_{k \in \mathbb{N}}$ y $\left(\frac{p_{M_k}}{\left\|p_{M_k}\right\|_1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$, respectivamente, sean en conjunto un Equilibrio de Walras. Al menos, bajo esta construcción del juego.

Si suponemos que, en efecto, $p \in \ell_1$, aún tendremos que hacer dos supuestos importantes para alcanzar nuestro objetivo: El primero, (S.1), es requerir que la sucesión $\left(x_{M_k}^i\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converja en la topología de la norma de ℓ_∞. El segundo, (S.2), es pedir que la sucesión $\left(\frac{p_{M_k}}{\left\|p_{M_k}\right\|_1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$

converja en la topología de la norma de ℓ_1. Ambas nos concederán la convergencia uniforme que necesitaremos unas cuantas líneas después. Sin embargo, por el resultado de Araujo [1], los últimos dos supuestos nos imposibilitarían garantizar la obtención del Equilibrio de Walras en el límite, pues necesitaríamos tener la topología de Mackey, $\mu\left(\ell_\infty, \ell_1\right)$, para que dicho equilibrio esté garantizado.

Si quisiéramos continuar con la construcción, haciendo los tres supuestos anteriores, podemos mostrar que si $(x,p) \in (\ell_\infty)^n \times \ell_1$, este es un Equilibrio de Walras. Primero, observemos que $\sigma(M) \neq \emptyset$. Por contradicción, supóngase que para alguna $M = M_0$ tenemos que $\sigma(M_0) = \emptyset$. Por (17) tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j - \sum_{i\in\sigma(M_0)} d^i_{M_0} + \sum_{i\in\delta(M_0)} d^{i^+}_{M_0} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j - (0) + \sum_{i\in\delta(M_0)} d^{i^+}_{M_0} = 0\\ &\Rightarrow \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j = -\sum_{i\in\delta(M_0)} d^{i^+}_{M_0}.\end{aligned}$$

Lo anterior contradice que el déficit de los agentes en $\delta(M_0)$ sea positivo, y queda mostrado que $\sigma(M) \neq \emptyset$; $\forall M \in \mathbb{N}$. Ahora, para los tipos i que se encuentran en el conjunto $\sigma(M)$, demostraremos que gastan exactamente M unidades monetarias. Por contradicción, supongamos que $\exists i \in \sigma(M)$ tal que $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j} < M$, entonces

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j} - \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot w_{i_j} < 0\\ &\Rightarrow \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j} < \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot w_{i_j}.\end{aligned}$$

Sean $x = \min\{\sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot w_{i_j}, M\} - \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j}$ y $\beta_{i_j} = \frac{c_j}{\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j} x + b_{i_j}$. Notar que $\sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{i_j} \leq M$. Si el mínimo es M, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{i_j} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{c_j}{\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j} x + b_{i_j}\right) = x + \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j}\\ &= M - \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j} + \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j} = M.\end{aligned}$$

Por otro lado, si el mínimo fuese $\sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot w_{i_j}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{i_j} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{c_j}{\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j} x + b_{i_j}\right) = x + \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j}\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot w_{i_j} - \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j} + \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j}\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot w_{i_j} \leq M.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\beta_i \in S(M)$. Con lo anterior, notemos que

- Si el mínimo es M,

$$d_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{i_j} - \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot w_{i_j} = M - \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot w_{i_j} \leq 0.$$

- Si el mínimo es $\sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(b)\cdot w_{i_j}$,

$$d_i=\sum_{j\in\mathbb{N}}\beta_{i_j}-\sum_{j\in\mathbb{N}}p_j(b)\cdot w_{i_j}=\sum_{j\in\mathbb{N}}p_j(b)\cdot w_{i_j}-\sum_{j\in\mathbb{N}}p_j(b)\cdot w_{i_j}=0.$$

De lo anterior

$$\begin{aligned}\Pi_i(b_i,\beta_i)&=u_i\left(\left(\frac{\beta_{i_j}}{p_j(b)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\right)-d_i^+\\&=u_i\left(\left(\frac{\beta_{i_j}}{p_j(b)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\right)-0=u_i\left(\left(\frac{c_jx+b_{i_j}}{p_j(b)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\right),\end{aligned}$$

y como u_i es estrictamente monótona

$$\begin{aligned}u_i\left(\left(\frac{c_jx+b_{i_j}}{p_j(b)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\right)&>u_i\left(\left(\frac{b_{i_j}}{p_j(b)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\right);\ \forall t\in I_i\\ \Rightarrow \Pi_i(b_{-t},\beta_t)&>\Pi_i(b^*).\end{aligned}$$

Esto contradice que $b^*=(b_{-t},b_t)$ es un Equilibrio de Nash de tipo simétrico para todo $t\in I_i$, con lo que concluimos que $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} b_{i_j}=M;\ \forall t\in I_i$.

Como el individuo del tipo i tiene superávit, entonces

$$\begin{aligned}M-\sum_{j\in\mathbb{N}}p_j(b)\cdot w_{t_j}&=\sum_{j\in\mathbb{N}}b_{t_j}-\sum_{j\in\mathbb{N}}p_j(b)\cdot w_{t_j}<0\\ \Rightarrow M&<\sum_{j\in\mathbb{N}}p_j(b)\cdot w_{t_j}=p_M\cdot w_t.\end{aligned}$$

Por la Desigualdad de Hölder, $M<\|p_M\|_1\cdot\|w_t\|_\infty$. Por lo tanto, si $M\to\infty$ entonces $\|p_M\|_1\to\infty$.

Como d_M^i es uniformemente acotada, i.e. $\exists k\in\mathbb{R}$ tal que $|d_M^i|<k;\ \forall M\in\mathbb{N}$, entonces

$$\frac{|d_M^i|}{\|p_M\|_1}\le\frac{k}{\|p_M\|_1}\to 0,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{d_M^i}{\|p_M\|_1}&=\frac{\sum_{j\in\mathbb{N}}b_{i_j}-\sum_{j\in\mathbb{N}}p_j(b)\cdot w_{i_j}}{\|p_M\|_1}=\frac{\sum_{j\in\mathbb{N}}p_{j_M}\cdot x_{j_M}^i-\sum_{j\in\mathbb{N}}p_j(b)\cdot w_{i_j}}{\|p_M\|_1}\\&=\frac{\sum_{j\in\mathbb{N}}p_{j_M}\cdot\left(x_{j_M}^i-w_{i_j}\right)}{\|p_M\|_1}=\frac{\langle p_M,(x_M^i-w_i)\rangle}{\|p_M\|_1}\le\frac{k}{\|p_M\|_1}\to 0.\end{aligned}$$

Recordemos que $x_i\in\ell_\infty$ es el límite de la subsucesión $\left(x_{M_k}^i\right)_{k\in\mathbb{N}}$ y, si el límite de la subsucesión $(p_{M_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es $p\in\ell_1$:

$$\left\langle\frac{p_{M_k}}{\|p_{M_k}\|_1},\left(x_{M_k}^i-w_i\right)\right\rangle\to 0,$$

por lo cual $\langle p,(x_i-w_i)\rangle=0;\ \forall i\in N$.

No olvidemos que en la definición 1 de Economía de Araujo, tenemos que el primer punto, $\sum_{i \in N} \hat{x}_i = \sum_{i \in N} w_i$, está dado por (7), es decir, contamos con el hecho de que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Falta demostrar el segundo inciso de la definición, i.e. si $z \in B_i(p)$ entonces $u_i(z) \leq u_i(x_i)$. Para ello necesitaremos la convergencia uniforme garantizada por los supuestos (S.1) y (S.2). Tómese $\lambda \in (0,1)$ con $w \gg 0$ y $\langle p, x_i \rangle = \langle p, w_i \rangle > 0$, tenemos

$$\langle p, \lambda z \rangle \leq \lambda \langle p, w_i \rangle = \lambda \langle p, x_i \rangle < \langle p, x_i \rangle,$$

y para una M suficientemente grande

$$\left\langle \frac{p_{M_k}}{\|p_{M_k}\|_1}, \lambda z \right\rangle \leq \left\langle \frac{p_{M_k}}{\|p_{M_k}\|_1}, x^i_{M_k} \right\rangle,$$

entonces

$$\langle p_{M_k}, \lambda z \rangle < \left\langle p_{M_k}, x^i_{M_k} \right\rangle \leq M.$$

Lo anterior debido a que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} b_{i_j} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(p_{j_{M_k}} \cdot x^i_{j_M} \right) = \left\langle p_M, x^i_M \right\rangle \leq M.$$

Sea $\gamma_{i_{j_M}} = p_{j_M} \cdot \lambda z^i_{j_M}$ para $j \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma_{i_{j_M}} \leq M$, por lo tanto, $\gamma_{i_M} \in S(M)$ y

$$\max \left\{ 0, \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma_{i_{j_M}} - \langle p_{M_k}, w_i \rangle \right\} \leq \max \left\{ 0, p_{M_k} \cdot x^i_{M_k} - \langle p_{M_k}, w_i \rangle \right\}. \tag{19}$$

Como b_{i_M} es equilibrio, $\Pi_i \left(b_{i_M} \right) \geq \Pi_i \left(\gamma_i(\mu) \right); \ \forall i \in N$. Por lo anterior y por (19)

$$\begin{aligned} & u_i \left(x^i_{M_k} \right) \geq u_i(\lambda z) \\ & \Rightarrow u_i(x_i) \geq u_i(\lambda z); \ \forall \lambda \in (0,1) \Rightarrow u_i(x_i) \geq u_i(z). \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra el segundo inciso de la definición 1 y tenemos que $(x, p) \in (\ell_\infty)^n \times \ell_1$ es un Equilibrio de Walras.

4 Conclusiones

A lo largo del presente trabajo hemos mostrado la existencia de Equilibrio de Nash de Tipo Simétrico para dicho $\Gamma(M)$. Al utilizar la técnica presentada para buscar el Equilibrio de Walras a partir de un Equilibrio de Nash del juego de mercado de Dubey-Geanakoplos en dimensión infinita, surgen algunas complicaciones.

Para poder garantizar la existencia del Equilibrio de Nash de Tipo Simétrico para el juego $\Gamma(M)$ hemos compactificado, a través del Teorema de Tychonoff, el conjunto de estrategias $S(M)$. Ello, junto con el Teorema del Máximo de Berge, nos han permitido llevar el juego a las condiciones del Teorema de Punto Fijo de Kakutani, con lo cual hemos dado por terminada la prueba.

Uno de los costos asociados al resultado de existencia es el haber heredado la topología producto a través del uso del teorema 10. Ello generó que no pudiéramos usar un argumento de convergencia uniforme como hubiésemos querido para poder demostrar la existencia del Equilibrio de Walras en el límite de una sucesión de juegos, haciendo tender a infinito el dinero prestado por el banco a las diferentes clases de tipos de agentes. A pesar de dicho contratiempo, hemos continuado con la prueba asumiendo que gozamos con la topología de la norma de ℓ_1 y ℓ_∞ y, efectivamente, hemos garantizado la existencia del Equilibrio de Walras en el límite.

Otro tropiezo que nos encontramos a lo largo del camino fue no poder garantizar que el límite de la sucesión de precios pertenezca a ℓ_1. Lo anterior tiene su causa en que, bajo la construcción usada, sólo podemos acotar uniformemente a los precios normalizados.

Ambos hechos obstaculizaron nuestro andar hacia encontrar un Equilibrio de Walras en el límite. Esto se debe a que Araujo mostró que, al tener una topología más fuerte que $\mu(\ell_\infty, \ell_1)$, podría fallar la existencia de asignaciones individualmente racionales que sean Pareto óptimas en economías bien comportadas. Otra de las razones es que dicho equilibrio exige la existencia de un funcional de precios diferente de cero que pertenezca a ℓ_1.

En este sentido, se vuelven pertinentes investigaciones futuras acerca de la relajación de los supuestos adicionales que hemos asumido. En general, el problema a resolver en futuros trabajos será replantear a construcción realizada en el presente escrito para llevarlo a las condiciones suficientes que garanticen la existencia del Equilibrio de Walras en el límite, y que esta vaya acorde a la construcción de existencia del Equilibrio de Nash del juego de Dubey-Geanakoplos en dimensión infinita.

References

[1] Araujo, A. Lack of pareto optimal allocations in economies with infinitely many commodities: the need for impatience. *Econometrica: Journal of the Econometric Society 53*, 2 (Marzo 1985), 455–461.

[2] Aumann, R. J. Markets with a continuum of traders. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1963), 39–50.

[3] Berge, C. *Topological Spaces: including a treatment of multi-valued functions, vector spaces, and convexity.* Courier Corporation, 1997.

[4] Border, C. D. A. . K. C. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, 2a ed. Springer, 1999.

[5] Debreu, G. A social equilibrium existence theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences 38*, 10 (1952), 886–893.

[6] Debreu, G. *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium.* No. 17. Yale University Press, 1959.

[7] Debreu, K. J. A. . G. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1954), 265–290.

[8] Geanakoplos, P. D. . J. From nash to walras via shapley-shubik. *Journal of Mathematical Economics*, 39 (2003), 391–400.

[9] Hervés-Beloso, J. G.-C. . C. A discrete approach to continuum economies. *Economic Theory 3* (1993), 577–583.

[10] MORENO-GARCÍA, C. H.-B. . E. Market games and walrasian equilibria. Por publicarse en Journal of Dynamics and Games, Mayo 2019.

[11] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 1980.

[12] SCARF, G. D. . H. A limit theorem on the core of an economy. *International Economic Review 4*, 3 (1963), 235–246.

[13] SHAPLEY, L. S. *Theory and Measurement of Economic Externalities*. No. 11. Academic Press, 1976, ch. Noncooperative General Exchange, pp. 155–178.

[14] SHUBIK, L. S. S. . M. Trade using one commodity as a means of payment. *Journal of Political Economy 85*, 5 (1977), 937–968.

[15] SHUBIK, M. Commodity money, oligopoly, credit and bankruptcy in a general equilibrium model. *Economic Inquiry 11*, 1 (1973), 24–38.

[16] WILANSKY, A. *Topology For Analysis*. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., 1970.