

Una demostración elemental de la existencia de equilibrios de Nash para juegos de dos personas con dos estrategias

Autores: Emilio Padrón Molina, Dr. Guillermo Romero-Meléndez, Dra. Milagros Zeballos Rebaza
Contacto: emilio.padronma@udlap.mx, guillermo.romero@udlap.mx, milagros.zeballos@udlap.mx

30 de noviembre de 2018

Resumen

La teoría de juegos en la economía estudia las estrategias y opciones de los participantes dentro de un juego, por lo que en esta obra se postula un método basado en la geometría para hallar equilibrios de Nash en cualquier tipo de juego que involucre dos jugadores y dos opciones o respuestas, sin importar la simetría que tenga. A diferencia de otros métodos, este describe los equilibrios de Nash y prueba que en este tipo de juegos siempre existirá al menos un equilibrio. Adicionalmente, analizando los juegos simétricos por este método, se demuestra que existe al menos un equilibrio de Nash simétrico y determina el conjunto de ellos.

Keywords: equilibrio de Nash, simetría, juegos, optimización.

Introducción y Marco Teórico

En la teoría de juegos, un *equilibrio* se refiere a un conjunto de planes de acción para cada jugador tal que ninguno de ellos quiera cambiar su jugada dadas las estrategias de los otros participantes. Cada jugador puede mezclar sus estrategias por medio de la asignación de pesos probabilísticos de manera que la suma de todos sea igual a 1. Para las estrategias mixtas, un *equilibrio de Nash* es aquel en donde la mezcla probabilística de un cierto jugador es la mejor respuesta a la mezcla probabilística de los otros. Otra manera de definir este tipo de equilibrio es mediante los valores de juego de todos los jugadores; para cada involucrado, su valor de juego se define como la utilidad esperada que este tiene dadas las estrategias de todos los participantes.

En este artículo, se analizará el caso en particular de un juego con dos jugadores los cuales tienen únicamente dos opciones, y se utilizará la notación del artículo *A Program for Finding Nash Equilibria* (Dickhaut & Kaplan, 1993) para definir todos los conceptos previamente mencionados. De manera gráfica este juego se puede representar de la siguiente manera:

		B	
		b ₁	b ₂
A	a ₁	(x ₁₁ , y ₁₁)	(x ₁₂ , y ₁₂)
	a ₂	(x ₂₁ , y ₂₁)	(x ₂₂ , y ₂₂)

Figura 1: Juego de dos jugadores con dos opciones.

En esta figura las x representan las utilidades del jugador A y las y las del jugador B dadas las elecciones de ambos jugadores.

Además, se definen los pesos probabilísticos de la siguiente manera para el jugador A:

$$M_A = \{(p_1, p_2) | p_1 + p_2 = 1, p_1, p_2 \geq 0\}$$

mientras que para el jugador B:

$$M_B = \{(q_1, q_2) | q_1 + q_2 = 1, q_1, q_2 \geq 0\}$$

en donde, en ambos casos, el sub-índice representa el número de respuesta.

Utilizando el concepto anterior, se definen los valores de juego de los jugadores A y B, para este caso en particular, de la siguiente manera:

$$V_A((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = p_1q_1x_{11} + p_1q_2x_{12} + p_2q_1x_{21} + p_2q_2x_{22}$$

$$V_B((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = p_1q_1y_{11} + p_1q_2y_{12} + p_2q_1y_{21} + p_2q_2y_{22}$$

Estas funciones se utilizan para definir un equilibrio de Nash. El conjunto de probabilidades $((p_1^*, p_2^*), (q_1^*, q_2^*))$ es un equilibrio de Nash si y solo si se cumplen ambas condiciones:

$$V_A((p_1^*, p_2^*), (q_1^*, q_2^*)) \geq V_A((p_1, p_2), (q_1^*, q_2^*)) \forall (p_1, p_2) \in M_A$$

y

$$V_B((p_1^*, p_2^*), (q_1^*, q_2^*)) \geq V_B((p_1^*, p_2^*), (q_1, q_2)) \forall (q_1, q_2) \in M_B$$

Existen diversos métodos que se pueden utilizar para determinar equilibrios de Nash. El primero fue propuesto por Nash (1951), quien utilizó el teorema de punto fijo de Brouwer para funciones vectoriales, en su artículo *Non-Cooperative Games*, para determinar dichos equilibrios. Por otra parte, Lemke & Howson (1964) utilizaron el álgebra lineal para demostrar que siempre existe un equilibrio de Nash para juegos bimatriciales (dos jugadores y que la suma no sea igual a cero). Además, en tiempos más recientes, se han desarrollado nuevos algoritmos para determinar los equilibrios como el método semi-suave de Newton (Facchinei et al., 2007), la programación coevolucionaria-híbrida (Son & Baldick, 2004), o el método estocástico (Vorobeychik & Wellman, 2008).

No se ha encontrado, en la literatura disponible, referencias que traten la demostración de existencia de equilibrios de Nash con un enfoque similar al que se presenta en este artículo. Si bien el enfoque aquí se basa en el análisis de las pendientes de rectas que son similares a las curvas de mejor respuesta en algunas referencias (por ejemplo, en el libro *Un Primer Curso de Teoría de Juegos* (Gibbons, 1992)), la mayoría de las veces se hace uso de herramientas de optimización mientras que, en el presente trabajo, el enfoque es totalmente geométrico. En el caso de referencias en las que se prescinde de la optimización, no se encontró el tratamiento de todos los casos posibles para estrategias mixtas como se presenta en esta obra.

Método Geométrico en el Caso General

Para determinar el primer componente de los equilibrios de Nash, es necesario considerar el valor del juego del jugador A para cada estrategia probabilística del jugador B. Esto se realiza con el propósito de encontrar aquellas probabilidades del jugador A que hagan cumplir la primer parte de la definición de equilibrio de Nash, es decir, que maximicen su ganancia. Acorde a lo anterior, se tiene que $V_A((p_1, p_2), (q_1^*, q_2^*)) = p_1q_1^*x_{11} + p_1q_2^*x_{12} + p_2q_1^*x_{21} + p_2q_2^*x_{22} = p_1q_1^*x_{11} + p_1(1 - q_1^*)x_{12} + (1 - p_1)q_1^*x_{21} + (1 - p_1)(1 - q_1^*)x_{22}$ dado que $p_2 = 1 - p_1$ y $q_2^* = 1 - q_1^*$. Como consecuencia de que la expresión anterior tiene únicamente dos variables, esta se puede expandir y reescribir como la ecuación de una recta:

$$Y = (q_1^*(x_{11} - x_{12} - x_{21} + x_{22}) + x_{12} - x_{22})X + q_1^*(x_{21} - x_{22}) + x_{22}$$

en donde Y y X representan $V_A((p_1, p_2), (q_1^*, q_2^*))$ y p_1 respectivamente. Para analizar esta expresión con mayor facilidad, se remplazan los términos $x_{11} - x_{12} - x_{21} + x_{22}$ por $\Delta_1 x$, y $x_{12} - x_{22}$ por $\Delta_2 x$. La ecuación simplificada se expresa de la siguiente manera:

$$Y = (q_1^* \Delta_1 x + \Delta_2 x)X + q_1^*(x_{21} - x_{22}) + x_{22} \quad (1)$$

A partir de esta ecuación, se analiza el término $\Delta_1 x$ en tres casos distintos: cuando es mayor, menor, o igual a cero. Además, para los primeros dos casos se estudia el cociente $-\Delta_2 x / \Delta_1 x$ (el cual surge al considerar el signo de la pendiente de la ecuación 1) de tres maneras distintas: que este sea menor a cero, mayor a uno, o que se encuentre en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Por otro lado, en los tres sub-casos del caso $\Delta_1 x = 0$ se analiza cuando $\Delta_2 x$ es menor, mayor, o igual a cero. A continuación se desglosarán los casos y sub-casos previamente señalados.

Caso 1: $\Delta_1 x > 0$

a) $-\Delta_2 x / \Delta_1 x < 0$: En este primer sub-caso, al multiplicar ambos lados de la desigualdad por $-\Delta_1 x$ se obtiene que $\Delta_2 x > 0$; esto conlleva a que la pendiente de recta expresada en la ecuación 1, $q_1^* \Delta_1 x + \Delta_2 x$, será positiva lo cual implica que Y máximo en este caso va a surgir cuando $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

b) $-\Delta_2 x / \Delta_1 x > 1$: Para este sub-caso, si en la desigualdad se multiplica por $\Delta_1 x$ en ambos lados se obtiene $-\Delta_2 x > \Delta_1 x$, lo cual se puede reescribir como $\Delta_1 x + \Delta_2 x < 0$. Como este término es mayor o igual a $q_1^* \Delta_1 x + \Delta_2 x$, la pendiente será menor a cero, lo cual señala que Y resultará máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

c) $0 \leq -\Delta_2 x / \Delta_1 x \leq 1$: Este sub-caso resulta más laborioso de analizar dado que se tiene que considerar el valor de q_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2 x / \Delta_1 x$; además, es necesario tener en mente que, como consecuencia del intervalo en el que se está trabajando, $\Delta_2 x \leq 0$. Habiendo mencionado lo anterior, se tienen que considerar tres sub-sub-casos adicionales:

I) $q_1^* < -\Delta_2 x / \Delta_1 x$: Esta desigualdad se puede reescribir de la forma $q_1^* \Delta_1 x < -\Delta_2 x$ lo cual significa que la pendiente de la recta expresada en la ecuación 1 resultará negativa por lo que, de manera similar al sub-caso b), Y resultará máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, -\Delta_2 x / \Delta_1 x]$

II) $q_1^* > -\Delta_2 x / \Delta_1 x$: Al reescribir la desigualdad como $q_1^* \Delta_1 x > -\Delta_2 x$ se puede notar que la pendiente de la recta expresada por la ecuación 1 resultará positiva por lo que Y resultará máximo en $X = p_1 = 1$, como en el sub-caso a), $\forall q_1^* \in (-\Delta_2 x / \Delta_1 x, 1]$

III) $q_1^* = -\Delta_2 x / \Delta_1 x$: Aquí, la pendiente, $q_1^* \Delta_1 x + \Delta_2 x$, es igual a 0, lo cual implica que Y será un máximo $\forall X = p_1 \in [0, 1]$ y tendrá el valor de $((x_{22} - x_{12})(x_{21} - x_{22}) / (x_{11} - x_{12} - x_{21} + x_{22})) + x_{22}$.

Caso 2: $\Delta_1 x < 0$

d) $-\Delta_2 x / \Delta_1 x < 0$: En este sub-caso, al multiplicar la desigualdad por $-\Delta_1 x$ en ambos lados, se obtiene que $\Delta_2 x < 0$; esto conlleva a que la pendiente de la recta expresada en la ecuación 1, $q_1^* \Delta_1 x + \Delta_2 x$, sea negativa, lo cual lleva a que se alcance un Y máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

e) $-\Delta_2 x / \Delta_1 x > 1$: Como q_1^* está en el intervalo $[0, 1]$, se cumple que $-\Delta_2 x / \Delta_1 x > q_1^*$, y esto implica que la pendiente $q_1^* \Delta_1 x + \Delta_2 x$ es positiva, por lo cual Y alcanzará un máximo en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

f) $0 \leq -\Delta_2 x / \Delta_1 x \leq 1$: Al igual que en c), en este sub-caso se tiene que considerar el valor de q_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2 x / \Delta_1 x$; sin embargo, aquí se tendrá: $\Delta_2 x \geq 0$. Se analizarán los siguientes tres sub-sub-casos:

IV) $q_1^* < -\Delta_2x/\Delta_1x$: Esta desigualdad se puede reescribir como $q_1^*\Delta_1x > -\Delta_2x$ lo cual indica que la pendiente de la recta expresada en la ecuación 1 es positiva. Por esta razón, de manera similar al sub-caso e), Y resultará máximo en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, -\Delta_2x/\Delta_1x)$

V) $q_1^* > -\Delta_2x/\Delta_1x$: Reescribiendo esta desigualdad como $q_1^*\Delta_1x < -\Delta_2x$ se puede deducir que la pendiente de la recta expresada en la ecuación 1 es negativa. Por esta razón, de manera similar al sub-caso a), Y será un máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in (-\Delta_2x/\Delta_1x, 1]$.

VI) $q_1^* = -\Delta_2x/\Delta_1x$: Este resultado es análogo al sub-sub-caso III.

Caso 3: $\Delta_1x = 0$

g) $\Delta_2x < 0$: En este sub-caso, la pendiente $q_1^*\Delta_1x + \Delta_2x$ es negativa y por lo tanto Y alcanza un máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

h) $\Delta_2x > 0$: La pendiente de la recta expresada en la ecuación 1 resulta positiva por lo que el máximo valor de Y se encontrará en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$.

i) $\Delta_2x = 0$: Este caso resulta en $q_1^*\Delta_1x + \Delta_2x = 0$ por lo que Y será un máximo $\forall X = p_1 \in [0, 1]$, $\forall q_1^* \in [0, 1]$. Adicionalmente, al igualar Δ_2x a cero y despejar este resultado en Δ_1x , se puede deducir que este caso sucede cuando $x_{12} = x_{22}$ y $x_{11} = x_{21}$.

Por otro lado, para encontrar el segundo componente de los equilibrios de Nash, se tiene que tomar en cuenta el valor del juego del jugador B para cada estrategia probabilística del jugador A, lo cual hace cumplir la segunda parte de la definición de equilibrio de Nash. De acuerdo con lo anterior, se tiene que $V_B((p_1^*, p_2^*), (q_1, q_2)) = p_1^*q_1y_{11} + p_1^*q_2y_{12} + p_2^*q_1y_{21} + p_2^*q_2y_{22} = p_1^*q_1y_{11} + p_1^*(1 - q_1)y_{12} + (1 - p_1^*)q_1y_{21} + (1 - p_1^*)(1 - q_1)y_{22}$ dado que $p_2^* = 1 - p_1^*$ y $q_2 = 1 - q_1$. Al igual que en la ecuación del valor del juego del jugador A, esta ecuación se puede reescribir como la ecuación de una recta:

$$Y' = (p_1^*(y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22}) + y_{21} - y_{22})X' + p_1^*(y_{12} - y_{22}) + y_{22}$$

donde Y' y X' representan $V_B((p_1^*, p_2^*), (q_1, q_2))$ y q_1 en ese orden. Para facilitar el análisis de esta ecuación, se reemplazan los términos $y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22}$ por Δ_1y , y $y_{21} - y_{22}$ por Δ_2y , por lo que la ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$Y' = (p_1^*\Delta_1y + \Delta_2y)X' + p_1^*(y_{12} - y_{22}) + y_{22} \quad (2)$$

De manera similar a la ecuación 1, se estudia el término Δ_1y en tres casos generales distintos: cuando es mayor, menor, o igual a cero. Además, para los primeros dos casos se analiza el cociente $-\Delta_2y/\Delta_1y$ (el cual se deriva a partir de la comparación entre la pendiente y los valores 0 y 1) de tres maneras distintas: que este sea menor a cero, mayor a uno, o que se encuentre en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Por otra parte, en los tres sub-casos del caso en donde $\Delta_1y = 0$, se analiza lo que ocurre cuando Δ_2y es menor, mayor, o igual a cero. A continuación se desglosarán los casos y sub-casos previamente mencionados y se describirán los resultados obtenidos al utilizar argumentos similares a los usados en el análisis de la ecuación 1 (se reiniciará la numeración utilizada con antelación por lo que todas las referencias realizadas a partir de este punto serán en base a los casos de la ecuación 2).

Caso 1: $\Delta_1y > 0$

a) $-\Delta_2y/\Delta_1y < 0$: Y' será máximo para el valor $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

b) $-\Delta_2y/\Delta_1y > 1$: Y' alcanzará un máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

c) $0 \leq -\Delta_2y/\Delta_1y \leq 1$: En este sub-caso, se tiene que considerar el valor de p_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2y/\Delta_1y$; cabe notar que como consecuencia del intervalo en el que se trabaja, $\Delta_2y \leq 0$. Habiendo señalado lo anterior, se consideraron tres sub-sub-casos adicionales:

I) $p_1^* < -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, -\Delta_2 y / \Delta_1 y)$

II) $p_1^* > -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in (-\Delta_2 y / \Delta_1 y, 1]$

III) $p_1^* = -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo $\forall X' = q_1 \in [0, 1]$ y es igual a $((y_{22} - y_{21})(y_{12} - y_{22}) / (y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22})) + y_{22}$.

Caso 2: $\Delta_1 y < 0$

d) $-\Delta_2 y / \Delta_1 y < 0$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

e) $-\Delta_2 y / \Delta_1 y > 1$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

f) $0 \leq -\Delta_2 y / \Delta_1 y \leq 1$: Al igual que en c), en este sub-caso se tiene que considerar el valor de p_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2 y / \Delta_1 y$; sin embargo, en este sub-caso se tiene que: $\Delta_2 y \geq 0$. Se analizaron los siguientes tres sub-sub-casos:

IV) $p_1^* < -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, -\Delta_2 y / \Delta_1 y)$

V) $p_1^* > -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in (-\Delta_2 y / \Delta_1 y, 1]$

VI) $p_1^* = -\Delta_2 y / \Delta_1 y$: Y' es máximo $\forall X' = q_1 \in [0, 1]$ y es igual a $((y_{22} - y_{21})(y_{12} - y_{22}) / (y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22})) + y_{22}$.

Caso 3: $\Delta_1 y = 0$

g) $\Delta_2 y < 0$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

h) $\Delta_2 y > 0$: Y' es máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$.

i) $\Delta_2 y = 0$: Y' es máximo $\forall X' = q_1 \in [0, 1]$, $\forall p_1^* \in [0, 1]$. En este sub-caso $y_{21} = y_{22}$ y $y_{11} = y_{12}$.

Ahora bien, para determinar los equilibrios de Nash se tiene que juntar la información de los pesos probabilísticos que maximicen las ganancias o minimicen las pérdidas de los dos jugadores. Por ejemplo, si para los Δx se tiene que $\Delta_1 x > 0$ y $0 \leq -\Delta_2 x / \Delta_1 x \leq 1$ y para los Δy se tiene que $\Delta_1 y > 0$ y $-\Delta_2 y / \Delta_1 y > 1$, se obtienen tres casos en donde se pueden encontrar equilibrios de Nash para p_1 y un caso para q_1 , el cual determina que $q_1 = 0$. Para determinar el componente p_1 del equilibrio, se tiene que estudiar su comportamiento en función de q_1 ; del mismo modo, para encontrar el componente q_1 , se analiza su comportamiento en función de p_1 . En este ejemplo, q_1 resulta sencillo de analizar dado que solo tiene un caso mientras que para determinar el comportamiento de p_1 , se tienen que considerar los casos dependientes del cociente $-\Delta_2 x / \Delta_1 x$. El análisis de estas variables se puede ilustrar mejor en una gráfica p_1 vs. q_1 como se muestra en la figura 2. Lo que se busca con esto es encontrar los puntos en donde ambos p_1 y q_1 coincidan siendo máximos, lo cual, de manera gráfica, estos son representados por las intersecciones entre las dos gráficas. El último paso para determinar los equilibrios de Nash es utilizar los puntos encontrados en el paso anterior para encontrar el segundo componente de cada peso probabilístico para de este modo establecer el equilibrio, el cual se presentará de la forma $((p_1, 1-p_1), (q_1, 1-q_1))$; en el caso específico de la figura 2, el equilibrio de Nash es $((0, 1), (0, 1))$.

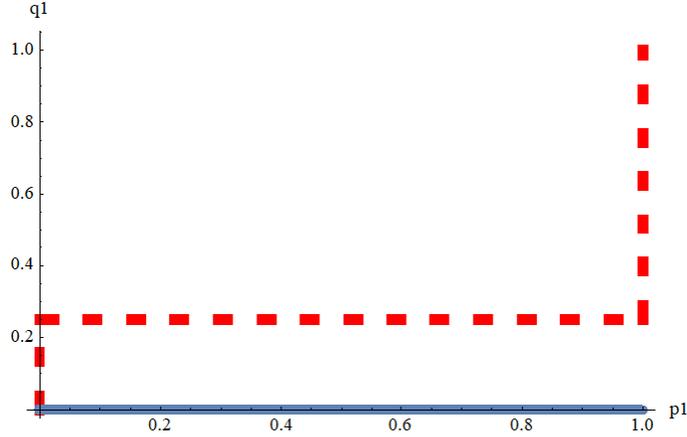


Figura 2: Ejemplo de equilibrio de Nash.

Este método muestra que sin importar el juego, siempre se pueden maximizar los valores del juego de los jugadores A y B al menos de una manera; por lo tanto, se demuestra que para cualquier juego de dos jugadores con dos opciones, existe al menos un equilibrio de Nash. Además, se conoce el conjunto de valores de p_1^* y q_1^* donde se alcanzan los equilibrios de Nash. A continuación se presentará un ejemplo en donde se encontrarán los equilibrios de Nash utilizando este método.

Ejemplo

Para ilustrar mejor el método anterior se resolverá un ejemplo llamado “la Batalla de los Sexos” obtenido del artículo *A Program for Finding Nash Equilibria* (Dickhaut & Kaplan, 1993). En este ejemplo hay dos jugadores, Ed y Jan, quienes están planeando ir ya sea al cine o a un partido de fútbol. Ed prefiere la primera opción mientras que Jan la segunda; sin embargo, ambas personas quieren estar juntas. Expresado de manera gráfica, este juego se representa de la siguiente manera:

		Jan	
		cine	fútbol
Ed	cine	(2, 1)	(0, 0)
	fútbol	(0, 0)	(1, 2)

Figura 3: Juego de “la Batalla de los Sexos”.

Teniendo esta información, se ingresan las utilidades correspondientes de cada jugador en las ecuaciones 1 y 2 para reescribirlas de manera:

$$Y = (3q_1^* - 1)X - q_1^* + 1$$

$$Y' = (3p_1^* - 2)X' - 2p_1^* + 2$$

Al analizar la primera ecuación, se encuentra que $\Delta_1 x = 3$ y $-\frac{\Delta_2 x}{\Delta_1 x} = 1/3$ por lo que es necesario considerar el sub-caso *c)* y sus tres sub-sub-casos para encontrar los máximos de Y :

- I) $q_1^* < 1/3 \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 0$
- II) $q_1^* > 1/3 \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 1$
- III) $q_1^* = 1/3 \Rightarrow Y$ alcanza su máximo $\forall X = p_1 \in [0, 1]$

Del mismo modo, al estudiar la segunda ecuación, se obtiene que $\Delta_1 y = 3$ y $-\frac{\Delta_2 y}{\Delta_1 y} = 2/3$; esto implica que se tendrá que considerar el mismo sub-caso, *c*), pero respecto a la ecuación 2 para maximizar Y' :

- I') $p_1^* < 2/3 \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 0$
- II') $p_1^* > 2/3 \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 1$
- III') $p_1^* = 2/3 \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo $\forall X' = q_1 \in [0, 1]$

Finalmente, para determinar los equilibrios de Nash, es necesario juntar los resultados del análisis de las dos ecuaciones. El inciso *I*) indica que $p_1 = 0$ es máximo para $q_1^* < 1/3$ mientras que del inciso *I'*) muestra que $q_1 = 0$ es máximo para $p_1^* < 2/3$; al considerar $p_1^* = p_1 = 0$ y $q_1^* = q_1 = 0$ y sustituirlos en estos incisos, se puede observar que ambas condiciones se cumplen, por lo que existe un equilibrio de Nash en $((0,1),(0,1))$. De manera similar, al estudiar la información restante, se encuentran dos equilibrios de Nash adicionales en: $((1,0),(1,0))$ y $((2/3,1/3),(1/3,2/3))$. Esto se puede comprobar de manera gráfica al analizar el comportamiento de p_1 en función de q_1 y vice-versa como se muestra en la figura 4.

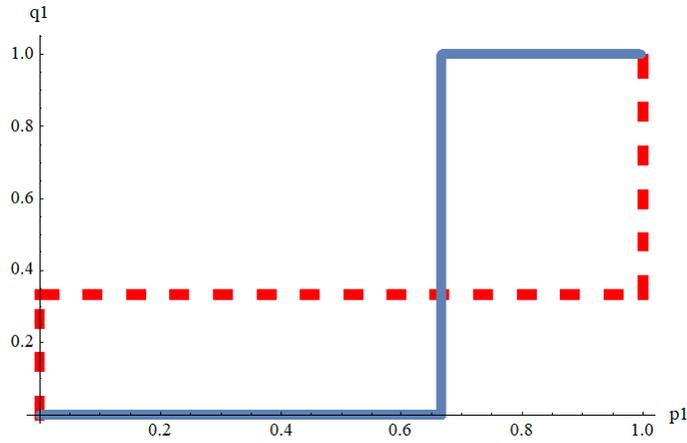


Figura 4: Equilibrios de Nash en el juego de “la Batalla de los Sexos”.

Método Geométrico en el Caso Simétrico

Un juego simétrico se refiere a aquel en donde si los jugadores cambian de lugar, es decir, si el jugador A se vuelve el B y el jugador B se vuelve el A, se obtienen los mismos valores del juego que de manera original. Por lo anterior, un juego simétrico debe cumplir con las condiciones: $x_{11} = y_{11}, x_{12} = y_{21}, x_{21} = y_{12}, x_{22} = y_{22}$. Para analizar este tipo de juego se hace uso de la misma metodología propuesta en el caso general, no obstante, su estudio resulta ser más sencillo dado que, al considerar las condiciones mencionadas, se puede deducir que $\Delta_1 x = \Delta_1 y$ y $\Delta_2 x = \Delta_2 y$. Habiendo mencionado lo anterior, se hace uso de las ecuaciones 1 y 2 para estudiar este tipo de juego, por lo que se construyen tres casos para $\Delta_1 x$ y $\Delta_1 y$: que sean mayores, menores, o iguales a cero. Además, para los primeros dos casos se analizarán los cocientes $-\Delta_2 x / \Delta_1 x$ y $-\Delta_2 y / \Delta_1 y$ cuando estos sean: menores a cero, mayores a uno, o se encuentren en el intervalo cerrado $[0,1]$. Por otro lado, para el tercer caso se examinará cuando $\Delta_2 x$ y $\Delta_2 y$ sean: mayores, menores, o iguales a cero. A continuación se desglosarán estos casos.

Caso 1: $\Delta_1 x = \Delta_1 y > 0$

- a) $-\Delta_2 x / \Delta_1 x = -\Delta_2 y / \Delta_1 y < 0$: De acuerdo con el análisis de la ecuación 1, Y resulta máxima en este sub-caso cuando $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$. Del mismo modo, la ecuación 2 muestra que, para este mismo, Y' resulta máxima cuando $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$. Juntando esta información se obtiene que el equilibrio de Nash para este caso será igual a $((1,0),(1,0))$.

b) $-\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y > 1$: De acuerdo con la ecuación 1, para este sub-caso Y alcanza el máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$, mientras que en la ecuación 2, Y' resulta máxima cuando $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$, por lo que en este caso el equilibrio de Nash será igual a $((0,1),(0,1))$.

c) $0 \leq -\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y \leq 1$: En este sub-caso, se tienen que considerar los valores de q_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2x/\Delta_1x$ y de p_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2y/\Delta_1y$. Dado que para cada cociente existen tres sub-sub-casos, estos se trataran por separado.

Para $-\Delta_2x/\Delta_1x$ se obtienen los siguientes resultados:

I) $q_1^* < -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, -\Delta_2x/\Delta_1x)$

II) $q_1^* > -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in (-\Delta_2x/\Delta_1x, 1]$

III) $q_1^* = -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en todo el intervalo $X = p_1 \in [0, 1]$.

Para $-\Delta_2y/\Delta_1y$ se obtienen los siguientes resultados:

I') $p_1^* < -\Delta_2y/\Delta_1y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, -\Delta_2y/\Delta_1y)$

II') $p_1^* > -\Delta_2y/\Delta_1y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in (-\Delta_2y/\Delta_1y, 1]$

III') $p_1^* = -\Delta_2y/\Delta_1y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en todo el intervalo $X' = q_1 \in [0, 1]$.

Al unir estos pedazos de información se pueden encontrar tres equilibrios de Nash: $((0,1),(0,1))$, $((1,0),(1,0))$, $((\frac{-\Delta_2x}{\Delta_1x}, 1 + \frac{\Delta_2x}{\Delta_1x}), (\frac{-\Delta_2x}{\Delta_1x}, 1 + \frac{\Delta_2x}{\Delta_1x}))$ (dado que $\frac{-\Delta_2y}{\Delta_1y} = \frac{-\Delta_2x}{\Delta_1x}$).

Caso 2: $\Delta_1x = \Delta_1y < 0$

d) $-\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y < 0$: A partir del análisis de la ecuación 1, en este sub-caso Y resulta máxima cuando $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$. De la misma manera, la ecuación 2 muestra que, en este sub-caso, Y' alcanza el máximo cuando $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$. Con esta información se obtiene un equilibrio de Nash en $((0,1),(0,1))$.

e) $-\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y > 1$: La ecuación 1 indica que para este sub-caso Y máxima se encontrará en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$. De igual manera, al estudiar la ecuación 2, Y' resulta máxima cuando $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$, por lo que se determina que el equilibrio de Nash para este sub-caso será $((1,0),(1,0))$.

f) $0 \leq -\Delta_2x/\Delta_1x = -\Delta_2y/\Delta_1y \leq 1$: Al igual que en c), para analizar este sub-caso se tienen que considerar los valores de q_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2x/\Delta_1x$ y de p_1^* con respecto al cociente $-\Delta_2y/\Delta_1y$. A continuación se presentan los tres sub-sub-casos generados por los cocientes de los deltas:

Para $-\Delta_2x/\Delta_1x$ se obtienen los siguientes resultados:

IV) $q_1^* < -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, -\Delta_2x/\Delta_1x)$

V) $q_1^* > -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in (-\Delta_2x/\Delta_1x, 1]$

VI) $q_1^* = -\Delta_2x/\Delta_1x \Rightarrow Y$ alcanza su máximo en todo el intervalo $X = p_1 \in [0, 1]$.

Para $-\Delta_2y/\Delta_1y$ se obtienen los siguientes resultados:

IV') $p_1^* < -\Delta_2 y / \Delta_1 y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, -\Delta_2 y / \Delta_1 y)$

V') $p_1^* > -\Delta_2 y / \Delta_1 y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in (-\Delta_2 y / \Delta_1 y, 1]$

VI') $p_1^* = -\Delta_2 y / \Delta_1 y \Rightarrow Y'$ alcanza su máximo en todo el intervalo $X' = q_1 \in [0, 1]$.

Al juntar esta información se determina los tres equilibrios de Nash siguientes: $((1,0),(0,1)), ((0,1),(1,0)), ((-\frac{\Delta_2 x}{\Delta_1 x}, 1 + \frac{\Delta_2 x}{\Delta_1 x}), (-\frac{\Delta_2 x}{\Delta_1 x}, 1 + \frac{\Delta_2 x}{\Delta_1 x}))$.

Caso 3: $\Delta_1 x = \Delta_1 y = 0$

g) $\Delta_2 x = \Delta_2 y < 0$: Al estudiar la ecuación 1, en este sub-caso Y resulta máxima cuando $X = p_1 = 0 \forall q_1^* \in [0, 1]$. De igual manera, mediante la ecuación 2 se puede determinar que en este sub-caso, Y' alcanza el máximo cuando $X' = q_1 = 0 \forall p_1^* \in [0, 1]$. Esta información indica que para este sub-caso se obtiene un equilibrio de Nash en $((0,1),(0,1))$.

h) $\Delta_2 x = \Delta_2 y > 0$: Para este sub-caso, la ecuación 1 indica que Y máxima se encontrará en $X = p_1 = 1 \forall q_1^* \in [0, 1]$. Similarmente, al estudiar la ecuación 2, Y' resulta máxima cuando $X' = q_1 = 1 \forall p_1^* \in [0, 1]$, por lo que al juntar la información se determina que el equilibrio de Nash para este sub-caso será $((1,0),(1,0))$.

i) $\Delta_2 x = \Delta_2 y = 0$: Mediante el estudio de las ecuaciones 1 y 2 en este sub-caso, se determina que Y es un máximo en todo el intervalo $X = p_1 \in [0, 1] \forall q_1^* \in [0, 1]$, mientras que Y' lo será en todo el intervalo $X' = q_1 \in [0, 1] \forall p_1^* \in [0, 1]$. Esto implica que $((p_1, 1 - p_1), (q_1, 1 - q_1))$ será un equilibrio de Nash $\forall p_1, q_1 \in [0, 1]$. Además, realizando el análisis de igualdades se puede determinar que este caso surge cuando se realiza un juego con el siguiente formato:

		B	
		b ₁	b ₂
A	a ₁	(w, w)	(z, w)
	a ₂	(w, z)	(z, z)

Figura 5: Juego simétrico en el que se da el caso i).

Así pues, al considerar los equilibrios de Nash encontrados en este tipo de juego, se puede notar que en todos los casos y sub-casos hay al menos un equilibrio simétrico, es decir que si el jugador A cambia a ser el B, y el jugador B se vuelve el A, se obtiene el mismo equilibrio que si no se intercambian. Por lo tanto, este método demuestra que para todo juego simétrico de dos jugadores y dos opciones existe al menos un equilibrio de Nash simétrico.

Conclusión

En resumen, en este artículo se presenta un método basado en la geometría elemental para encontrar equilibrios de Nash para juegos de dos jugadores con dos opciones. Generalizando este método, se demuestra que para cualquier juego de este tipo existe al menos un equilibrio de Nash. Para ilustrar este método de mejor manera, se realiza el ejemplo de “la Batalla de los Sexos” en donde se encuentran tres equilibrios de Nash. Además, se estudia el caso de cuando este juego es simétrico respecto al cambio de jugadores, y se demuestra que existe por lo menos un equilibrio de Nash simétrico. Cabe mencionar que las figuras 2 y 4 fueron realizadas con un programa escrito en el lenguaje Wolfram Mathematica, el cual permite calcular los equilibrios de Nash y que utiliza el método presentado en este trabajo. Finalmente, la simetría en el

equilibrio de Nash es uno de los casos a estudiar en el trabajo de tesis de licenciatura del primer autor, titulado: “Optimización y Simetría, La Relación entre Ellas” y que es realizado bajo la dirección de los otros dos autores. El objetivo de esta tesis es estudiar los casos donde las situaciones óptimas son las más simétricas y las condiciones para que esto se cumpla.

Referencias

- [1] Dickhaut, J., & Kaplan, T. (1993). A Program for Finding Nash Equilibria. H. R. Varian (Editor) *Economic and Financial Modeling with Mathematica*, 148-166. Santa Clara, California: Springer.
- [2] Facchinei, F., Fischer, A., & Piccialli, V. (2007). Generalized Nash equilibrium problems and Newton methods. *Mathematical Programming*, 117(1-2), 163-194.
- [3] Gibbons, R. (1992). *Un primer curso de teoría de juegos*. Barcelona: Antoni Bosch.
- [4] Lemke, C. E., & Howson, Jr, J. T. (1964). Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 12(2), 413-423.
- [5] Nash, J. (1951). Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, 54, 2nd ser., 286-295.
- [6] Son, Y. S., & Baldick, R. (2004). Hybrid coevolutionary programming for Nash equilibrium search in games with local optima. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 8(4), 305-315.
- [7] Vorobeychik, Y., & Wellman, M. P. (2008). Stochastic search methods for Nash equilibrium approximation in simulation-based games. *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, 2, 1055-1062.