PERSPECTIVAS *Revista de Análisis de Economía, Comercio y Negocios Internacionales*
Volumen 11 / No. 2 / Julio - Diciembre 2017 / 53-68
ISSN 2007-2104

Justicia vs. eficiencia en mercados de emparejamiento: una introducción

Grisel Ayllón[1]
Tecnológico de Monterrey
grisel.ayllon@itesm.mx

David Cantala
El Colegio de México
dcantala@colmex.mx

1. Introducción

Emparejar mujeres con hombres, trabajadores con empresas o estudiantes de medicina con hospitales son algunas de las aplicaciones analizadas por la literatura del emparejamiento. Ésta tuvo inicio a manos de David Gale y Lloyd S. Shapley con el artículo "College admission and the stability of mariage" en 1962.

El objeto de esta reseña es, en primer lugar, recopilar los resultados fundamentales de esta línea de literatura; tal como lo hicieron Roth y Sotomayor (1990), libro que es considerado piedra angular de la misma.

En un segundo propósito, seguimos los pasos de Abdulkadiroglu y Sönmez (2003) al considerar el problema de la elección escolar. La asignación de estudiantes a opciones educativas de parte de la Comisión Metropolitana de Instituciones Públicas de Educación Media Superior (COMIPEMS) es una ejemplo de este problema. Estudiamos el conflicto existente entre dos propiedades deseables: justicia y eficiencia en el sentido de Pareto. Evaluamos su relación con dos mecanismos de asignación: el algoritmo de aceptación diferida y el ciclo de intercambios optimales (TTC).

Concluímos esta reseña discutiendo la solución propuesta por Kesten (2010) para resolver el dilema entre justicia y eficiencia.

[1]Campus Ciudad de México

2. Modelo

En 1962, David Gale y Lloyd Shapley propusieron el modelo de emparejamiento que a continuación se describe. Sea $M = \{m_1, m_2, ..., m_m\}$ el conjunto de mujeres, denotando genéricamente a una mujer como m. El conjunto de hombres es $H = \{h_1, h_2, ..., h_h\}$, denotando genéricamente a un hombre como h. Toda mujer m tiene preferencias, denotadas $\succ_m$, definidas sobre $H \cup \{m\}$; asimismo, cada hombre h tiene preferencias, denotadas $\succ_h$, definidas sobre $M \cup \{h\}$. Tanto $\succ_m$ como $\succ_h$ son preferencias completas, transitivas y estrictas. Si en las preferencias de $\succ_m$ un hombre h es menos preferido que m, entonces la mujer m prefiere quedarse soltera a emparejarse con h. De igual manera, si para h sus preferencias $\succ_h$son tales que alguna mujer m es menos preferida que el mismo h, significa que este último prefiere quedarse soltero antes que emparejarse con m.

Definición 1. *Una asignación es una biyección $\mu : H \cup M \rightarrow H \cup M$ tal que*
1. $\mu(m) \in H \cup \{m\}$ *para toda mujer* $m \in M$,
2. $\mu(h) \in M \cup \{h\}$ *para todo hombre* $h \in H$,
3. $\mu(m) = h$ *sí y solo sí* $\mu(m) = h$.

A continuación presentamos un ejemplo de un mercado de emparejamiento.

Ejemplo 2. *Sea el conjunto de mujeres $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ y el conjunto de hombres $H = \{h_1, h_2, h_3\}$. Sus preferencias están representadas en la siguiente tabla:*

$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$	$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$	$\succ_{h_3}$
h_1	h_2	h_3	m_2	m_3	m_1
h_2	h_3	h_1	m_3	m_1	m_2
h_3	h_1	h_2	m_1	m_2	m_3

Una posible asignación en este mercado es:

$$\mu = \left\{ \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 \end{array} \right\}.$$

□

En este ejemplo, se observa que (m_1, h_2) se prefieren recíprocamente respeto a su asignación. En tal caso, decimos que la pareja (m_1, h_2) bloquea μ. El criterio normativo propuesto por D. Gale y L. Shapley consisten en resolver los posibles bloqueos. Específicamente, en una asignación estable no debe de existir parejas que bloquean μ. Además, se establece que no se puede obligar a ningún agente a emparejarse con otro agente no deseable.

Definición 3. *Una asignación μ es estable si*

1. es individualmente racional: $\mu(m) \succ_m m$ o $\mu(m) = m$ para toda mujer m, $\mu(h) \succ_h h$ o $\mu(h) = h$ para todo hombre h, y

2. no tiene par bloqueador: no existe un par (m, h) tal que $h \succ_m \mu(m)$ y $m \succ_h \mu(h)$.

Ejemplo 4. *(Continuación)El mercado del Ejemplo 1 tiene 3 asignaciones biyectivas estables:*

$$\mu^1 = \left\{ \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \\ h_3 & h_1 & h_2 \end{array} \right\}$$

$$\mu^2 = \left\{ \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{array} \right\}$$

$$\mu^3 = \left\{ \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \\ h_2 & h_3 & h_1 \end{array} \right\}.$$

□

Como se observa, pueden existir varias asignaciones estables. De hecho, D. Gale y L. Shapley prueban su existencia en cualquier mercado de emparejamiento. El argumento es constructivo; proponen un algoritmo y comprueban que este siempre produce una asignación estable.

3. Algoritmo de Aceptación Diferida (AD)

En esta sección mostramos el algoritmo que no sólo prueba la existencia de una asignación estable en un modelo de emparejamiento, sino que da como resultado las posibles asignaciones.

Los principios del mecanismo son los siguientes:

1. En primer lugar, se escoge un lado del mercado -digamos, las mujeres- para hacer las ofertas. El otro lado -en este caso los hombres- aceptan o rechazan las ofertas que recibe.

2. El proceso de oferta y aceptación/rechazo genera una secuencia de asignaciones tentativas.

3. Las mujeres hacen ofertas siempre cuando estén solteras y las ofertas se hacen en el orden decreciente de sus preferencias, de modo que una mujer no hace ofertas dos veces al mismo hombre.

4. Los hombres aceptan la oferta que prefieren entre todas las que reciben y su mujer tentativa.

5. El proceso concluye cuando ninguna mujer queda soltera, o las solteras hicieron oferta a todos los hombres con quienes quisieran emparejarse. La última asignación de la secuencia es la asignacion final del mecanismo.

Denotaremos como DA_M a la asignación final que surge al ser las mujeres quienes ofertan a los hombres y DA_H a la asignación final que resulta cuando son los hombres los oferentes.

Para clarificar estos conceptos, corremos el mecanismo en el siguiente mercado.

Ejemplo 5. *Sea el conjunto de mujeres* $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ *y hombres* $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$. *Sus preferencias están dadas por la siguiente tabla:*

$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$	$\succ_{m_4}$	$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$	$\succ_{h_3}$	$\succ_{h_4}$
h_2	h_1	h_4	h_4	m_4	m_4	m_1	m_2
m_1	h_2	h_1	h_2	m_3	m_3	m_4	m_1
h_1	h_3	h_2	h_1	m_1	m_2	m_3	m_4
h_4	h_4	m_3	h_3	m_2	h_2	h_3	m_3
h_3	m_2	h_3	m_4	h_1	m_1	m_2	h_4

Iteración 1:
1.1 Ofertas

m_1 *ofrece a* h_2	$h_2 \succ_{h_2} m_1$	h_2 *rechaza* m_1
m_2 *ofrece a* h_1	$m_2 \succ_{h_1} h_1$	h_1 *acepta* m_2
m_3 *y* m_4 *ofrecen a* h_2	$m_4 \succ_{h_4} m_3 \succ_{h_4} h_3$	h_4 *acepta* m_4.

1.2 Asignación tentativa

$$\mu^1 = \left\{ \begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & h_1 & \varnothing & h_4 & h_2 & h_3 \end{array} \right\}.$$

Iteración 2:
2.1 Ofertas

m_1 *se queda soltera*		
m_3 *ofrece a* h_1	$m_3 \succ_{h_1} m_2$	h_1 *accepta* m_3.

2.2 Asignación tentativa

$$\mu^2 = \left\{ \begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing & h_1 & h_4 & h_2 & h_3 \end{array} \right\}.$$

Iteración 3:
3.1 Ofertas

$$m_2 \text{ ofrece a } h_2 \quad m_2 \succ_{h_2} h_2 \quad h_2 \text{ accepta } m_4.$$

3.2 Asignación tentativa

$$\mu^3 = \left\{ \begin{array}{ccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \varnothing \\ \varnothing & h_2 & h_1 & h_4 & h_3 \end{array} \right\} = DA_M.$$

Fin de las iteraciones.

Con este mecanismo, se puede comprobar que si hacen ofertas los hombres, la asigación generada por el algoritmo AD es

$$DA_H = \left\{ \begin{array}{ccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \varnothing \\ \varnothing & h_2 & h_1 & h_4 & h_3 \end{array} \right\}.$$

□

Existen distintas variantes del algoritmo DA; una consiste en seleccionar secuencialmente a las mujeres solteras para hacer ofertas. La variante secuencial es útil en algunas de las pruebas que veremos a continuación.

3.1. Resultados fundamentales

Teorema 6. *(Gale y Shapley, 1962) Para cualquier mercado de emparejamiento DA_M y DA_H son estables.*

Prueba. Racionalidad individual: Por construcción, las mujeres solo hacen ofertas a los hombres que consideran preferidos a quedarse solas. Los hombres aceptan las ofertas de las mujeres con quien prefieren emparejarse a quedarse solteros.

Observación (monotonía): los hombres solo mejoran a lo largo de la secuencia de asignaciones generadas por el algoritmo.

No existe ningúna pareja que bloquea: por contradicción, suponemos que existe una mujer m que prefiere un hombre h a su asignacion en $DA_M(m)$. Ya que las mujeres hacen ofertas en el orden decreciente de sus preferencias, m le hizo una oferta a h en alguna etapa del algoritmo. Como m y h no estan emparejados, significa que h rechazó la oferta de m cuando se la hizo, o prefirió una oferta que se hizo posteriormente. Por monotonicidad, h mejoró a lo largo del algoritmo, por lo que prefiere su asignación final $DA_M(h)$, a m, por lo que no conforman un par bloqueador. □

Teorema 7. *(Roth y Sotomayor, 1990) En la variante del algortimo DA en donde las ofertas se hacen de manera secuencial, el orden en que se hacen las ofertas no afecta el resultado del algoritmo.*

Prueba. Por contradicción. Supongamos que existen dos ordenes, π_1 y π_2, tal que $DA_M^{\pi_1} \neq DA_M^{\pi_2}$. Sin perdidad de generalidad, asumimos que la mujer m_1 prefiere $DA_M^{\pi_1}(m_1)$ a $DA_M^{\pi_2}(m_1)$ y en π_2, es la primera mujer que es rechazada por $DA_M^{\pi_1}(m_1)$. Para que esto suceda, $DA_M^{\pi_1}(m_1)$ tendría que haber recibido una oferta mejor que m_1; digamos, de m_2, la cuál no le llegó en la secuencia π_1. Como las mujeres hacen ofertas en orden decreciente de sus preferencias, en π_2 la mujer m_2 hace ofertas a $DA_M^{\pi_1}(m_1)$, a quien no había hecho ofertas en π_1, por lo que m_2 había sido rechazada anteriormente por $DA_M^{\pi_1}(m_2)$ en π_2. Contradicción con el hecho de que m_1 fue la primera mujer en ser rechazada de $DA_M^{\pi_1}(w_1)$ en π_2. □

Otro resultado muy conocido en esta literatura se refiere a las preferencias tanto de las mujeres como de los hombres hacia las asignaciones estables que resultan tanto de que las mujeres sean quienes ofrecen como de los hombres. En particular, las mujeres consideran que DA_M es la mejor asignación estable, en tanto que la que resulta de la oferta por parte de los hombres es la peor. El caso de la preferencia de los hombres es el caso contrario.

Teorema 8. *(Gale y Shapley, 1962 y Knuth, 1976)* $DA_M = \overline{\mu}_M = \underline{\mu}_H$, $DA_H = \overline{\mu}_H = \underline{\mu}_M$.

Prueba. DA_M es la mejor asignación estable para el lado del mercado que hace las ofertas, en este caso las mujeres.

Por contradicción. Supongamos que existe otra asignación de emparejamiento estable μ, tal que alguna(s) mujer(s) m prefieren $\mu(m)$ a $DA_M(m)$. Por lo tanto, a lo largo de la corrida del algoritmo, las mujeres m han sido rechazadas por $\mu(m)$. Sea m_1 la primera en haber sido rechazada por $\mu(m_1)$. Por construcción, esto significa que $\mu(m_1)$ recibió una mejor oferta que m_1, digamos de m_2. Por definición de m_1 como primera mujer en haber sido rechazada de su asignacion en μ, m_2 prefiere $\mu(m_1)$ a $\mu(m_2)$. Por lo tanto, m_2 y $\mu(m_1)$ bloquean μ, siendo esto en contradicción con el supuesto de estabilidad de μ. Como consecuencia, todas las mujeres prefieren DA_M a cualquier asignación estable.

Comprobamos ahora que, dado dos asignaciones estables, μ_1 y μ_2, si todas las mujeres prefieren μ_1 a μ_2, todos los hombres prefieren μ_2 a μ_1.

Supongamos que existe un hombre h que prefiere estrictamente $\mu_1(h)$ a $\mu_2(h)$. Por lo tanto tiene pareja en $\mu_1(h)$, sea m esta pareja. Como m y h se prefieren mutuamente a su pareja en μ_2, son una pareja bloqueadora de μ_2, lo que contradice la estabilidad de μ_2. $\square$

Una característica importante se refiere a los "lobos solitarios" o "médicos rurales". Aquellos que en una asignación de emparejamiento estable resulta soltero, lo seguirán siendo en cualquier otro resultado estable.

Teorema 9. *(McVitie y Wilson, 1971)(Médicos rurales): Los agentes solteros son los mismos en todas las asignaciones de emparejamiento estables.*

Antes de comprobarlo, establecemos el siguiente lema.

Lema 10. *(Knuth, 1976) (Decomposición) Sean μ_1 y μ_2 dos asignaciones estables, $M(\mu_1)$ el conjunto de mujeres que prefieren μ_1 sobre μ_2, y $H(\mu_2)$ el conjunto de hombres que prefieren μ_2 a μ_1. Entonces μ_1 y μ_2 asignan cualquier mujer en $M(\mu_1)$ a un hombre en $H(\mu_2)$, y viceversa.*

Prueba. Sea $m_1 \in M(\mu_1)$. Como $\mu_1(m_1) \succ_{m_1} \mu_2(m_1) \succsim_{m_1} m_1$, m_1 está emparejada en μ_1, digamos con h_1, y no está emparejada con h_1 en μ_2. Por estabilidad de μ_1 y μ_2, $h_1 \in H(\mu_2)$; por lo tanto, $\mu_1(M(\mu_1)) \subseteq H(\mu_2)$, $\#M(\mu_1) \leq \#H(\mu_2)$ y m_2, su pareja en μ_2, es tal que $m_2 \in M(\mu_1)$. El razonamiento simétrico lleva a la conclusión que $\mu_2(H(\mu_2)) \subseteq M(\mu_1)$, $\#M(\mu_1) \geq \#H(\mu_2)$. Además la pareja de h_2 en μ_1 es tal que $h_2 \in H(\mu_2)$.

Como la asignación es uno-a-uno y los conjuntos de mujeres y hombres son finitos, $\#M(\mu_1) = \#H(\mu_2)$, por lo que se cumple el Lema. $\square$

Prueba. Teorema 4: Sean μ_1 y μ_2 dos asignaciones estables. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que una mujer m tiene pareja en μ_1 y no en μ_2, contradecimos al Lema de Decomposicion. $\square$

Además, el algoritmo presenta una cualidad muy deseada para el diseño de mecanismos: no es manipulable para los oferentes. Es decir, el mentir en las preferencias no es redituable o para los hombres o para las mujeres, dependiendo de quién esté haciendo las ofertas.

Teorema 11. *(Dubins y Freedman, 1981 y Roth, 1982) En el algoritmo DA_M, para las mujeres es una estrategia dominante reportar al mecanismo sus verdaderas preferencias; sin embargo, los hombres pueden manipular el mecanismo.*

Prueba. Las mujeres hacen ofertas en el orden decreciente de sus preferencias. La única manera en que una mujer m puede cambiar el resultado del mecanismo es reportando un perfil de preferencias en donde un hombre menos preferido que $DA_M(m)$ es declarado preferido a $DA_M(m)$ y que éste acepte su oferta y quede como su nueva asignación. En este caso, la mujer empeora respeto a reportar sus verdaderas preferencias.

Considere el siguiente mercado:$M = \{m_1, m_2\}$, $H = \{h_1, h_2\}$,

$$\begin{array}{cccc} \succ_{m_1} & \succ_{m_2} & \succ_{h_1} & \succ_{h_2} \\ h_1 & h_2 & m_2 & m_1 \\ h_2 & h_1 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & h_1 & h_2 \end{array}$$

Si todos los agentes reportan sus verdaderas preferencias

$$DA_M = \left\{ \begin{array}{cc} m_1 & m_2 \\ h_1 & h_2 \end{array} \right\}.$$

Si h_1 reporta las preferencias

$$\begin{array}{c} \succ'_{h_1} \\ m_2 \\ m_1 \\ h_1 \end{array}$$

entonces

$$DA_M = \left\{ \begin{array}{cc} m_1 & m_2 \\ h_2 & h_1 \end{array} \right\},$$

por lo que h_1 manipula DA_M a traves de $\succ'_{h_1}$. $\square$

Sin embargo, DA_M y DA_H no son las únicas asignaciones de emparejamiento estables. El teorema del retículo es natural cuando uno busca todas las asignaciones de emparejamiento estables. En el siguiente ejemplo, se pueden encontrar 10 posibles asignaciones estables.

Ejemplo 12. *Sea el conjunto de mujeres* $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ *y el conjunto de hombres* $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$. *Sus preferencias están representadas por la tabla:*

$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$	$\succ_{m_4}$	$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$	$\succ_{h_3}$	$\succ_{h_4}$
h_1	h_2	h_3	h_4	m_4	m_3	m_2	m_1
h_2	h_1	h_4	h_3	m_3	m_4	m_1	m_2
h_3	h_4	h_1	h_2	m_2	m_1	m_4	m_3
h_4	h_3	m_2	h_1	m_1	m_2	m_3	m_4

El lector encontrará 10 asignaciones estables en este mercado.□

¿Qué se oberva en cuanto a los siguientes operadores: $\lambda = \mu \vee_M \mu'$ (mejor para las mujeres, peor para los hombres) y $\delta = \mu \wedge_M \mu'$ (peor para los hombres, mejor para las mujeres)?

Teorema 13. *(Knuth, 1976 - atribuído a Conway) (Reticulado): Cuando todas las preferencias son estrictas, si* μ' *y* π' *son asignaciones estables, entonces* λ *y* δ *son: 1) asignaciones de emparejamiento y 2) estables.*

Prueba. Primero comprobemos que $\lambda = \mu \vee_M \mu'$ es un asignacion: $\lambda(m) = h \Leftrightarrow \lambda(h) = m$.

Por el teorema de los médicos rurales, si $\lambda(m) = h$, tanto m como h tienen parejas tanto en μ como μ'. En tanto que por el Lema de decomposición, la mejor pareja de m es la peor pareja de h.

Ahora comprobemos que $\lambda = \mu \vee_M \mu'$ es estable.

Supongamos que existe un par bloqueador a λ, (m, h); por definición del bloqueo $m \succ_h \lambda(h)$ y $h \succ_m \lambda(m)$.

Caso 1: $\lambda(h) = \mu(h)$. Como $h \succ_m \mu(m)$ y $h \succ_m \mu'(m)$ por definición de λ y $m \succ_h \mu(h)$, (m, h) bloquean μ. Contradicción con su estabilidad.

Caso 2: $\lambda(m) = \mu'(m)$. Como $h \succ_m \mu(m)$ y $h \succ_m \mu'(m)$ por definición de λ y $m \succ_h \mu'(h)$, (m, h) bloquean μ'. Conradicción con su estabilidad. □

3.2. Asignaciones "Varios-a-uno"

En mercados laborales, una institución suele contratar a varios trabajadores, es decir, la asignación no es biyectiva. Para estos casos, se puede adaptar el modelo. Sea el conjunto de trabajadores $T = \{t_1, ..., t_T\}$ con preferencias definidas sobre empresas $E = \{e_1, ..., e_T\}$, en donde las empresas pueden contratar a varios trabajadores..Por lo tanto, las preferencias de las empresas están definidas sobre subconjuntos de trabajadores. La teoría no se extiende trivialmente a nuestro nuevo marco. En particular, no está asegurada la existencia de una asignación estable.

Ejemplo 14. *Sea el conjunto de trabajadores $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ y el conjunto de trabajadores $H = \{h_1, h_2\}$. El perfil de preferencias está representado en la tabla*

$$\begin{array}{ccccc} \succ_{t_1} & \succ_{t_2} & \succ_{t_3} & \succ_{e_1} & \succ_{e_2} \\ e_1 & e_2 & e_1 & t_1, t_2 & t_1 \\ e_2 & e_1 & e_2 & t_3 & t_2 \\ & & & t_2 & t_3 \\ & & & t_1 & \end{array}.$$

Buscando y analizando distintas asignaciones de emparejamiento observamos que:

$\mu^1 = \left\{ \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \\ t_1, t_2 & t_3 \end{array} \right\}$ *está bloqueada por* (e_2, t_2),

$\mu^2 = \left\{ \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & \varnothing \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \right\}$ *está bloqueada por* (e_1, t_3),

$\mu^3 = \left\{ \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & \varnothing \\ t_3 & t_2 & t_1 \end{array} \right\}$ *está bloqueada por* (e_2, t_1),

$\mu^4 = \left\{ \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & \varnothing \\ t_3 & t_1 & t_2 \end{array} \right\}$ *está bloqueada por* (e_1, t_1, t_2).

No hay ninguna asignacion estable.$\square$

¿Cómo garantizar existencia? ¿Cómo extender el algoritmo DA y que este produzca una asignación estable?

Una respuesta a estas preguntas es a través de las preferencias de las empresas que deberán ser sustituibles. Esta definición se la debemos a Roth y Sotomayor (1990) con base en Kelso y Crawford (1982).

Definición 15. *Las preferencias $\succ_e$ de una empresa e son sustituibles si, para cualquier subconjunto de trabajadores T y trabajadores $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$,*

$$t_1 \subseteq Ch(T, \succ_e) \text{ implica } t_1 \subseteq Ch(T \setminus \{t_2\}, \succ_e),$$

en donde $Ch(T, \succ_e)$ es el subconjunto preferido de e en T.

Dejamos al lector comprobar que la condición de sustituibilidad garantiza la exitencia de una asignación estable y investigar si se cumplen los teoremas de reticulado y de los médicos rurales.

Una restricción mas fuerte, propuesta por Gale y Shapley (1962) sobre las preferencias es la siguiente:

Definición 16. *Las preferencias $\succ_e$ de una empresa e son responsivas si, para cualquier subconjuntos de trabajadores T y trabajadores $t_1, t_2 \in T$*

$$\{t_1\} \cup T \succ_e \{t_2\} \cup T \Leftrightarrow \{t_1\} \succ_e \{t_2\}.$$

La condición de responsividad permite extender los resultados establecidos en el caso uno-a-uno, además de ser razonable en aplicaciones como la elección escolar.

4. El poblema de la elección escolar y la eficiencia de Pareto

4.1. Modelo

En el poblema de la elección escolar, introducido por Abdulkadiroglu y Sönmez (2003), las escuelas tienen ordenes de prioridad en vez de preferencias. Una asignación "justa" será estable; por los que los resultados anteriores se mantienen. El criterio de bienestar se ve modificado ya que ahora sólo se toman en cuenta las preferencias de los alumnos.

Definición 17. *Una asignación μ es Pareto eficiente si y sólo si no existe otra asignación μ' tal que todos los agentes prefieren μ' a μ, con preferencia estricta por lo menos para un agente.*

Una asignación justa puede que no sea eficiente en el sentido de Pareto.

Ejemplo 18. *Sea el conjunto de alumnos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y el conjunto de escuelas $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. Las preferencias de los alumnos y la lista de prioridad de las escuelas está dado por:*

$$\begin{array}{cccccc}
\succ_{a_1} & \succ_{a_2} & \succ_{a_3} & P_{e_1} & P_{e_2} & P_{e_3} \\
e_1 & e_2 & e_1 & a_2 & a_1 & a_1 \\
e_2 & e_1 & e_3 & a_3 & a_2 & a_3 \\
e_3 & e_1 & e_2 & a_1 & a_3 & a_2
\end{array}$$

La asignación estable preferida por los alumnos es

$$\overline{\mu}_a = \left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ e_2 & e_1 & e_3 \end{array} \right\}.$$

Sin embargo, $\overline{\mu}_a$ es dominada en el sentido de Pareto por μ

$$\mu = \left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \right\}.$$

□

Para resolver dicho problema, introducimos un nuevo mecanismo que permite encontrar siempre una asignación eficiente en el sentido de Pareto.

4.2. El Ciclo de Intercambios Optimales (Top Trading Cycle TTC)

Este mecanismo fue publicado por Shapley y Scarf (1974) aunque es atribuído a Gale.

El mecanismo consiste en representar el problema por un grafo e iterar el siguiente procedimento:

1. A cada escuela se le asigna un nodo.
2. El alumno que tiene prioridad sobre una escuela representa sobre el nodo correspondiente y apunta o señala la escuela que más prefiere.
3. Se llevan a cabo los intercambios marcados por los ciclos y se eliminan a los alumnos y escuelas involucrados.
4. El proceso acaba cuando todos los alumos quedan asignados.

Ejemplo 19. *El mecanismo TTC llega a la siguente asignación:*

$$\mu^{TTC} = \left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \right\}.$$

□

Una propriedad que resultará ser relevante en la teoría del emparejameinto es la denominada *"non-bossiness"*.

Definición 20. *Un mecanismo M es "non bossy" si no existe ningún alumno a y preferencias $\succ_a$, $\succ'_a$ y $\succ_{-a}$ tales que*

$$M_i(\succ_a, \succ_{-a}) = M_i(\succ'_a, \succ_{-a})$$

sin embargo,

$$M(\succ_a, \succ_{-a}) \neq M(\succ'_a, \succ_{-a}).$$

El mecanismo TTC cumple con esta propriedad.

Teorema 21. *(Papai 2000) TTC es eficiente en el sentido de Pareto, no manipulable por grupos, y "non bossy".*

Prueba. Ver Papai (2000). Demuestra en particular que no manipulabilidad (*strategy proofness*) aunado con non bossiness es equivalente a no manipulabilidad en grupo (*group strategy proofness*). □

La elección entre el DA y TTC replica la decisión entre justicia y eficiencia en el sentido de Pareto. ¿Cuándo conciden? H. Ergin (Econometrica 2002) contesta a la respuesta introduciendo la condición de aciclicidad.

Definición 22. *Sea un estructura de prioridades $\succ$ y un vector de cuotas q. Un ciclo es constituido por un conjunto de distintas escuelas $e_1 \neq e_2$ y alumnos a_1, a_2, a_3 tales que:*

1. *Condición de ciclo:* $a_1 \succ_{e_1} a_2 \succ_{e1} a_3 \succ_{e2} a_1$
2. *Condición de escasez: Existen conjuntos de alumnos, posiblemente vacíos, tales que* A_{e_1}, $A_{e_2} \subset A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ *tales que* $A_{e_1} \subset U_{e_1}(a_2)$, $A_{e2} \subset U_{e_2}(a_1)$, $\mid A_{e_1} \mid = q_{e_1} - 1$ *y* $\mid A_{e_2} \mid = q_{e_2} - 1$, *en donde* $U_e(a) = \{a' \in A \mid a' \succ_e a\}$.

Una estructura de prioridades es acíclica si no tiene ciclos. En relación a ello, existe un resultado que vincula el último concepto con eficiencia y no manipulabilidad.

Denotemos como $f^{\succeq}$ la regla que asigna cualquier perfil el resultado del DA.

Teorema 23. *(Ergin, 2002). Para cualquier par $(\succeq, q)$ los siguientes son equivalentes.*

$f^{\succeq}$ *es:*

1. *eficiente en el sentido de Pareto,*
2. *no manipulable en grupo,*
3. *consistente; y,*
4. *acíclico.*

Prueba. Ver Ergin (2002) □

Por lo tanto, sabemos desde Ergin (2002) cuándo podemos garantizar que una asignación es justa y eficiente en el sentido de Pareto. Cuando no se cumple la condición de aciclicidad, el dilema queda abierto: optar por el criterio de justicia, en cuyo caso uno usará el algoritmo DA; o bien, eficiencia en el sentido de Pareto, en donde el mecanismo adecuado será el TTC.

Este último resultado generó una vasta discusión en cuanto a los costos de oportunidad entre la eficiencia y la justicia. Kesten (2010) observó lo siguiente: cuando una asignación justa no es Pareto eficiente, existe al menos un agente "bossy". Además, este agente bossy genera daño al resto de los agentes, aún cuando no obtenga nada. Es decir, en el caso de que los agentes bossy "concedan" no hacer alguna petición a la escuela disputada (la cual no le era atribuida en ninguna asignación estable) permite que exista una mejora en el sentido de Pareto.

Kesten propone el mecanismo llamado Efficiency Adjusted Deferred Acceptance Mechanism (EADAM) que funciona de la siguiente manera:

1. se corre el DA,
2. si la asignación generada por el DA es eficiente en el sentido de Pareto, el algormito para. En caso contrario, se busca al último agente bossy en la corrida del DA y en sus preferencias se elimina su petición sobre la escuela en disputa y se regresa al primer punto.

Al proceder de la anterior forma, el EADAM nos permite llegar a auna asignación eficiente en el sentido de Pareto, siendo el mecanismo a prueba de estrategias de parte de los alumnos. Este procedimiento es atractivo porque al momento de sobrellevar sus prioridades, los agentes bossy no son afectados en su asignación.

4.3. El dilema de la multiplicidad

Lo que no explica Kesten (2010) en su artículo son las razones por las que es necesario proceder por inducción hacia atrás para que funcione su mecanismo.

Otra pregunta abierta se refiere a las propiedades del resultado del EADAM. Finalmente, su resultado sólo es una posible asignación eficiente en el sentido de Pareto y también es Pareto superior a la asignación estable preferido por los alumnos. ¿Cuáles son las posibles propiedades que hacen esta solución más atractivas que el resto?

Recepción: 04/04/2017 Aceptación: 02/06/2017

Referencias

[1] Abdulkadiroglu A. and Sönmez T. (2003) School Choice: a mechanism Design Approach. American Economic Review, 93 (3), 729-747.

[2] Dubins, L y Freedman, D. (1981) Macchiavelli and the Gale-Shapley Algorithm. American Mathematical Monthly 16, 485-494.

[3] Ergin H. (2002) Efficient resource alocation on the basis of prioritirs. Econometrica, 70, 6, 2489-2497.

[4] Gale D. y Shapley L. (1962) College admission and the stability of marriage. American Mathematical Monthly 69, 9-15.

[5] Kelso, A. y Crawford, V. (1982) Job Matching, Coalition, Formation, and Gross Substitutes. Econometrica 50, 1483-1504.

[6] Kesten, O (2010) School Choice with Consent. The Quarterly Journal of Economics 125 (3) 1297-1348.

[7] Knuth, D. (1976) Mariages stables. Presses de l'Université de Montréal.

[8] McVitie y Wilson. (1971) The Stable Marriage Problem, Communications of the ACM, 486-493.

[9] Pápai, S. (2000) Strategyproof Assignement by Hierarchical Exchange. Econometrica 68 (6) 1403-1433.

[10] Roth, A. (1982) The Economics of Matching: Stability and Incentives. Mathematics of Operations Research 7, 617-628.

[11] Roth, A. (1986) On the Allocation of Residents to Rural Hospitals: A General Property of Two-Sided Matching Markets. Econometrica 54 (2) 425-427.

[12] Roth, A. E. y Sotomayor M. (1990) Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis. Cambridge, Cambridge University Press.

[13] Shapley, L. y Scarf, H. (1974). On Cores and Indivisibility. Journal of Mathematical Economics 1, 23-37.