PERSPECTIVAS *Revista de Análisis de Economía, Comercio y Negocios Internacionales*
Volumen 11 / No. 2 / Julio - Diciembre 2017 / 5 - 18
ISSN 2007-2104

La solución igualitaria para juegos cooperativos de elección múltiple con posibilidades de comunicación dadas por un árbol

Jony Rojas Rojas
Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua
Managua, Nicaragua
rojasr@cimat.mx

Resumen

En este trabajo estudiamos juegos cooperativos de elección múltiple con comunicación limitada, es decir, la comunicación entre los jugadores es a través de los ejes de una gráfica no dirigida cuyos nodos son los jugadores. Bajo este contexto, a cada juego cooperativo de elección múltiple con comunicación limitada se le asocia un juego cooperativo de elección múltiple "clásico"; y si la gráfica es un árbol se demuestra que este juego se expresa de manera única como combinación lineal de los juegos de mínimo esfuerzo cuyo soporte es conectado. También, definimos y caracterizamos la solución igualitaria para juegos de elección múltiple con comunicación dada por los ejes de un árbol. Finalmente, proporcionamos una posible aplicación económica de la solución igualitaria.

Palabras clave: Solución igualitaria; Gráfica de comunicación; Juegos cooperativos.
Clasificación JEL: C71

Abstract

In this paper we study multi-choice cooperative games with limited communication, that is, the communication between the players is through the edges of an undirected graph whose nodes are the players. In this context, each multi-choice cooperative game with limited communication is associated with a "classic" multi-choice cooperative game and, if the graph is a tree, it is shown that this game is expressed in a unique way as a linear combination of the minimum effort games whose support is connected. Also, we define and characterize the egalitarian solution for multi-choice games with communication given by the edges of a tree. Finally, we provide a possible economic application of the egalitarian solution.

Keywords: Egalitarian solution; communication graph; cooperative games
JEL classification: C71

1. Introducción

La posibilidad de establecer vías de comunicación, entre diferentes agentes, juega un papel muy importante a la hora de coordinarse para realizar alguna actividad, ya sea económica o social. En teoría de juegos cooperativos la posibilidad de comunicación entre los agentes fue considerada hasta en el año 1977 en el trabajo "Graphs and cooperation in games", elaborado por Myerson. Para modelar la posibilidad de cominicación entre los jugadores de un juego cooperativo, Myerson considera los ejes de una gráfica no dirigida como las vías de comunicación cuando los nodos son los jugadores. Después de este trabajo surgen otros con la misma idea de Myerson, aunque en diferentes situaciones, por ejemplo Owen (1986) determina una base para el conjunto de juegos cooperativos que se derivan de todos los juegos cooperativos con posibilidades de comunicación limitada por los ejes de un árbol, Herings et al (2008) definen y caracterizan la solución del árbol promedio para juegos cooperativos con posibilidades de comunicación dada por un bosque y Béal et al (2012) introducen la posibilidad de comunicación dada por una gráfica no dirigida a los juegos cooperativos de elección múltiple y caracterizan la solución de Herings en este contexto.

Para este trabajo retomamos la definición de juego restringido, inicialmente propuesto en Myerson (1977), de Béal et al (2012). A partir de ello demostramos que una base para el conjunto de juegos cooperativos de elección múltiple que se derivan de todos los juegos cooperativos de elección múltiple con comunicación dada por los ejes de un árbol es el conjunto de juegos de mínimo esfuerzo cuyo soporte es conectado. Además, definimos y caracterizamos la solución igualitaria para juegos cooperativos de elección múltiple con gráfica, cuando la gráfica es un árbol.

El trabajo está dividido en 6 partes. En la parte 2 presentamos los prerrequisitos necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo, la parte 3 contiene nuestro primer teorema, el cual juega un rol importante en la caracterización de la solución igualitaria (parte 4). En la parte 5 proporcionamos una posible aplicación económica de la solución igualitaria, y por último las conclusiones.

2. Preliminares

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto finito de jugadores de tamaño $n \in \mathbb{N}$, con n fijo. En un juego cooperativo de elección múltiple, cada jugador $i \in N$

tiene un número finito de niveles de actividad que él o ella puede elegir para jugar. Sea $A_i = \{0, 1, \ldots, m_i\}$ el conjunto finito de niveles de actividad del jugador $i \in N$, donde la acción 0 significa que el jugador i no participa. En este trabajo asumimos que $m_i = m$ para todo $i \in N$, es decir, el nivel decisivo para todos los jugadores es el mismo. Para cada $\emptyset \neq S \subseteq N$, sea A_S el producto cartesiano $\times_{i \in S} A_i$. Cada elemento $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de A_N es llamado una **coalición**. Usaremos la notación $(x_S, x_{N \setminus S})$ en lugar de x para enfatizar el nivel de actividad de los jugadores en S y $N \setminus S$, respectivamente. El **soporte** de una coalición $x \in A_N$, que denotamos por $S(x)$, es el conjunto de jugadores activos en x, es decir, $S(x) = \{i \in N | x_i > 0\}$. Escribiremos m_N y 0_N en lugar de $(m, \ldots, m)$ y $(0, \ldots, 0)$, respectivamente. Dado un subconjunto $S \subseteq N$, definimos el vector $e^S \in \mathbb{R}^n$ como

$$e_i^S = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por simplicidad escribiremos e^j en lugar de $e^{\{j\}}$.

Una **función característica** es una función $v : A_N \to \mathbb{R}$ tal que $v(0_N) = 0$. La función v asigna a cada coalición $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A_N$ la valía que los jugadores pueden obtener cuando cada jugador juega en el nivel $x_i \in A_i$. Un **juego cooperativo de elección múltiple** en N es un par (A_N, v), donde A_N es el conjunto de coaliciones y v es la función característica. Denotaremos por Γ^N al conjunto de juegos cooperativos de elección múltiple con conjunto de jugadores N.

En este trabajo, estudiamos juegos cooperativos de elección múltiple con posibilidades de comunicación representada por una gráfica no dirigida como en Myerson (1977). Una **gráfica no dirigida** es un par (N, L), donde los jugadores son los nodos de la gráfica y L es la colección de ejes, es decir, $L \subseteq \{\{i, j\} \subseteq N : i \neq j\}$. Para cada $C \in 2^N$, la gráfica $(C, L(C))$ con $L(C) = L \cap (C \times C)$ es llamada la **subgráfica** de (N, L) en C.

Una secuencia finita de distintos jugadores $(i_1, \ldots, i_k)$ es un **camino** en la gráfica (N, L) si $k \geq 2$ y $\{i_h, i_{h+1}\} \in L$ para todo $h = 1, \ldots, k-1$. Un **ciclo** en (N, L) es un camino donde $k \geq 3$ y $\{i_1, i_k\} \in L$. Una gráfica no dirigida es **libre de ciclos** si ésta no contiene ciclos. Dos jugadores $i, j \in N$ están **conectados** en la gráfica (N, L) si existe un camino $(i_1, \ldots, i_k)$ con $i_1 = i$ y $i_k = j$. Una gráfica (N, L) es **conectada** si cualesquiera dos nodos $i, j \in N$ están conectados en

(N, L). Dada una gráfica (N, L), un conjunto de jugadores C se dice que es un **subconjunto conectado** de N cuando la subgráfica $(C, L(C))$ es conectada. Un subconjunto C de N es una **componente** de (N, L) si la subgráfica $(C, L(C))$ es conectada y para cualquier $j \in N \setminus C$, la subgráfica $(C \cup \{j\}, L(C \cup \{j\}))$ no es conectada. Denotaremos por $C^L(C)$ la colección de subconjuntos conectados de C en la subgráfica $(C, L(C))$ de la gráfica (N, L) y por $C_*^L(C)$ la colección de todas las componentes de $(C, L(C))$. Notemos que $C_*^L(N) \subseteq C^L(C)$. Además, si (N, L) es libre de ciclos, entonces existe exactamente un camino entre cualquier par de jugadores distintos que pertenecen a la misma componenete. Una gráfica libre de ciclos es conocida como un **bosque**. Si el bosque tiene exactamente una componenete, entonces se llama **árbol**.

3. Juegos cooperativos de elección múltiple con posibilidades de comunicación dada por un árbol

En esta parte del trabajo tomaremos prestada la notación de Béal et al. (2012). La combinación de un juego cooperativo de elección múltiple y una gráfica en N resulta en un **juego con gráfica** dado por (A_N, v, L), donde A_N es el conjunto de coaliciones, v es la función característica y L es el conjunto de enlaces de comunicación en la gráfica (N, L). Denotaremos por $\mathcal{G}^c$ al **conjunto de juegos con gráfica** y por $\mathcal{G}_*^c$ al **conjunto de juegos cuya gráfica es un árbol**. En un juego con gráfica $(A_N, v, L) \in \mathcal{G}^c$, sólo los miembros del soporte de la coalición $x \in A_N$ pueden cooperar y ganar su valía $v(x)$, siempre que ellos puedan comunicarse a través de los ejes de la gráfica (N, L), es decir, si $S(x) \in C^L(N)$. Si $S(x) \notin C^L(N)$, entonces, al igual que en Myerson (1977), los jugadores en $S(x)$ sólo pueden realizar la suma de las valías de las componentes en la subgráfica $(S(x), L(S(x)))$. Luego, dado un juego con gráfica (A_N, v, L) se puede definir un juego de elección múltiple clásico (A_N, v^L), donde

$$v^L(x) = \sum_{C \in C_*^L(S(x))} v(x_C, 0_{N \setminus C}) \quad \forall x \in A_N.$$

Una **solución** para un juego con gráfica es una aplicación

$$\varphi : \mathcal{G}^c \to \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Esto es, una solución φ asigna a cada juego con gráfica (A_N, v, L) una colección de valores, uno para cada nivel de actividad por cada jugador.

En la literatura de teoría de juegos cooperativos de elección múltiple es conocido que el conjunto Γ^N es un espacio vectorial de dimensión finita. Una base para Γ^N es dada por Hsiao and Raghavan (1993), los cuales demuestran que toda función característica $v : A_N \to \mathbb{R}$ se escribe de la siguiente forma:

$$v = \sum_{x \neq 0_N} \Delta^x(v) u_x, \tag{1}$$

donde

$$\Delta^x(v) = \sum_{S \subseteq S(x)} (-1)^{|S|} v(x - e^S)$$

y

$$u_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El juego cooperativo de elección múltiple u_x se conoce como juego de **mínimo esfuerzo**.

A continuación establecemos nuestro primer resultado, el cual asegura que en cada juego cooperativo de elección múltiple (A_N, v^L), la función v^L se escribe como combinación lineal de los juegos de mínimo esfuerzo cuyo soporte es conectado, siempre que (N, L) sea un árbol.

Teorema 3.1. *Para cada árbol (N, L), la imagen de la aplicación $F_L : \Gamma^N \to \Gamma^N$, definida como $F_L(v) = v^L$, es el subespacio de Γ^N generado por los juegos de mínimo esfuerzo u_x, donde $S(x) \in C^L(N)$. Estos juegos forman una base para la imagen de F_L, que denotamos por $IM(F_L)$.*

Demostración. Sea (N, L) un árbol. Dado que la aplicación F_L es lineal, entonces sólo debemos probar que $F_L(u_x)$ es una combinación lineal de los juegos de mínimo esfuerzo cuyo soporte es conectado.

Sea $x \in A_N \setminus \{0_N\}$ tal que $S(x) \notin C^L(N)$. Entonces $F_L(u_x) = c_x$, donde

$$c_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \text{ y } \exists C \in C^L(N) \text{ tal que } S(x) \subset C \subset S(y), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sabemos que c_x se escribe como combinación lineal de los juegos de mínimo esfuerzo, es decir,

$$\begin{aligned} c_x &= \sum_{z \neq 0_N} \Delta^z(c_x) u_z \\ &= \sum_{z \geq x} \Delta^z(c_x) u_z. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\Delta^z(c_x) = 0$ para cada $z \geq x$ tal que $S(z) \notin C^L(N)$. Para demostrar nuestra afirmación, supongamos que $z \geq x$ y $S(z) \notin C^L(N)$. Es fácil ver que si $z = x$, entonces $\Delta^z(c_x) = 0$.

Ahora, si $z > x$ y no existe $C \in C^L(N)$ tal que $S(x) \subset C \subset S(z)$, entonces $c_x(z - e^S) = 0$ para todo $S \subseteq S(z)$ tal que $S(x) \subseteq S$, lo cual implica que $\Delta^z(c_x) = 0$.

Supongamos que $z > x$ y existe $C \in C^L(N)$ tal que $S(x) \subset C \subset S(z)$. Esto implica que existe una componente $D \in C_*^{L(S(z))}(S(z))$ tal que $C \subset D$. Notemos que cualquier $T \subseteq S(z)$ se escribe como $T = T_1 \cup T_2$, donde $T_1 = D \cap T$ y $T_2 = (S(z) - D) \cap T$. Dado que $S(x) \subset D$, $|S(z)| - |D| \geq 1$ y $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta^z(c_x) &= \sum_{T_1 \subseteq D} \sum_{T_2 \subseteq (S(z)-D)} (-1)^{|T_1|+|T_2|} c_x(z - e^{T_1 \cup T_2}) \\ &= \sum_{T_1 \subseteq D} \sum_{T_2 \subseteq (S(z)-D)} (-1)^{|T_1|+|T_2|} c_x(z - e^{T_1}) \\ &= \sum_{T_1 \subseteq D} (-1)^{|T_1|} c_x(z - e^{T_1}) \left[\sum_{T_2 \subseteq (S(z)-D)} (-1)^{|T_2|} \right] \\ &= \sum_{T_1 \subseteq D} (-1)^{|T_1|} c_x(z - e^{T_1}) \left[\sum_{l=0}^{|S(z)|-|D|} (-1)^l \binom{|S(z)| - |D|}{l} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\Delta^z(c_x) = 0$ para cada $z \geq x$ tal que $S(z) \notin C^L(N)$, entonces c_x es una combinación lineal de los juegos de mínimo esfuerzo cuyo soporte es conectado. Es claro que, si $S(x) \in C^L(N)$, entonces $F_L(u_x) = u_x$. Luego, podemos concluir que el conjunto $\{u_x | x \neq 0_N, S(x) \in C^L(N)\}$ genera al subespacio $IM(F_L)$.

Como el conjunto $\{u_x | x \neq 0_N, S(x) \in C^L(N)\}$ es linealmente independiente y genera a $IM(F_L)$, entonces es una base. $\square$

4. La solución igualitaria para juegos cooperativos de elección múltiple con posibilidades de comunicación dada por un árbol

Si $(A_N, v, L) \in \mathcal{G}_*^c$, entonces (N, L) es un árbol y $N \in C^L(N)$, y por lo tanto los agentes pueden comunicarse para obtener $v(m_N)$. Así, es razonable pedir que una solución satisfaga el siguiente axioma:

Eficiencia (E). Para todo $(A_N, v, L) \in \mathcal{G}_*^c$,

$$\sum_{i \in N} \sum_{l \in A_i} \varphi_{il}(A_N, v, L) = v(m_N).$$

El siguiente axioma es estándar en la literatura de teoría de juegos cooperativos y en general se usa para extender una solución en la base a todo el espacio de juegos.

Linealidad (L). Para todo $(A_N, v, L), (A_N, w, L) \in \mathcal{G}_*^c$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(A_N, \alpha v + \beta w, L) = \alpha \varphi(A_N, v, L) + \beta \varphi(A_N, v, L).$$

Peters y Zank en (2005) definen su solución para juegos cooperativos de elección múltiple sin gráfica en los juegos de mínimo esfurzo y le imponen la condición de linealidad. Más precisamente:

Definición 1. *La solución de Peters y Zank, denotada como ε, es aquella solución lineal tal que para todo $(A_N, v) \in \Gamma^N$, $x \in A_N \setminus \{0_N\}$, $i \in N$ y cualquier $l \in A_i$ asigna el valor siguiente:*

$$\varepsilon_{il}(A_N, u_x) = \begin{cases} \frac{1}{|S(x)|} & \text{si } x_i = l \text{ y } x_i \neq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2}$$

La solución igualitaria para juegos con gráfica la definimos como la solución de Peters y Zank del juego que se deriva del juego con gráfica. Es decir,

Definición 2. *La solución igualitaria, que denotamos como ϕ, es aquella solución tal que para todo $(A_N, v, L) \in \mathcal{G}^c$, $\phi(A_N, v, L) = \varepsilon(A_N, v^L)$.*

Observe que si $x \in A_N \setminus \{0_N\}$ es tal que $S(x) \in C^L(N)$, entonces

$$\phi_{il}(A_N, u_x, L) = \begin{cases} \frac{1}{|S(x)|} & \text{si } x_i = l \text{ y } x_i \neq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3}$$

Esto significa que, si (N, L) es un árbol, entonces la solución igualitaria distribuye la valía $u_x(m, \ldots, m) = 1$ en partes iguales entre los jugadores en $S(x)$ sin importar la diferencia entre los niveles de cada jugador en la coalisión x, siempre que $S(x) \in C^L(N)$. Esto refleja tres consideraciones. La primera, si un jugador que juega a un determinado nivel no causa efecto en la valía de un juego con gráfica al disminuir su nivel en 1, entonces el jugador por ese nivel debe recibir cero. Segundo, si la valía de un juego con gráfica no cambia cuando un jugador juega en un determinado nivel y luego en otro, siempre que el resto de jugadores mantiene su nivel de actividad, entonces el pago para ese jugador en ambos niveles debe ser el mismo. Por último, si dos jugadores distintos provocan el mismo efecto en la valía de un juego con gráfica al jugar en un nivel determinado, entonces el pago de esos jugadores por ese nivel debe ser el mismo. Las dos primeras consideraciones son capturadas por Peters y Zank en (2005) en los axiomas de cero contribuciones y niveles sustitutos, la tercera consideración la capturamos en el axioma de jugadores sustitutos por nivel. A continuación proporcionamos adaptaciones de los axiomas propuestos en (2005) a nuestro contexto.

Cero contribuciones (CC). Sean $(A_N, v, L) \in \mathcal{G}_*^c$, $i \in N$ y $l \in A_i$. Si $v(x) - v^L(x - e^i) = 0$ para todo $x \in A_N$ tal que $S(x) \in C^L(N)$ y $x_i = l$, entonces

$$\phi_{il}(A_N, v, L) = 0.$$

Niveles Sustitutos (NS). Sean $(A_N, v, L) \in \mathcal{G}_*^c$, $i \in N$ y $l, l' \in A_i$. Si $v(x) - v^L(x - e^i) = v(y) - v^L(y - e^i)$ para todo $x, y \in A_N$ tal que $S(x), S(y) \in C^L(N)$, $x_i = l$, $y_i = l'$ y $x_j = y_j$ para $j \neq i$, entonces

$$\phi_{il}(A_N, v, L) = \phi_{il'}(A_N, v, L).$$

En un juego de elección múltiple con gráfica el axioma de anonimato propuesto en (2005) no se cumple en general, ya que para dos jugadores cualesquiera $i, j \in N$ puede suceder que $\{i, j\} \notin L$. Por lo cual proponemos el siguiente axioma que captura la tercera consideración expuesta anteriormente.

Agentes sustitutos por nivel (ASN). Sean $(A_N, v, L) \in \mathcal{G}_*^c$, $i, j \in N$ y $l \in \{1, \ldots, m\}$. Si $v^L(x - e^i) = v^L(x - e^j)$ para todo $x \in A_N$ tal que $S(x) \in C^L(N)$ y $x_i = y_j = l$, entonces

$$\phi_{il}(A_N, v, L) = \phi_{jl}(A_N, v, L).$$

Ahora estamos listos para enunciar el segundo resultado de este trabajo:

Teorema 4.1. *La solución igualitaria ϕ es la única solución que satisface los axiomas E, L, CC, NS y ASN en el conjunto $\mathcal{G}_*^c$.*

Demostración. Sean $(A_N, v, L) \in \mathcal{G}_*^c$ y $z \in A_N \setminus \{0_N\}$ tal que $S(z) \in C^L(N)$. De los resultados de Peters y Zank (2005), se sigue que la solución igualitaria satisface los axiomas E, L, CC y NS. Para probar que satisface el axioma ASN, supongamos que para $i, j \in N$ y $l \in \{1, \ldots, m\}$ se cumplen las hipótesis del axioma ASN. Entonces, $v^L(x-e^i) = v^L(x-e^j)$ para todo $x \in A_N$ tal que $S(x) \in C^L(N)$ y $x_i = y_j = l$, lo cual implica que $v^L(x) - v^L(x - e^i) = v^L(x) - v^L(x - e^j)$ para todo $x \in A_N$ tal que $S(x) \in C^L(N)$, $x_i = y_j = l$ y $x_k \in \{0, m\}$ para todo $k \in N \setminus \{i, j\}$. Luego, por el Teorema 4.1 de Peters y Zank (2005), $\varepsilon_{il}(A_N, v^L) = \varepsilon_{jl}(A_N, v^L)$. De donde concluimos que la solución igualitaria satisface el axioma ASN.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existe otra solución φ para juegos con gráfica, donde la gráfica es un árbol, que satisface los axiomas E, L, CC, NS y ASN. Por la eficiencia de φ, se tiene que

$$\mu = \sum_{i \in N} \sum_{l=0}^{m} \varphi_{il}(A_N, \mu u_z, L),$$

con $\mu \in \mathbb{R}$. Por cero contribuciones $\varphi_{il}(A_N, \mu u_z, L) = 0$ para todo $i \in N \setminus S(z)$ y $\varphi_{il}(A_N, \mu u_z, L) = 0$ para todo $i \in S(z)$ tal que $l \neq z_i$. Si sustituimos estos valores en la ecuación anterior, obtenemos

$$\mu = \sum_{i \in S(z)} \varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L). \tag{4}$$

Sea $l' = \max\{z_i : i \in S(z)\}$, entonces la ecuación (4) puede escribirse como

$$\mu = \sum_{i \in S(z): z_i < l'} \varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L) + \sum_{i \in S(z): z_i = l'} \varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L). \tag{5}$$

Dado que φ satisface el axioma ASN, entonces

$$\mu = \sum_{i \in S(z): z_i < l'} \varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L) + |\{i \in S(z) : z_i = l'\}| \varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L). \quad (6)$$

Sea $k = |S(z)| - |\{i \in S(z) : z_i = l'\}|$. Probaremos por inducción sobre k que $\varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L) = \phi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L)$ para todo $i \in S(z)$.

Si $k = 0$, entonces la ecuación (6) se escribe como

$$\mu = |S(z)| \varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L).$$

Esta última igualdad implica que

$$\varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L) = \frac{\mu}{|S(z)|} = \phi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L), \quad \forall i \in S(z).$$

Ahora, asumimos que

$$\varphi_{iy_i}(A_N, \mu u_y, L) = \frac{\mu}{|S(y)|},$$

para todo $i \in S(y)$ y todo $y \in A_N$ tal que

- $S(y) = S(z)$ y
- $|\{i \in S(y) : y_i = l'\}| = |\{i \in S(z) : z_i = l'\}| + 1.$

Consideremos un $i \in S(z)$ con $z_i < l'$ y el juego cooperativo de elección múltiple (A_N, w) con

$$w = \mu u_z + \mu u_{z'},$$

donde z' se define como

$$z'_j = \begin{cases} l' & \text{si } j = i, \\ z_j & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $S(z') = S(z)$, lo cual implica que $w^L = w$. Es claro que los niveles z_i y l' son sustitutos para el jugador $i \in S(z)$ en el juego w, por tanto $\varphi_{iz_i}(A_N, w, L) = \varphi_{il'}(A_N, w, L)$. Por cero contribuciones y linealidad se tiene que

$$\varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L) = \varphi_{iz_i}(A_N, w, L) = \varphi_{il'}(A_N, w, L) = \varphi_{il'}(A_N, \mu u_{z'}, L). \quad (7)$$

Como $S(z') = S(z)$ y $|\{i \in S(z') : z'_i = l'\}| = |\{i \in S(z) : z_i = l'\}| + 1$, entonces por hipótesis de inducción tenemos que

$$\varphi_{il'}(A_N, \mu u_{z'}, L) = \frac{\mu}{|S(z')|}. \tag{8}$$

Combinando (7) y (8) obtenemos

$$\varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L) = \frac{\mu}{|S(z')|}. \tag{9}$$

De la ecuación (9), la igualdad $S(z') = S(z)$ y que $i \in S(z)$ con $z_i < l'$ es arbitrario, se sigue que

$$\varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L) = \frac{\mu}{|S(z)|}, \tag{10}$$

para todo $i \in S(z)$ con $z_i < l'$. La ecuación (10) permite reescribir la ecuación (6) de la siguiente manera

$$\mu = (|S(z)| - |\{i \in S(z) : z_i = l'\}|) \frac{\mu}{|S(z)|} + |\{i \in S(z) : z_i = l'\}| \varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L),$$

lo cual implica que

$$\varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L) = \frac{\mu}{|S(z)|}, \tag{11}$$

para todo $i \in S(z)$ tal que $z_i = l'$. De las igualdades (10) y (11) deducimos que $\varphi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L) = \phi_{iz_i}(A_N, \mu u_z, L)$ para todo $i \in N$. Así, por el Teorema 3.1 y que φ satisface el axioma de linealidad se sigue que

$$\varphi(A_N, v, L) = \phi(A_N, v, L).$$

□

5. Aplicación

En esta sección presentamos una aplicación de la solución igualitaria al modelo cooperativo de formación de precios propuesto en Hotelling (1929).

Consideremos una ciudad lineal en cuyos extremos están localizadas dos firmas (1 y 2) que producen un bien homogeneo con costo de producción cero. Existe un continuo de consumidores distribuidos de manera uniforme a lo largo de la ciudad, la cual supondremos que tiene longitud uno. Cada firma $i = 1, 2$ elige un único precio $p_i \in A = \{0, 1, \ldots, m\}$, donde el nivel de actividad $p_i = 0$ significa que la firma i no participa en el mercado. Cada consumidor compra una única unidad del bien que produce la firma (1 ó 2) que minimiza los costos totales, es decir, minimiza la suma del precio más un costo de trasnporte lineal. Este modelo fue propuesto en Hotelling (1929), el cual demuestra que si las dos firmas participan en el mercado, entonces la demanda de la firma 1 es

$$\frac{p_2 - p_1 + t}{2t},$$

mientras que la demanda de la firma 2 es

$$\frac{p_1 - p_2 + t}{2t},$$

donde t representa el costo fijo de transporte. Suponemos que $t > m$, para asegurar que la demanda de cada firma es positiva para cada posible precio. Denotemos por $\pi_i(p_1, p_2)$ el beneficio de la firma $i = 1, 2$. Si sólo la firma 1(2) participa en el mercado, entonces su demanda es 1. Luego,

$$\pi_1(0, p_2) = \pi_2(p_1, 0) = 0, \quad \pi_1(p_1, 0) = p_1 \text{ y } \pi_2(0, p_2) = p_2.$$

En cambio, si ambas firmas participan en el mercado, su beneficio total es

$$\pi_1(p_1, p_2) = \frac{p_1\,(p_2 - p_1 + t)}{2t} \quad \text{y} \quad \pi_2(p_1, p_2) = \frac{p_2\,(p_1 - p_2 + t)}{2t}.$$

Si se define $v : A_N = A \times A \to \mathbb{R}$ como

$$v(p_1, p_2) = \pi_2(p_1, p_2) + \pi_2(p_1, p_2),$$

se obtiene un juego con gráfica (A_N, v, L), donde $N = \{1, 2\}$ y $L = \{N\}$.

Un poco de manipulación algebraica demuestra que

$$\Delta^p(v) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } p_1, p_2 > 1, \\ \frac{3-2p_1-t}{2t} & \text{si } p_1 > 1 \text{ y } p_2 = 1, \\ \frac{3-2p_2-t}{2t} & \text{si } p_1 = 1 \text{ y } p_2 > 1, \\ -1 & \text{si } p_1 = p_2 = 1, \\ 1 & \text{si } p_1 \geq 1 \text{ y } p_2 = 0, \\ 1 & \text{si } p_1 = 0 \text{ y } p_2 \geq 1. \end{cases} \tag{12}$$

Usando el hecho que para este caso $F_L(v) = v$ y la ecuación (1) se tiene que

$$v = \sum_{k=1}^{m} \left(u_{(k,0)} + u_{(0,k)}\right) + \sum_{k=2}^{m} \left[\frac{3-2k-t}{2t}\right] \left(u_{(k,1)} + u_{(1,k)}\right) +$$

$$\sum_{(p_1,p_2)>(1,1)} \frac{1}{t} u_{(p_1,p_2)} - u_{(1,1)},$$

lo cual implica, por la linealidad de la solución igualitaria, que

$$\phi(A_N, v, L) = \sum_{k=1}^{m} \left(\phi(u_{(k,0)}) + \phi(u_{(0,k)})\right) +$$

$$\sum_{k=2}^{m} \left[\frac{3-2k-t}{2t}\right] \left(\phi(u_{(k,1)}) + \phi(u_{(1,k)})\right) + \sum_{(p_1,p_2)>(1,1)} \frac{1}{t} \phi(u_{(p_1,p_2)}) - \phi(u_{(1,1)}).$$

Luego,

$$\phi_{il}(A_N, v, L) = \begin{cases} \frac{3t+2m-2l+1}{4t} & \text{si } l > 1, \\ \\ \frac{1}{2} + \frac{(m-1)(1-m-t)}{4t} & \text{si } l = 1, \end{cases} \tag{13}$$

para todo $i = 1, 2$.

Cada modificación en el pago $\phi_{ip_i}(A_N, v, L)$ representa la distribución del beneficio total generado por ambas firmas, el cual puede atribuirse al precio p_i impuesto por la firma $i = 1, 2$.

6. Conclusiones

A modo de conclusión queremos hacer notar que en nuestra definición de la solución igualitaria admitimos cualquier gráfica como posibilidad de comunicación, por lo cual sería interesante proporcionar una caracterización de la solución igualitaria en términos de justicia al estilo de Myerson (1977). Un corolario inmediato de un resultado como este es la caracterización de la solución de Peters y Zank por medio de un axioma de justicia, cuando la gráfica en consideración es la completa.

Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros anónimos por sus útiles comentarios. También, a Gloria Parrilla Rivera, Jorge Velásquez Benavidez y Roberto Carlos Picado Reyes por sus observaciones y la oportunidad brindada de discutir las ideas del documento.

Recepción: 15/04/2017 Aceptación: 09/06/2017

Referencias

[1] Béal, S., Rémila, E., & Solal, P. (2012) The average tree solution for multichoice forest games. Annals of Operations Research, 196, 27-51.

[2] Hotelling, H. (1929) Stability in competition. Economic Journal, 39, 40-57.

[3] Herings, P., Van der Laan, G., & Talman, D. (2008) The average tree solution for cycle-free graph games. Games and Economic Behavior, 62, 77-92.

[4] Hsiano, C. R., & Raghavan, T. E. S. (1993) Shapley value for multi-choice cooperative games. Games and Economic Behavior, 5, 240-256.

[5] Myerson, R. (1977) Graphs and cooperation in games. Mathematics of Operations Research, 2, 225-229.

[6] Owen, G. (1986) Values of grahp-restricted games. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 7(2), 210-220.

[7] Peters, H., & Zank, H. (2005) The egalitarian solution for multichoice games. Annals of Operations Research, 137, 399-409.