PERSPECTIVAS *Revista de Análisis de Economía, Comercio y Negocios Internacionales*
Volumen 10 / No. 2 / Julio - Diciembre 2016 / 33 - 43
ISSN 2007-2104

Los plurinominales: un sistema inconsistente.

Julio César Macías-Ponce[1]
Universidad Autónoma de Aguascalientes
jlmacias@correo.uaa.mx

Resumen

Los sistemas electorales en México se basan en los principios de mayoría y de representación proporcional. Desafortunadamente, la geografía electoral reproduce con frecuencia datos que favorecen a una fuerza política — la que gana las elecciones por el primer principio —. En este trabajo modelamos la situación de la representación proporcional, en particular creamos sistemas de ecuaciones que se deben verificar para garantizar la proporcionalidad; tales sistemas son por lo regular inconsistentes. Luego entonces, se propone el método de mínimos cuadrados para encontrar la "mejor" asignación posible. Esta propuesta también sugiere tomar en cuenta al voto nulo como una fuerza política capaz de ganar escaños.

Palabras clave: Mínimos cuadrados; representación proporcional; voto nulo.
Clasificación JEL: C70

Abstract

In Mexico, the rules of the Electoral College assign seats using two rules: direct election by majority and proportional principle. However, in many times the winner politic party by majority it is benefited for the proportional rule so, it is over-represented. In this paper we model the situation of proportional principle; in particular, we give systems of equations that must be verified, but usually these systems do not have solution. Then, the least squares method is proposed to find the "best" possible allocation. Also, we give some kind of power to citizens in disagreement with the voting options, as a political force able to win seats.

Keywords: Least squares; proportional representation; null vote.
JEL classification: C70

[1] Profesor - investigador del Departamento de Matemáticas y Física.

1. Introducción

En los últimos años los procesos electorales de México se han caracterizado por un incremento del abstencionismo y del voto nulo. Además, el principio de representación proporcional (de ahora en adelante, PRP) ha sido cuestionado por ciudadanos, politólogos[2], comunicadores y por las mismas fuerzas políticas.

El impacto en las cifras electorales del abstencionismo han provocado la propuesta y aprobación de iniciativas dentro las cuales podemos destacar la correspondiente a las candidaturas independientes. En este trabajo proponemos una asignación de escaños de representación que es más simple y justa en el sentido de la proporcionalidad y que además reconoce al voto nulo como una fuerza política capaz de exigir espacios por el PRP, lo que se traduce — según nuestra propuesta — en una disminución en la cantidad de legisladores. Cada legislador que "obtenga" el voto nulo será descontado del total de legisladores.

Nuestro proceder se basa en ideas muy básicas: supongamos que se tiene un proceso electoral donde se eligen escaños por los dos principios; entonces, para cada partido se cuentan (en los resultados oficiales) el porcentaje de votos y el número de legisladores que ganan por el principio de mayoría. Así, para cada partido es fácil saber cuántos legisladores le faltan por asignar para que su total de legisladores corresponda a su proporción de votos; a esta cantidad le llamaremos demanda del partido.

Sin embargo puede ocurrir que la suma de las demandas sea distinta al número total de escaños por asignar, en tal caso, se tiene un problema de insolubidad. En [4] se pueden encontrar condiciones en los datos electorales que generan insolubilidad. La manera de proceder que proponemos es usar el *método de mínimos cuadrados*, es decir encontraremos "la mejor aproximación" a la asignación ideal que garantizaría la proporcionalidad. En particular, hacemos un análisis con los datos electorales del proceso federal de México en 2015 y comparamos las asignaciones de diputados hechas por el Instituto Nacional Electoral (INE) con las que se obtendrían con nuestra propuesta y enfatizamos lo que debería ocurrir con la fuerza política "Voto nulo".

La organización de este trabajo comienza con la descripción del modelo matemático — en la Sección 2 — del problema de asignación por el PRP; en la Sección 3, se describen brevemente los fundamentos matemáticos del método de aproximación *mínimos cuadrados*. En la Sección 4 se describe la forma matricial de cualquier sistema de asignación por el PRP, en particular se presentan las propiedades de las matrices de coeficientes asociados a dichos problemas. En la

[2] ver http://aristeguinoticias.com/0306/mexico/denise-dresser-en-defensa-del-voto-nulo-video/

Sección 5 abordamos el proceso electoral federal Mexicano del 2015 y aplicamos nuestra propuesta de asignación. En la Sección 6 tenemos las conclusiones listando un sencillo algoritmo que resuleve cualquier problema de asignación. Por último, en el Apéndice listamos las siglas oficiales de los partidos políticos y cerramos el trabajo mostrando la bibliografía.

2. Preliminares

En esta sección describimos el modelo matemático; primero definimos y denotamos conceptos para el desarrollo del trabajo.

2.1. El problema de asignación por el principio de representación proporcional

La siguiente notación define a un problema de asignación de escaños:

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ conjunto de partidos políticos que participan en un proceso electoral;
- m: total de escaños por el principio de mayoria (PM) — los que se ganan por voto directo — ;
- E: total de escaños a asignar por el principio de representación proporcional (PRP);
- m_i: # de escaños ganados por el partido $i \in N$ por el PM;
- p_i: porcentaje de votos que captó el partido $i \in N$ el día de la elección;
- Llamaremos solución o asignación a cualquier $n-vector$ real $\overline{E} = (E_1, ..., E_n)$ tal que $E_i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\}$ para cada $i \in N$ y $\sum\limits_{i \in N} E_i = E$.

2.2. La sobrerepresentación

Un partido que gana — el día de la elección — más escaños que lo que corresponde a la proporción con respecto a sus votos lo identificamos como partido *sobre-representado*; más formalmente, definimos y denotamos con $S \subseteq N$ al conjunto de partidos sobre-representados: $j \in S \leftrightarrow m_j > (m + E)\, p_j$

Al complemento de S lo denotamos por $T \subseteq N$ y le llamaremos conjunto de partidos no sobre-representados: $j \in T \leftrightarrow m_j \leq (m + E)\, p_j$.

La representación justa que pretendemos está basada en el siguiente principio: Cada partido debería estar representado de acuerdo al porcentaje de votos que obtuvo el día de la elección, es decir si p_i es la proporción de votos del partido i entonces debería de obtener un total de $(m+E)\,p_i$ de representantes o escaños, pero si gana m_i por el PM, el día de la elección entonces le faltan — demanda — $d_i = \text{máx}\,\{0, (m+E)\,p_i - m_i\}$.

2.3. La insolubilidad

Para cada $i \in T$ sea x_i el número de escaños a asignar por el PRP al partido i — la variable de decisión — . Luego, el sistema que se debe resolver es:

$$\begin{aligned} \frac{m_i + x_i}{m+E} &= p_i \text{ para } i \in T \\ \sum_{i \in T} x_i &= E \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} x_i &= d_i \text{ para } i \in T \\ \sum_{i \in T} x_i &= E \end{aligned}$$

3. Mínimos cuadrados

Ahora presentamos de manera breve la teoría de aproximación. Sea A una matriz real (fija) de $m \times n$, y $b \in \mathbb{R}^m$ un vector fijo, y supongamos que $Ax \neq b$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, en tal caso se dice que el sistema

$$Ax = b$$

es insoluble. Sin embargo, existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. A x_0 se le llama solución de mínimos cuadrados.

Denotemos con $\langle , \rangle$ al producto interior usual en $\mathbb{R}^m$. Como Ax_0 pertenece al espacio col$A$, entonces debemos buscar el vector en col$A$ más cercano a b. O equivalentemente, necesitamos la proyección de b en col$A$. Pero $b - Ax_0$ es ortogobal a todo vector en col$A$, se sigue entonces que

$$\langle b - Ax_0, Ax \rangle = 0$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$; Luego

$$\langle b, Ax \rangle = \langle Ax_0, Ax \rangle$$

pero

$$\langle b, Ax \rangle = \langle Ax, b \rangle = (Ax)^T b = x^T A^T b = x^T \left(A^T b\right) = \left\langle x, A^T b \right\rangle = \left\langle A^T b, x \right\rangle$$

y

$$\langle Ax_0, Ax \rangle = (Ax_0)^T Ax = x_0^T A^T Ax = \left\langle \left(x_0^T A^T A\right)^T, x \right\rangle = \left\langle A^T Ax_0, x \right\rangle$$

por lo tanto

$$\left\langle A^T b, x \right\rangle = \left\langle A^T Ax_0, x \right\rangle$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Luego

$$A^T b = A^T Ax_0$$

cuando $A^T A$ es invertible se tiene que

$$x_0 = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

4. La mejor aproximación para sistemas de representación proprocional.

Recordemos que el sistema lineal de asignación de escaños por el PRP es el siguiente:

$$\begin{aligned} x_i &= d_i \text{ para } i \in T \\ \sum_{i \in T} x_i &= E \end{aligned}$$

escrito en forma matricial tenemos $Ax = b$ donde $A = \begin{bmatrix} I_{t\times t} \\ \overrightarrow{1} \end{bmatrix}$ donde $I_{t\times t}$ es la matriz identidad de orden $t = |T|$ (la cardinalidad del conjunto T), $\overrightarrow{1}$ es un $t-$*vector* renglón con entradas 1 en cada componente; y b es un $(t+1)-$*vector* columna: $b = \begin{bmatrix} \overrightarrow{d} \\ E \end{bmatrix}$ donde $\overrightarrow{d}$ es un $t - vector$ — el vector de demandas— columna y E el número de escaños a repartir por el PRP.

Luego $A^T A$ es una matriz cuadrada de orden t dada por

$$\left[A^T A\right]_{ij} = \begin{cases} 2 & si \ i = j \\ 1 & si \ i \neq j \end{cases}$$

y

$$\left[\left(A^T A\right)^{-1}\right]_{ij} = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & si \ i = j \\ \frac{-1}{n+1} & si \ i \neq j \end{cases}$$

Por tanto

$$\left(A^T A\right)^{-1} A^T = \left[\left(A^T A\right)^{-1}, \overrightarrow{\frac{1}{n+1}}\right]$$

donde $\overrightarrow{\frac{1}{n+1}}$ es una matriz real de $t \times 1$ con todas las entradas iguales a $\frac{1}{n+1}$.

5. La elección federal del 2015 en México.

El Cuadro 1 está basado en los resultados electorales del proceso federal celebrado en México 2015 para renovar la Cámara de Diputados. En él, tenemos el porcentaje de votos que obtuvo cada partido el día de la elección, el número de diputados por el principio de mayoría y lo que demandaría — según nuestra propuesta — cada fuerza política para "quedar bien representada"

Luego entonces, tenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & & & & & & & & & & = & 50.078 \\
 & x_2 & & & & & & & & & = & 26.37 \\
 & & x_3 & & & & & & & & = & 8.226 \\
 & & & x_4 & & & & & & & = & 5.587 \\
 & & & & x_5 & & & & & & = & 20.496 \\
 & & & & & x_6 & & & & & = & 17.646 \\
 & & & & & & x_7 & & & & = & 27.963 \\
 & & & & & & & x_8 & & & = & 16.62 \\
 & & & & & & & & x_9 & & = & 10.745 \\
 & & & & & & & & & x_{10} & = & 23.837 \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9+ & x_{10} & = & 200
\end{array}$$

PARTIDO	**%Votos**	**#Dip.PM** (m_i)	**Demanda** ($\mathbf{d}_i$)
PAN	21.01	55	50.078
PRI	29.18	156	0
PRD	10.87	28	26.37
PT	2.84	6	8.226
PVEM	6.91	29	5.587
MC	6.09	10	20.496
NA	3.72	1	17.646
MORENA	8.39	14	27.963
PES	3.32	0	16.62
PH	2.14	0	10.745
C.INDEP	0.56	1	-
VOTO NULO	4.76	-	23.837
C. NO REG.	0.13	-	-

Cuadro 1: Las primeras tres columnas corresponden a los datos oficiales de la elección federal [4] y la cuarta columna corresponde a las demandas de cada partido según nuestro modelo. **Fuente:** Elaboración propia. En el Apéndice aparecen las siglas junto con los nombres completos de los partidos políticos.

El sistema es incosistente ya que la suma de los primeros 10 lados derechos es $207.568 \neq 200$.

En este caso tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$A^tA=\begin{bmatrix}2&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&2&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&2&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&2&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&2&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&2&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&2&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&2&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&2&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&2\end{bmatrix}$$

$$\left(A^tA\right)^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}\mathbf{10}&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&10&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&10&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&10&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&10&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&10&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&10&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&10&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&10&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&10\end{bmatrix}$$

$$\left(A^tA\right)^{-1}A^t=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}10&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1\\-1&10&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1\\-1&-1&10&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1\\-1&-1&-1&10&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1\\-1&-1&-1&-1&10&-1&-1&-1&-1&-1&1\\-1&-1&-1&-1&-1&10&-1&-1&-1&-1&1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&10&-1&-1&-1&1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&10&-1&-1&1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&10&-1&1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&10&1\end{bmatrix}$$

$$b^t=\big[50.078\quad 26.37\quad 8.226\quad 5.587\quad 20.496\quad 17.646\quad 27.963\quad 16.62\quad 10.745\quad 23.$$

Luego $x_0=\left(A^tA\right)^{-1}A^tb=$

$$\big[49.39\quad 25.682\quad 7.538\quad 4.899\quad 19.808\quad 16.958\quad 27.275\quad 15.932\quad 10.057\quad 23.149$$

Y así, $\sum_{i=1}^{10} x_{0_i} = 206.688$. Ahora bien, como se tiene la restricción de que se deben asignar números enteros, entonces se debe aplicar un proceso de redondeo que genere un vector $\widetilde{\mathbf{x}_0}$ con entradas enteras no negativas tal que $\sum_{i=1}^{10} \widetilde{x_{0_i}} = 200$. Una forma común de redondeo para estos casos es la siguiente: Primero se trunca la cantidad asignada a cada partido, en nuestro caso particular, tenemos que las suma de las cantidades truncadas es 195, luego faltan asignar 5, los cuales asignamos a las coordenadas con mayor cantidad truncada, de esta forma obtenemos los resultados del Cuadro 2.

PARTIDO	d_i	**INE**	x_0	$\widetilde{\mathbf{x}_0}$
PAN	50.078	53	49.39	**49**
PRI	0	47	0	**0**
PRD	26.37	28	25.**682**	**26**
PT	8.226	0	7.538	**7**
PVEM	5.587	18	4.**899**	**5**
MC	20.496	16	19.**808**	**20**
NA	17.646	9	16.**958**	**17**
MORENA	27.963	21	27.275	**27**
PES	16.62	8	15.**932**	**16**
PH	10.745	0	10.057	**10**
VOTO NULO	23.837	–	23.149	**23**

Cuadro 2: Las tres primeras columnas son tomadas de los datos del Cuadro 1, la cuarta columna corresponde a la asignación que se obtiene por el método de *mínimos cuadrados* y la quinta columna es la solución entera, que se obtiene después del proceso de redondeo que se describe en la líneas anteriores. **Fuente:** Elaboración propia.

Los 23 escaños que se asignan al Voto Nulo se interpretan como la cantidad de diputados que el ciudadano está descontando de los 200, es decir, la Cámara de Diputados que se conformó en 2015 debería tener — según nuestra propuesta — 477 diputados (y no 500). Obsérvese, además, que en nuestra asignacion reconocemos a todas las fuerza políticas sin pedir un porcentaje mínimo de votos en el día de la elección[3].

6. Conclusiones

Este trabajo pretende ser una propuesta de reforma de las reglas electorales que simplifican a las reglas actuales; además son más justas en cuanto a que

[3]En [4] el lector puede identificar una propuesta de asignación mediante juegos de bancarrota cuya solución para la misma elección federal coincide con la que aquí se presenta.

los partidos quedan mejor representados con respecto a su porcentaje de votos captados y al mismo tiempo, el ciudadano inconforme, identifica incentivos para que por medio de su derecho de anular la boleta electoral, tenga el poder de disminuir el número de representantes por el PRP[4].

El procedimiento que proponemos se puede resumir en el siguiente algoritmo:

Datos de entrada: $(N, m, (m_1, ..., m_n), (p_1, ..., p_n), E)$
Salida: $\widetilde{x_{0_i}} \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\sum\limits_{i \in T} \widetilde{x_{0_i}} = E$.

1. Identificar a los t partidos no sobre-representados.

2. Construir el vector de demandas d.

3. Encontrar la asignación de mínimos cuadrados: para cada $i \in T$,

$$x_{0_i} = \frac{-1}{n+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{t} d_k + \frac{n}{n+1} d_i + \frac{1}{n+1} E.$$

4. Efectuar un proceso de redondeo para obtener $\widetilde{x_{0_i}} \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\sum_{i \in T} \widetilde{x_{0_i}} = E.$$

7. Apéndice

Siglas y nombres de los partidos políticos

- PAN: Partido Acción Nacional.
- PRI: Partido Revolucionario Institucional.
- PRD: Partido de la Revolución Democrática.
- MORENA: Movimiento de Regeneración Nacional.
- PVEM: Partido Verde Ecologista de México.
- MC: Movimiento Ciudadano.

[4]En caso de una eventual reforma habría que considerar las distintas manifestaciones de inconformidad: abstencionismo, voto nulo, voto de candidato no registrado, etc.

- NA: Nueva Alianza.
- PES: Partido Encuentro Social.
- PT: Partido del Trabajo.
- PH: Partido Humanista

Recepción: 30/05/2016. Aceptación: 26/06/2016.

Referencias

[1] Aumann R.J; Maschler, M. (1985) Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud. Journal of Economyc Theory. Vol. 36. 195–213.

[2] Gómez A. (2016) Notas de álgebra lineal. Instituto de Física y Facultad de Ingeniería. UNAM.

[3] Guerrero C; Hinojosa; Sánchez. (2006) Teoría de Juegos Aplicada a Problemas de Bancarrota. Contribuciones a la Economía, febrero 2006. Texto completo en http://www.eumed.net/ce/

[4] Instituto Nacional Electoral. http://ieeags.org.mx (2015).

[5] Macías J; Escobar L. (2016) El problema de los plurinominales: una aplicación de los problemas de bancarrota. Teoría Económica Aplicada. Por publicar.

[6] Shapley L.S. (1953) A Value for n-person games. En H. Kuhn and A. W. Tucker, eds., Contributions to the Theory of Games. Vol. 2. 307–317. Princeton University Press.

[7] Steven J. Brams (2004). Game Theory and Politics. New York University. Dover.