PERSPECTIVAS *Revista de Análisis de Economía, Comercio y Negocios Internacionales*
Volumen 9 / No. 2 / Julio - Diciembre 2015 / 61 - 91
ISSN 2007-2104

Problemas de reparto del costo de un servidor

Oliver Antonio Juárez Romero[1]
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Guanajuato, México
ojuarez@cimat.mx

Resumen

En este trabajo se estudia el problema de determinar el aporte monetario de cada agente al pago del costo de un servicio que se ha generado de manera colectiva mediante un proceso de colas y servidores. El objetivo principal que se persigue es justificar el uso práctico de ciertas reglas disponibles. Se utiliza el enfoque axiomático de la teoría de juegos cooperativos con el propósito de caracterizar estas reglas.

Palabras clave: Problema de colas; fracción de utilización; función de repartición; constantes compatibles; situación de abandono.
Clasificación JEL: C71

Abstract

In this paper we propose a solution for solving the problem regarding to the amount that each agent must pay for a service produced in a collective way in a context involving queues and servers. The main goal is to justify the practical use of some rules for assigning the payments. We use axiomatic cooperative game theory for characterizing these rules.

Keywords: Queue problems; using-time fraction; allocating function; compatible constants; abandonment situation.
JEL classification: C71

[1] Candidato a Doctor en Ciencias con Orientación en Matemáticas Aplicadas

1. Introducción

La gran mayoría de los procesos relacionados con el consumo de recursos involucran la generación de algún tipo de costo. Esto porque, en general, los recursos no están a total disposición de los consumidores o porque se necesita un gran capital tanto económico como humano para generarlos. Podemos encontrar ejemplos de esta situación en diversos contextos: en las compañias manufactureras, empresas telefónicas y universidades. Cuando un solo agente es el responsable de este consumo, él es el único que tiene que pagar los costos consecuentes. La problemática inicia cuando se tiene un conjunto de agentes como los responsables de dicho consumo. Con ello surgen las siguientes interrogantes: ¿cómo se puede repartir este costo entre los agentes? ¿qué factores deben tomarse en cuenta en la repartición del costo? Por ejemplo, en las empresas manufactureras es necesario distribuir ciertos gastos generales entre los productos y las divisiones; si varias ciudades usan un mismo sistema de distribución de agua, entonces deben llegar a un acuerdo sobre cómo distribuir los costos administrativos y de operación. Un ejemplo más surge cuando dos personas que comparten departamento necesitan repartir los costos de la renta y servicios básicos. Con estas situaciones, podemos concluir que los factores a considerar en la repartición dependerán fuertemente de las condiciones en las que los costos se generan.

Aun así, es posible plantear soluciones generales para resolver estas situaciones. Una solución salomónica podría ser el hecho de que “todos paguen lo mismo”. Como es de esperarse, esta situación acarrearía serias discusiones entre los agentes, ya que no necesariamente el consumo de los recursos se hace de manera igualitaria. Por ello, surge la idea de utilizar teorías matemáticas para establecer los preceptos bajo los cuales debe hacerse la repartición de los costos. Una de esas disciplinas es la teoría de juegos. El inicio de esta teoría se remonta al año de 1944 con la publicación del libro “Game Theory and Economic Behavior” de von Neumann y Morgenstern. Utilizando las técnicas de la teoría de juegos, los costos se reparten usando juegos cooperativos. Se introduce el concepto de *juegos de costo* como un par (N, c) donde N es el conjunto de agentes y $c : 2^N \to \mathbb{R}$ es la función de costos con $c(\emptyset) = 0$ (aquí 2^N denota el conjunto potencia de N). Un grupo de agentes $T \subseteq N$ se llama una coalición y $c(T)$ se denomina el costo en el que incurre esta coalición; así, los mecanismos de reparto se obtienen tomando en cuenta conceptos de solución en los juegos de costos asociados, como por ejemplo el bien conocido valor de Shapley (Shapley, 1952). También se pueden plantear otras situaciones donde se consideran las demandas de los agentes; así, un problema queda determinado por una terna

(N, m, c) donde m es el vector de demandas. Estas ideas han sido trabajadas por Young (Young, 1985), Moulin (Moulin y Schenker, 1992), entre otros.

En el presente trabajo se estudiará el problema de repartir el costo de un servidor entre un conjunto de usuarios con base al tiempo en el que estos utilizan el servicio brindado por el servidor [2]. Mediante las técnicas de la teoría de colas, y bajo supuestos adicionales, es posible determinar la fracción del tiempo en la que cada usuario necesita del servicio. La idea fundamental es utilizar esta información como base para realizar la repartición del costo. La teoría de colas es el estudio matemático de las líneas de espera. Su objetivo principal es el análisis de varios procesos, tales como la llegada de los usuarios al final de la cola, la espera en la cola, etc.

En la literatura existen ciertos trabajos que se relacionan con nuestro problema. Uno de ellos se debe a Maniquet (Maniquet, 2003), donde el autor reparte el costo total de espera entre los usuarios, utilizando un concepto de transferencia. En su trabajo, se propone resolver este problema utilizando el valor de Shapley (Shapley, 1953) de un cierto juego denominado juego de colas, definiendo el valor de una coalición como la suma de los costos de espera de sus miembros como si ellos fueran los primeros en arribar al sistema de colas y pudieran formarse de manera "óptima", bajo algún contexto. El mecanismo resultante de estas consideraciones es la llamada *regla de tranferencia mínima*. Por otro lado, Chun (Chun y Hokari, 2007) utiliza otra solución bien conocida para juegos cooperativos, el nucleolo (Owen, 1975) del juego de colas, obteniendo sorprendentemente, la misma regla obtenida por Maniquet; la razón fundamental es que el valor de Shapley y el nucleolo coinciden para los juegos de colas.

El estructura del trabajo es la siguiente. En la Sección 2 se presentan los conceptos básicos de la teoría de colas, haciendo especial énfasis en la forma en la cual se determina la fracción del tiempo en la que un sistema tiene un determinado número de usuarios. Además, se examinan los conceptos relacionados a la teoría de juegos cooperativos destacando la técnica utilizada para caracterizar soluciones para un conjunto de problemas. La Sección 3 contiene los resultados principales. Primeramente se caracteriza una regla utilizando un conjunto de constantes que recogen las diferencias "deseadas" que deben tener los pagos entre los usuarios del servicio. El segundo resultado establece una única forma de resolver la situación de abandono.

[2] Por servidor entiéndase cualquier agente que brinda un servicio: máquinas, personas o una combinación de éstos.

2. Preliminares

Iniciamos esta sección con el desarrollo de los conceptos relacionados con la teoría de colas. Una *cola* es una línea de espera y la *Teoría de Colas* es una colección de modelos matemáticos que describen sistemas de líneas de espera particulares. Las fórmulas para cada modelo indican cuál debe ser el desempeño del sistema correspondiente y señalan la cantidad promedio de tiempo de espera, en una gama de circunstancias. Por lo tanto, estos modelos son muy útiles para determinar cómo opera un sistema de colas de manera más efectiva, encontrando un balance adecuado entre el costo de servicio y la cantidad de tiempo de espera.

El *proceso básico* supuesto por la mayor parte de los modelos de colas es el siguiente. Los usuarios que requieren un servicio provienen de una *fuente de entrada*; estos usuarios entran al *sistema* y se unen a una *cola*, donde esperan para ser servidos. El usuario que será servido se selecciona mediante alguna regla conocida como *disciplina de servicio*; luego, se lleva a cabo el servicio requerido por el usuario en un *mecanismo de servicio* y después, el cliente sale del sistema.

Los tiempos con que los agentes arriban al sistema y el que transcurre desde el inicio del servicio hasta su terminación en una instalación se llaman *tiempo de arribo* y *tiempo de servicio*, respectivamente. En este trabajo, que supone son conocidos el tiempo promedio de arribo así como el tiempo promedio de servicio, por disciplina de servicio se tiene que el primero en entrar es el primero en ser atendido, el sistema puede alojar un número infinito de usuarios y el tamaño de la población es $N = \{1, 2, \cdots, n\}$. A menos que se establezca otra cosa, se utilizará la siguiente terminología: s el número de servidores, E el número de usuarios en el sistema, P_n la probabilidad de que exactamente n usuarios estén en el sistema, λ_n el número esperado de arribos por unidad de tiempo de nuevos usuarios cuando hay n usuarios en el sistema, μ_n el número esperado de usuarios que completan su servicio por unidad de tiempo cuando hay n usuarios en el sistema. Cuando λ_n es constante para toda n, esta constante se denota por λ. En estas cirscuntancias, $1/\lambda$ y $1/\mu$ son los tiempos esperados entre llegadas y los tiempos esperados de servicio, respectivamente. Así mismo, $\rho = \lambda/(s\mu)$ es el factor de utilización de los servidores, es decir, la fracción de tiempo esperada en que los servidores están ocupados.

A continuación presentaremos el procedimiento que se utiliza en la teoría de juegos cooperativos para resolver un conjunto de problemas de manera única. Un *juego cooperativo* con utilidades transferibles es un par (N, v) donde N es un conjunto finito no vacío y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ es una función característica, definida sobre el conjunto potencia de N, satisfaciendo que $v(\emptyset) = 0$. Un elemento i de N es llamado un jugador, todo subconjunto no vacío propio S de N una coalición y N la gran coalición. El número real $v(S)$ es denominado el valor de coalición S, y es interpretado como el pago total que la coalición S, si se forma, puede obtener para sus miembros. Sea G^N el conjunto de todos los juegos cooperativos con utilidad transferible con N como el conjunto de jugadores.

El problema principal que se aborda en juegos cooperativos es la distribución de ganancias conjuntas o el reparto de costos comunes. La teoría más conocida que actualmente da una respuesta categórica a estos problemas es la de valores en juegos cooperativos. En ella se agrupan problemas, se definen soluciones concebibles y se pide que una solución satisfaga un conjunto de axiomas que la determinen unívocamente. Para empezar a precisar esta idea, se define a continuación el concepto de solución. Una solución es un operador $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n$, que asocia a cada juego $v \in G^N$ un vector $\varphi(v) := (\varphi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$, donde $\varphi_i(v)$ es lo que le corresponde al jugador i en el juego v. El problema de encontrar soluciones a juegos cooperativos puede enfocarse tomando a G^N como el conjunto de todos los juegos de n jugadores y definiendo un operador $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n$ que resuelva a todos los juegos; ahora sólamente bastará con definir *de buena manera* al operador φ, añadiéndole propiedades *deseables* (las cuales se considerarán como axiomas) y demostrar que existe un único operador que posee dichas propiedades. El avance que se obtiene con esto es sustancial; se aceptan o se eliminan soluciones para toda una clase de problemas con sólo aceptar o no simples supuestos generales; como ejemplo de esta técnica tenemos al valor de Shapley. En 1953, Lloyd S. Shapley (Shapley, 1953), establece una solución φ para juegos cooperativos que satisfaga los siguientes axiomas:

Axioma 1. (Aditividad). Para todo v y $\omega \in G^N$

$$\varphi(v + \omega) = \varphi(v) + \varphi(\omega).$$

donde $(v + \omega)(S) = v(S) + \omega(S)$, *para todo* $S \subseteq N$.

Nótese que, como se definió $v + \omega$, lo que obtiene cada coalición es exactamente la suma de lo que obtiene en cada uno de los juegos originales y por lo tanto los jugadores no pueden obtener ventaja adicional por jugar los dos juegos en serie. Resulta natural pedir que lo que deba obtener cada jugador en el juego suma, sea exactamente la suma de lo que obtengan en los juegos originales.

Otra característica razonable que debería tener una solución es que no dependa de los atributos personales de los jugadores; en otras palabras, que sea *anónima*. Consideremos el conjunto $S_n = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}$, el grupo de permutaciones del conjunto de jugadores. Para cada $\theta \in S_n$ y cada $v \in G^N$ definimos el juego θv como:

$$\theta v(S) = v(\theta^{-1}(S)), \qquad \text{para todo } S \subseteq N.$$

Axioma 2. (Simetría). Para todo juego $v \in G^N$ y toda permutación $\theta \in S_n$ se cumple que

$$\varphi_i(\theta v) = \varphi_{\theta(i)}(v).$$

Así, si los jugadores intercambian papeles en el juego y además cada coalición logra hacer exactamente lo mismo que la coalición a la que suplanta, entonces lo que debe obtener cada jugador en el nuevo juego es lo que obtenía el jugador al cual suplanta.

Dado (N, v) y $S \subseteq N$, denotemos por:

$$\varphi(v)(S) = \sum_{i \in S} \varphi_i(v);$$

esto es, $\varphi(v)(S)$ es el monto que la coalición S obtiene con la solución φ.

Axioma 3. (Eficiencia). Para todo $v \in G^N$ se tiene

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N).$$

En otras palabras, el monto que se reparte entre todos los jugadores bajo φ es exactamente el monto $v(N)$ que puede conseguir la gran coalición.

Por último:

Definición 4. *Se dirá que $i \in N$ es un jugador nulo en v si y sólo, si*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S),$$

para toda $S \subseteq N$.

Axioma 5. (Nulidad). Si i es un jugador nulo en v, entonces

$$\varphi_i(v) = 0.$$

El axioma de nulidad requiere que cada jugador nulo en v obtenga un pago de cero, dado que no contribuye de ninguna manera a cualquier coalición a la que se une.

Teorema 6 (Shapley, 1953). *Existe un único valor φ sobre G^N que satisface los cuatro axiomas anteriores y que viene dado por la siguiente expresión:*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S) \big], \tag{1}$$

para todo $i \in N$ y para todo $v \in G^N$.

Para la demostración de este teorema ver (Shapley, 1953).

Supongamos que para cada uno de los usuarios conocemos en qué proporción necesita del servicio y además cuánto tiempo va a requerir para ser servido. Utilizando la notación de teoría de colas, estos datos se interpretan como tasa de arribo promedio al sistema ($\lambda_i \in \mathbb{R}_+$) y tasa promedio de servicio ($\mu_i \in \mathbb{R}_+$) para cada usuario i, respectivamente.

Así, dado el conjunto de usuarios $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos los vectores

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^N.$$

Definición 7. *Un problema de colas está definido por una cuaterna*

$$(N, \lambda, \mu, c) \in Q = 2^{|N|} \times \mathbb{R}_+^{|N|} \times \mathbb{R}_+^{|N|} \times \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

donde Q es el conjunto de todos los problemas de colas con N usuarios, λ el vector de tasas de arribo, μ el vector de tasas de servicio y c el costo del servicio.

Al problema (N, λ, μ, c) lo identificaremos con N, entendiendo que están dados los vectores λ, μ y el número c.

Ejemplo 8. *Considere el staff de cómputo que debe mantener las computadoras del CIMAT en condiciones de operación. Suponga que las computadoras son agrupadas en tres tipos. Los tiempos promedios que trabajan las máquinas antes de descomponerse son de $2, 3$ y 2 días, respectivamente. Los tiempos promedios que tarda el staff en reparar cada máquina son de $3, 4$ y 3 días, respectivamente. Supongamos que el costo del servicio del staff es de $4,569$ pesos al día y se desea distribuir entre los usuarios el costo de mantener el staff . Así, el problema se modela como:*

$$N = \{1, 2, 3\}, \quad \lambda = (2, 3, 2), \quad \mu = (3, 4, 3) \ y \quad c = 4,569.$$

Dado un problema de colas, estamos interesados en determinar una manera de repartir el costo del servicio entre los usuarios. A esta manera de repartir le llamaremos una *regla o solución al problema de colas.*

Definición 9. *Una solución para un problema de colas (N, λ, μ, c) es una función*

$$\varphi : Q \to \mathbb{R}^{|N|},$$

que asocia a cada $N \in Q$, un vector

$$\varphi(N) := (\varphi_i(N)_{i \in N}) \in \mathbb{R}^{|N|},$$

donde $\varphi_i(N)$ representa lo que debe pagar el usuario i en el problema N.

Ahora centramos nuestra atención en el concepto de solución, estableciendo propiedades deseables que deben poseer las formas de repartir el costo. Una característica importante de una solución es que debe repartir el costo entre todos los usuarios del servicio; es decir, debe ser *eficiente* en el siguiente sentido:

Definición 10. *Dado un problema N, una solución $\varphi(N) \in \mathbb{R}^{|N|}$ es eficiente si y sólo, si*

$$\sum_{i=1}^{|N|} \varphi_i(N) = c. \tag{3}$$

Otra propiedad deseable para una solución es que sea *justa* en el siguiente sentido:

Definición 11. *Dado un problema N, una solución $\varphi(N) \in \mathbb{R}^{|N|}$ es justa si y sólo, si para todo $i, j \in N$ $(i \neq j)$ tales que $\mu_j \geq \mu_i$ se tiene que*

$$\varphi_i(N) \geq \varphi_j(N). \tag{4}$$

De la teoría de colas sabemos que P_n es la probabilidad de que exactamente n clientes estén en el sistema; sin embargo, este caso no se ajusta al modelo en consideración, ya que para determinar P_n se supone que para todo $i \in N$ se tiene que $\lambda_i = \lambda$, es decir, la tasa de arribo es constante. Por lo cual utilizaremos otro método para determinar esas probabilidades. Supongamos que $N = \{1, 2\}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$. Sea x_i una variable aleatoria tal que:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si el usuario } i \text{ está en el sistema,} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{5}$$

Luego, el estado del sistema E es un vector en el conjunto

$$\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}.$$

Así, estamos interesados en determinar $P(E = (x_1, x_2)) = P(x_1, x_2)$.

Utilizando el principio de que *para cualquier estado del sistema a tasa media de entrada debe ser igual a la tasa media de salida,* construimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)P(0,0) = \mu_1 P(1,0) + \mu_2 P(0,1), \\ (\lambda_1 + \mu_2)P(0,1) = \lambda_2 P(0,0) + \mu_1 P(1,1), \\ (\mu_1 + \mu_2)P(1,1) = \lambda_1 P(0,1) + \lambda_2 P(1,0), \\ (\lambda_2 + \mu_1)P(1,0) = \lambda_1 P(0,0) + \mu_2 P(1,1), \\ P(0,0) + P(1,0) + P(0,1) + P(1,1) = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Resolviendo el sistema tenemos que

$$P(0,0) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2},$$

$$P(1,0) = \frac{\lambda_1\mu_2}{\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2},$$

$$P(0,1) = \frac{\mu_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2},$$

$$P(1,1) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2}.$$

Obsérvese que se tienen las siguientes relaciones:

$$P(1,0) = \frac{\lambda_1}{\mu_1}P(0,0),$$

$$P(0,1) = \frac{\lambda_2}{\mu_2}P(0,0),$$

$$P(1,1) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}P(0,0),$$

para el caso de dos usuarios.

Existe una manera más compacta de generar el sistema, así como de resolverlo. Consideremos el diagrama dado en la Figura 1 que refleja los cambios que se dan en un estado determinado. Así, el sistema anterior lo podemos escribir como:

$$\begin{cases} (\acute{\lambda_1} + \acute{\lambda_2} + \acute{\mu_1} + \acute{\mu_2})P(x_1,x_2) = \lambda_1 P(x_1-1,x_2) + \mu_2 P(x_1,x_2+1) \\ \quad + \mu_1 P(x_1+1,x_2) + \lambda_2 P(x_1,x_2-1), \\ \sum_{(x_1,x_2)\in\{0,1\}^2} P(x_1,x_2) = 1, \end{cases} \tag{7}$$

donde

$$\acute{\mu_i} = \begin{cases} 0, & \text{si } x_i < 1, \\ \mu_i, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \tag{8}$$

$$\acute{\lambda_i} = \begin{cases} 0, & \text{si } x_i \geq 1, \\ \lambda_i, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \tag{9}$$

y

$$P(-1,x_2) = P(x_1,-1) = P(2,x_2), P(x_1,2) = 0. \tag{10}$$

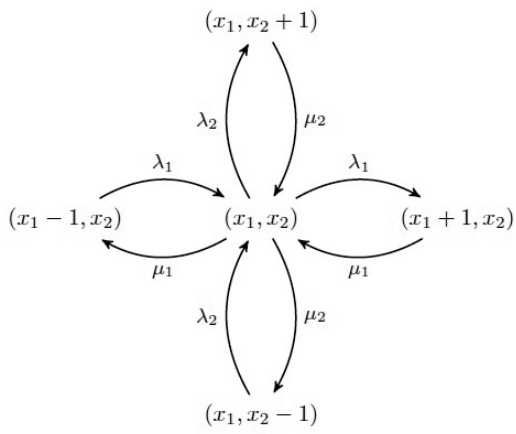

Figura 1: Diagrama de tasas para un estado del sistema de colas con dos usuarios.

Cada una de las primeras cuatro ecuaciones del sistema 6 se obtienen utilizando la ecuación

$$\begin{aligned}(\acute{\lambda}_1 + \acute{\lambda}_2 + \acute{\mu}_1 + \acute{\mu}_2)P(x_1, x_2) = \lambda_1 P(x_1 - 1, x_2) + \mu_2 P(x_1, x_2 + 1),\\ + \mu_1 P(x_1 + 1, x_2) + \lambda_2 P(x_1, x_2 - 1),\end{aligned}$$

aplicada a cada uno de los estados del sistema dados en la Figura 2 y considerando las condiciones dadas en (10).

Dado un estado $(x_1, x_2) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ definimos $S(x_1, x_2) = \{i \in \{1, 2\} \mid x_i = 1\}$; así, de la observación dada anteriormente afirmamos que

$$P(x_1, x_2) = \prod_{i \in S(x_1, x_2)} (\frac{\lambda_i}{\mu_i}) P(\emptyset),$$

donde $P(0, 0)$, se obtiene mediante la ecuación

$$\sum_{(x_1, x_2) \in \{0,1\}^2} P(x_1, x_2) = 1. \qquad (11)$$

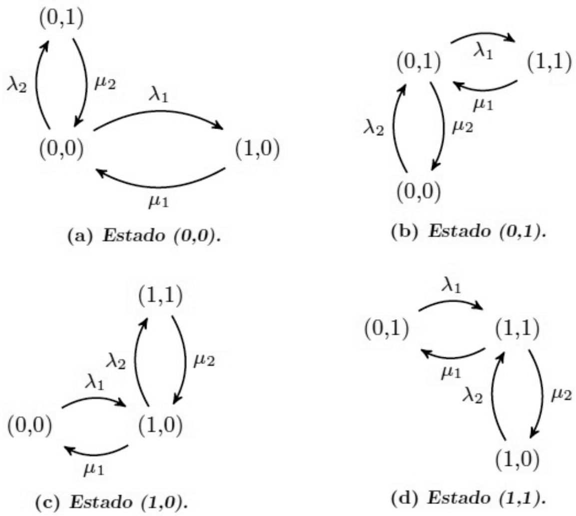

Figura 2: Estados de sistema de colas con dos usuarios.

Para el caso general, supongamos que tenemos las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned} N &= \{1, \ldots, n\}, \quad \text{conjunto de usuarios,} \\ \lambda &= (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \text{vector de tasas de arribo,} \\ \mu &= (\mu_1, \ldots, \mu_n), \quad \text{vector de tasas de servicio.} \end{aligned}$$

Sea x_i la variable aleatoria definida en (5); luego, el estado del sistema E es un vector en el conjunto $\{0, 1\}^n$. Así, estamos interesados en determinar $P(E = (x_1, \ldots, x_n)) = P(x_1, \ldots, x_n)$.

Utilizando el principio mencionado con anterioridad, formamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \{\acute{\lambda_i} + \acute{\mu_i}\} P(X) = \sum_{i=1}^{n} [\mu_i P(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) \\ +\lambda_i P(x_1, \ldots, x_i - 1, \ldots, x_n)], \\ \sum_{X \in \{0,1\}^n} P(X) = 1, \end{cases} \tag{12}$$

donde $\acute{\mu_i}$ está dado en (8) y $\acute{\lambda_i}$ en (9).

Por otro lado, se generalizan los requerimientos dados en (10), es decir, para todo $i \in N$

$$P(x_1, \ldots, -1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, 2, \ldots, x_n) = 0.$$

Teorema 12. *La solución al sistema 12 es*

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i \in S(x_1, \ldots, x_n)} (\frac{\lambda_i}{\mu_i}) P(0, \ldots, 0), \tag{13}$$

donde $P(0, \ldots, 0)$ se obtiene mediante la ecuación

$$\sum_{X \in \{0,1\}^n} P(x_1, \ldots, x_n) = 1. \tag{14}$$

Demostración. Primero observemos que usando (13) tenemos que

$$P(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) = \frac{\lambda_i}{\mu_i} P(X),$$

y

$$P(x_1, \ldots, x_i - 1, \ldots, x_n) = \frac{\mu_i}{\lambda_i} P(X),$$

luego

$$\sum_{i=1}^{n} [\mu_i P(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) + \lambda_i P(x_1, \ldots, x_i - 1, \ldots, x_n)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\mu_i \frac{\lambda_i}{\mu_i} P(X) + \lambda_i \frac{\mu_i}{\lambda_i} P(X)] = \sum_{i=1}^{n} \{\lambda_i + \mu_i\} P(X),$$

Por otro lado, de la ecuación 13 tenemos que

$$P(0, \ldots, 0) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{X \in \{0,1\}^n} \prod_{i \in S(x_1, \ldots, x_n)} (\frac{\lambda_i}{\mu_i})}, \tag{15}$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{X \in \{0,1\}^n} P(x_1, \ldots, x_n) \sum_{X \in \{0,1\}^n} \prod_{i \in S(x_1, \ldots, x_n)} (\frac{\lambda_i}{\mu_i}) P(0, \ldots, 0) &= \\ = \sum_{X \in \{0,1\}^n} \prod_{i \in S(x_1, \ldots, x_n)} (\frac{\lambda_i}{\mu_i}) (\frac{1}{\sum_{X \in \{0,1\}^n} \prod_{i \in S(x_1, \ldots, x_n)} (\frac{\lambda_i}{\mu_i})}) &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 13. *Considere el Ejemplo 8. Luego, los valores de $P(x_1, x_2, x_3)$ están dados en la siguiente tabla :*

$P(0,0,0)$	$\frac{27}{175}$	$P(0,1,1)$	$\frac{24}{175}$	$P(1,1,0)$	$\frac{12}{175}$
$P(0,0,1)$	$\frac{36}{175}$	$P(1,0,0)$	$\frac{18}{175}$	$P(1,1,1)$	$\frac{16}{175}$
$P(0,1,0)$	$\frac{18}{175}$	$P(1,0,1)$	$\frac{24}{175}$		

A continuación presentaremos dos soluciones que nos permitirán repartir el costo del servicio entre los usuarios.

Definición 14. *Sea un problema N. Una solución a este problema es $\varphi : Q \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\varphi_i(N) = \left[\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|} + f_i\left[1 - P(0,\ldots,0)\right]\right] c, \qquad \textit{para todo } i \in N \tag{16}$$

donde

$$f_i = \frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{\mu_j}}. \tag{17}$$

Básicamente lo que esta función hace es repartir la fracción del tiempo en la que el sistema está vacío, $P(0,\ldots,0)$, en partes iguales; además, reparte la fracción del tiempo en la que el sistema es utilizado, $[1 - P(0,\ldots,0)]$, de manera proporcional al tiempo en que los usuarios utilizan el sistema.

Ejemplo 15. *Considere el Ejemplo 8. Luego, la solución φ está dada en la siguiente tabla:*

i	1	2	3
$\varphi_i(N)$	\$1640.1	\$1288.9	\$1640.1

Esta solución posee dos características importantes que se mencionan en el siguiente lema.

Lema 16. *Dado un problema N, la solución dada en (16) es eficiente y justa.*

Demostración. 1. Eficiencia

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\varphi_i(N) &= \sum_{i\in N}\left[\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\right]c,\\
&= \sum_{i\in N}\frac{P(0,\ldots,0)c}{|N|}+\sum_{i\in N}f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]c,\\
&= |N|\frac{P(0,\ldots,0)c}{|N|}+\left[1-P(0,\ldots,0)\right],\\
&= P(0,\ldots,0)c+c-P(0,\ldots,0)c=c.
\end{aligned}$$

2. Justicia

Consideremos $i,j\in N$ $(i\neq j)$ tales que $\mu_j\geq\mu_i$; así, se tiene que $\frac{1}{\mu_i}\geq\frac{1}{\mu_j}$, de donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_i}\geq\frac{1}{\mu_j} &\implies f_i\geq f_j,\\
&\implies f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\geq f_j\left[1-P(0,\ldots,0)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\\
&\geq \frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_j\left[1-P(0,\ldots,0)\right],\\
&\implies \left[\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\right]c\\
&\geq \left[\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_j\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\right]c,\\
&\implies \varphi_i(N)\geq\varphi_j(N).
\end{aligned}$$

$\square$

Dado que podemos determinar la fracción del tiempo en la que el sistema se encuentra en el estado E, es decir,

$$P(x_1,\ldots,x_n),$$

estamos interesados en determinar la fracción de tiempo en ese estado en la que un usuario es servido. Para lograr esto, consideramos la siguiente función de repartición.

Definición 17. *Sea $i \in N$ y $X \in \{0,1\}^n$ un estado del sistema. Una función de repartición es una función $\alpha : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\alpha_i(X) = \begin{cases} \frac{1}{|N|}; & \text{si } S(X) = \emptyset, \\ 0; & \text{si } i \notin S(X) \text{ y } S(X) \neq \emptyset, \\ \dfrac{\dfrac{1}{\mu_i}}{\sum_{j \in S(X)} \dfrac{1}{\mu_j}}; & \text{de otra manera,} \end{cases} \tag{18}$$

donde

$$S(X) = \{i \in N \mid x_i = 1\}.$$

Así,

$$\alpha_i(X)P(X), \tag{19}$$

indica la fracción del tiempo en la que el usuario i es servido en el estado X.

Lema 18. *Sea $X \in \{0,1\}^n$ un estado del sistema. Luego*

$$\sum_{i \in N} \alpha_i(X) = 1. \tag{20}$$

Demostración. Si $X = (0, \ldots, 0)$, $S(X) = \emptyset$; así

$$\sum_{i \in N} \alpha_i(X) = \sum_{i \in N} \frac{1}{|N|} = |N|(\frac{1}{|N|}) = 1.$$

Supongamos que $X \neq (0, \ldots, 0)$. Luego, si $S(X) = \{i\}$, entonces $\alpha_j(X) = 0$ para todo $j \neq i$, de donde

$$\sum_{i \in N} \alpha_i(X) = \frac{\dfrac{1}{\mu_i}}{\dfrac{1}{\mu_i}} = 1.$$

Si $S(X) = \{i, j\}$, entonces $\alpha_k(X) = 0$ para todo $k \in N \setminus \{i, j\}$ de donde

$$\sum_{i \in N} \alpha_i(X) = \frac{\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_j}}{\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_j}} = 1.$$

Usando el mismo argumento tenemos que para un determinado $X \neq (0, \ldots, 0)$

$$\sum_{i \in N} \alpha_i(X) = \sum_{i \in S(X)} \frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j \in S(X)} \frac{1}{\mu_j}} = 1.$$

□

De lo anterior tenemos que

Definición 19. *La fracción del tiempo en la que un usuario $i \in N$ utiliza el servicio es:*

$$f_i = \sum_X \alpha_i(X) P(X). \quad (21)$$

Ejemplo 20. *Considere el Ejemplo 8. Luego, la fracción del tiempo f_i en la que un usuario $i \in N$ utiliza el servicio, está dada en la siguiente tabla:*

f_1	f_2	f_3
0.29	0.42	0.29

Ahora ya estamos en condiciones de proponer otra solución para un problema de colas N.

Definición 21. *Dado un problema N, una solución $\psi : Q \to \mathbb{R}^n$ que depende de los estados es*

$$\psi_i(N) = f_i c. \quad (22)$$

Ejemplo 22. *Considere el Ejemplo 8. Luego, la solución ψ dada en (22), para este problema, se muestra en la siguiente tabla:*

i	1	2	3
$\psi_i(N)$	\$1314.1	\$1940.8	\$1314.1

Esta solución reparte el costo del servicio de manera proporcional al tiempo en la que los usuarios son servidos. Una característica fundamental que verifica esta solución es la siguiente:

Lema 23. *La solución dada en (22) es eficiente.*

Demostración. En efecto,

$$\sum_{i=1}^{|N|} \varphi_i(N) = \sum_{i=1}^{|N|} f_i c = \sum_{i=1}^{|N|} \sum_{X} \alpha_i(X) P(X) c = \sum_{X} \sum_{i=1}^{|N|} \alpha_i(X) P(X) c,$$

luego, usando

$$\sum_{X \in \{0,1\}^n} P(X) = 1,$$

y del Lema 18 se obtiene el resultado. $\square$

A continuación describiremos la situación de abandono. Dado un problema de colas $M = \{1, \ldots, m\}$, calculamos una solución ψ para M; luego, suponemos que un subconjunto $N^c \subsetneq M$ de usuarios decide no participar del problema M y, por lo tanto, de la repartición del costo, obteniendo un nuevo problema N; entonces, calculamos una nueva solución φ para N. Así, estamos interesados en determinar la relación existente entre las soluciones ψ y φ, para todo $i \in N$.

Por otro lado, en nuestro trabajo de investigación estamos considerando soluciones que dependen de los estados del sistema, es decir, que utilizan la fracción del tiempo en la que un usuario $i \in N$ es servido. Luego, básicamente lo que necesitamos repartir entre los usuarios que se quedaron es

$$\sum_{j \in N^c} f_j,$$

que es la fracción del tiempo en la que los usuario de N^c utilizan del servicio. Para lograr tal propósito utilizaremos las siguientes definiciones. Para un estudio más extenso de su utilización remitimos al lector a (Dipjyoti, 2004) donde se caracteriza la *regla de Bayes*.

Definición 24. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $M = \{1, \ldots, m\}$, $N \subseteq M$ y $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio. Una repartición $\hat{f}$, es una regla de revisión si existe $\phi^N : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\hat{f}_i(N, M, f) = f_i + \phi_i^N(f), \qquad \text{para todo } i \in N, \tag{23}$$

donde $\hat{f}_i(N, M, f)$ indica la fracción del tiempo de utilización del servicio del usuario $i \in N \subsetneq M$ en el problema de colas N, tomando en cuenta las fracciones de tiempo f del problema original M, dado que los usuarios en N^c no participan en el problema.

Observación: El superíndice N en ϕ^N, indica que ϕ reparte $f(N^c)$ entre los usuarios de N.

Definición 25. (*Independencia de trayectoria*) Sean M, N y R tres problemas de colas tales que $N \subseteq R \subseteq M$ y $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio. Una reparticion $\hat{f}$ satisface la propiedad de independencia de trayectoria si y sólo, si

$$\hat{f}(N, R, \hat{f}(R, M, f)) = \hat{f}(N, M, f).$$

La propiedad de independencia de trayectoria es un requerimiento de consistencia; éste implica que el orden en el que se retiran los usuarios no importa. Este axioma es ilustrado en el siguente ejemplo.

Ejemplo 26. *Considere M, N y R tres problemas de colas tales que $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 2\}$ y $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$. Suponga que R^c ha decidido no participar de la repartición del costo. Así, tenemos que repartir f_4 entre los usuarios que se quedaron, es decir, $R = \{1, 2, 3\}$. Así, aplicando la repartición $\hat{f}$ tenemos que*

$$\hat{f}(R, M, f) = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3),$$

Ahora suponga que en el problema R, $N^c = \{3\}$ ha decidido no participar de la repartición del costo; así, necesitamos repartir $\hat{f}_3$ entre los usuarios que se quedaron, es decir, $N = \{1, 2\}$. Utilizando nuevamente la repartición $\hat{f}$ obtenemos

$$\hat{f}(N, R, \hat{f}(N, R, f)). \tag{24}$$

Luego, si la repartición $\hat{f}$ satisface independencia de trayectoria, el vector dado en (24) puede obtenerse suponiendo que se tiene el problema $M = \{1, 2, 3, 4\}$ y que los usuarios en $N^C = \{3, 4\}$ decidieron no participar de la repartición del costo, es decir, si repartimos $f_3 + f_4$ entre los usuarios que se quedaron, $N = \{1, 2\}$.

3. Caracterizaciones

El propósito de esta sección es caracterizar la solución 16 y resolver la situación de abandono; para lograr esto, definamos lo que es un conjunto de constantes compatibles.

Definición 27. *Un conjunto de constantes* $D = \{d_{ij}\}_{i,j \in N}$ *es compatible si y sólo, si*

(a) $d_{ii} = 0$,

(b) $d_{ij} = -d_{ji}$,

(c) $d_{ij} + d_{jk} = d_{ik}$.

Ejemplo 28. *Dado un problema de colas* N*, el conjunto de constantes* $D = \{d_{ij}\}_{i,j \in N}$ *dado por*

$$d_{ij} = [f_i - f_j]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c, \tag{25}$$

donde

$$f_i = \frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{\mu_j}}, \tag{26}$$

es un conjunto de constantes compatible. En efecto,

$$d_{ii} \quad = \quad [f_i - f_i]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c = 0.$$

$$d_{ij} \quad = \quad [f_i - f_j]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c = -\,[f_j - f_i]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c = -d_{ji}.$$

$$\begin{aligned} d_{ij} + d_{jk} &= [f_i - f_j]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c + [f_j - f_k]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c, \\ &= [f_i - f_j + f_j - f_k]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c, \\ &= [f_i - f_k]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c = d_{ik}. \end{aligned}$$

Observación. Dado un conjunto D de constantes compatible es fácil verificar que la suma de todas estas constantes es igual a cero, es decir,

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} = 0.$$

En efecto, sean $i, j \in N$. Luego, $d_{ij}, d_{ji} \in D$ un conjunto de constantes compatible; así, tenemos que $d_{ij} = -d_{ji}$, de donde

$$d_{ij} + d_{ji} = -d_{ji} + d_{ji} = 0,$$

por lo tanto

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} = 0.$$

Definición 29. *Sean un problema de colas N, $\varphi(N) \in \mathbb{R}^n$ una solución y $D = \{d_{ij}\}_{i,j\in N}$ un conjunto de constantes compatible; $\varphi(N) \in \mathbb{R}^n$ preserva diferencias si y sólo, si*

$$\varphi_i(N) - \varphi_j(N) = d_{ij}.$$

El siguiente es el resultado que nos permite caracterizar la solución 16. Para un estudio más extenso de su utilización remitimos al lector al trabajo de Hart y Mas-Colell (Hart y Mas-Colell, 1989).

Lema 30. *Dado un problema de colas N y un conjunto de constantes compatible $D = \{d_{ij}\}_{i,j\in N}$, existe una única solución al problema de colas $\Phi(N) \in \mathbb{R}^n$ que es eficiente y preserva las diferencias en D. Además*

$$\Phi_i(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{j\in N} d_{ij}\right].$$

Demostración. Eficiencia

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\Phi_i(N) &= \sum_{i\in N}\left[\frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{j\in N} d_{ij}\right]\right],\\ &= \sum_{i\in N}\frac{c}{|N|} + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} d_{ij} = |N|(\frac{c}{|N|}) = c.\end{aligned}$$

Preservación de diferencias
Sean $i, j \in N$ fijos, luego

$$\Phi_i(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{k\in N\setminus\{i\}} d_{ik}\right],$$

$$\Phi_j(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{k\in N\setminus\{j\}} d_{jk}\right].$$

Así,

$$\Phi_i(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + d_{ij} + \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} d_{ik}\right],$$

$$\Phi_j(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + d_{ij} + \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} d_{jk}\right],$$

luego

$$\begin{aligned}
\Phi_i(N) - \Phi_j(N) &= \frac{c}{|N|} + \frac{d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|}\sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} d_{ik}, \\
&\quad -\frac{c}{|N|} - \frac{d_{ji}}{|N|} - \frac{1}{|N|}\sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} d_{jk}, \\
&= \frac{d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|}\sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} d_{ik} + \frac{d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|}\sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} d_{kj}, \\
&= \frac{2d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|}\sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} \left[d_{ik} + d_{kj}\right], \\
&= \frac{2d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|}\sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} d_{ij}, \\
&= \frac{2d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|}(|N|-2)d_{ij} = \frac{2d_{ij}}{|N|} + d_{ij} - \frac{2d_{ij}}{|N|} = d_{ij}.
\end{aligned}$$

Unicidad

Sea $\phi \in \mathbb{R}^n$ una solución que es eficiente y que preserva diferencias, es decir;

a. $\sum_{i\in N} \phi_i(N) = c$,

b. $\phi_i(N) - \phi_j(N) = d_{ij}$.

Supongamos otra solución eficiente y que preserva diferencias, $\Phi(N)$, tal que $\Phi(N) \neq \phi(N)$, es decir que existe $j \in N$ tal que

$$\Phi_j(N) \neq \phi_j(N).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\Phi_j(N) > \phi_j(N)$; así

$$-\Phi_j(N) < -\phi_j(N),$$

$$\Phi_i(N) - \Phi_j(N) < \Phi_i(N) - \phi_j(N) \text{ para todo } i \in N \setminus \{j\},$$

pero

$$\Phi_i(N) - \Phi_j(N) = d_{ij} = \phi_i(N) - \phi_j(N) \text{ para todo } i \in N \setminus \{j\},$$

luego,

$$\phi_i(N) - \phi_j(N) < \Phi_i(N) - \phi_j(N)$$

de donde

$$\phi_i(N) < \Phi_i(N) \text{ para todo } i \in N \setminus \{j\}.$$

De lo anterior tenemos que, para todo $i \in N$,

$$\phi_i(N) < \Phi_i(N).$$

Así,

$$c = \sum_{i \in N} \phi_i(N) < \sum_{i \in N} \Phi_i(N) = c,$$

lo cual es una contradicción.

□

El siguiente teorema es nuestro primer resultado, en el cual se caracteriza la solución 16 utilizando un conjunto de constantes que denotan las diferencias deseadas que deben tener los pagos entre los usuarios del servicio.

Teorema 31. *Dados un problema de colas N y el conjunto de constantes $D = \{d_{ij}\}_{i,j \in N}$ dadas en (25), la solución dada en (16) es la única solución eficiente y justa que preserva las diferencias en D.*

Demostración. El Lema 30 prueba la existencia, unicidad, eficiencia y preservación de diferencias, así lo que debemos probar es que

$$\varphi_i(N) = \Phi_i(N),$$

para todo $i \in N$. Se tiene que

$$\Phi_i(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{j \in N} d_{ij}\right] = \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{j \in N} [f_i - f_j]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\right] c,$$

donde

$$f_i = \frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{\mu_j}}.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\Phi_i(N) &= \frac{1}{|N|}\left[c+\sum_{j\in N}\left[\frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{k\in N}\frac{1}{\mu_k}}-\frac{\frac{1}{\mu_j}}{\sum_{k\in N}\frac{1}{\mu_k}}\right][1-P(0,\ldots,0)]\,c\right],\\
&= \frac{1}{|N|}\left[c+\frac{\sum_{j\in N}[\frac{1}{\mu_i}-\frac{1}{\mu_j}]}{\sum_{k\in N}\frac{1}{\mu_k}}\right][1-P(0,\ldots,0)]\,c,\\
&= \frac{1}{|N|}\left[c+\frac{\sum_{j\in N}\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j\in N}\frac{1}{\mu_j}}-1\right][1-P(0,\ldots,0)]\,c,\\
&= \frac{1}{|N|}\left[c+\frac{|N|\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j\in N}\frac{1}{\mu_j}}-1\right][1-P(0,\ldots,0)]\,c,\\
&= \frac{1}{|N|}\,[c+|N|f_i-1]\,[1-P(0,\ldots,0)]\,c,\\
&= \frac{c}{|N|}+f_i\,[1-P(0,\ldots,0)]\,c-\frac{1}{|N|}\,[1-P(0,\ldots,0)]\,c,\\
&= \frac{c}{|N|}+f_i\,[1-P(0,\ldots,0)]\,c-\frac{c}{|N|}+\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}c,\\
&= \frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}c+f_i\,[1-P(0,\ldots,0)]\,c,\\
&= \left[\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_i\,[1-P(0,\ldots,0)]\right]c=\varphi_i(N).
\end{aligned}
$$

□

La utilización del conjunto de constantes compatible D dado en (25) se justifica porque estas constantes reflejan las diferencias que tienen dos usuarios en relación a la utilización del servicio y por lo tanto, la solución dada en (16) utiliza esta información para repartir el costo. Además, la importancia de esta solución se refleja en sus características principales: repartir la fracción del tiempo en la que el sistema está vacío, en partes iguales, repartir la fracción del tiempo en la que el sistema es utilizado de manera proporcional al tiempo en que utilizan el sistema y ser una solución es ***justa***, en el sentido de que obliga a pagar más al que más utiliza del servicio.

En lo que resta de esta sección consideraremos la siguiente situación; supongamos que hemos repartido el costo del servicio entre un conjunto M de usuarios, usando la solución ψ dada en (22); luego de realizar esto, un grupo de usuarios $N^c \subset M$ deciden no participar de la repartición del costo; entonces, estamos interesados en determinar una nueva forma de repartir el excedente, es decir, una solución que redistribuya

$$\sum_{j \in N^c} \psi_j(M),$$

entre los usuarios en N.

Dado que la solución (22) requiere de la fracción del tiempo f_i en la que un usuario $i \in N$ utiliza el servicio, para resolver la situación de abandono necesitamos redistribuir

$$\sum_{j \in N^c} f_j, \tag{27}$$

que es la fracción del tiempo en la que los usuarios en N^c utilizan el servicio.

Lema 32. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $N \subseteq M$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio, $X \in \{0,1\}^n$ un estado del sistema y*

$$\alpha : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}^n$$

la función de repartición dada en (18). Luego, si para $i \in N$,

$$\tilde{f}_i := \frac{\sum_X \alpha_i(X) P(X)}{\sum_X \left[\sum_j \alpha_j(X)\right] P(X)}, \tag{28}$$

entonces $\tilde{f}$ es una regla de revisión.

Demostración.

$$\tilde{f}_i = \frac{\sum_X \alpha_i(X) P(X)}{\sum_X \left[\sum_{j \in N} \alpha_j(X)\right] P(X)},$$

$$= \frac{\sum_X \alpha_i(X) P(X)}{\sum_X \left[\sum_{j \in N} \alpha_j(X)\right] P(X)} \left[\sum_{j \in N} \sum_X \alpha_j(X) P(X) + \sum_{k \notin N} \sum_X \alpha_k(X) P(X)\right],$$

$$= \sum_X \alpha_i(X) P(X) \left[1 + \frac{\sum_{k \notin N} \sum_X \alpha_k(X) P(X)}{\sum_X (\sum_{j \in N} \alpha_j(X)) P(X)}\right],$$

$$= f_i \left[1 + \frac{\sum_{j \in N^c}}{\sum_{k \in N} f_k}\right] = f_i + \left[\sum_{j \in N^c} f_j\right] \frac{f_i}{\sum_{k \in N} f_k}.$$

□

La expresión (28) redistribuye

$$\sum_{j \in N^c} f_j$$

entre los usuarios que se quedaron, de manera proporcional a la fracción del tiempo en la que los usuarios en N utilizan del servicio. A continuación daremos una solución a una situación de abandono donde se ha utilizado la solución dada en (22).

Definición 33. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $N \subseteq M$ y $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio. Considere que los usuarios en N^c han decidido no participar de la repartición del costo. Una solución a esta problemática está dada por*

$$\Psi_i(N) = \tilde{f}_i c \qquad \textit{para todo } i \in N, \tag{29}$$

donde

$$\tilde{f}_i = f_i + \left[\sum_{j \in N^c} f_j\right] \frac{f_i}{\sum_{k \in N} f_k}. \tag{30}$$

Ejemplo 34. *Considere el Ejemplo 22 y suponga que el usuario 3 ha decidido no participar en la repartición del costo. Luego, los $\tilde{f}_i$ están dados en la siguiente tabla:*

$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$
0.41	0.59

Luego, la solución Ψ está dada por:

$$\Psi_1(N) = \$1873.3$$

$$\Psi_2(N) = \$2695.7$$

El siguiente axioma es una forma de resolver la situación de abandono, sin embargo, es deseable que la nueva solución tenga esa propiedad inherente.

Axioma 35. (*Proporcionalidad*) Sean M, N dos problemas de colas tales que $M = \{1, \ldots, n\}$, $N \subseteq M$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio y ψ una solución al problema M. Una solución φ al problema N satisface el axioma de proporcionalidad si y sólo si

$$\varphi_i(N) = \frac{\psi_i(M)}{\sum_{j\in N}\psi_j(M)}c.$$

para todo $i \in N$.

Lema 36. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $N \subseteq M$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio y ψ una solución para M. La solución dada en (29) para el problema N cumple el axioma de proporcionalidad.*

Demostración. En efecto

$$\begin{aligned}
\Psi_i(N) &= \tilde{f}_i c = \left[f_i + \left[\sum_{j\in N^c} f_j\right]\frac{f_i}{\sum_{k\in N} f_k}\right]c,\\
&= f_i c + \left[\sum_{j\in N^c} f_j c\right]\frac{f_i c}{\sum_{k\in N}\psi_k(M)c},\\
&= f_i c + \left[\sum_{j\in N^c} f_j c\right]\frac{f_i c}{\sum_{k\in N} f_k c},
\end{aligned}$$

$$= \psi_i(M) + \left[\sum_{j\in N^c}\psi_j(M)\right]\frac{\psi_i(M)}{\sum_{k\in N}\psi_k(M)},$$

de donde

$$\Psi_i(N) = \psi_i(M) + \left[\sum_{j\in N^c}\psi_j(M)\right]\frac{\psi_i(M)}{\sum_{k\in N}\psi_k(M)}; \tag{31}$$

luego

$$
\begin{aligned}
\Psi_i(N) &= \psi_i(M)\left[1+\frac{\sum_{j\in N^c}\psi_j(M)}{\sum_{k\in N}\psi_k(M)}\right],\\
&= \psi_i(M)\left[1+\frac{\sum_{j\in N^c}\psi_j(M)}{c-\sum_{j\in N^c}\psi_j(M)}\right],\\
&= \psi_i(M)\left[\frac{c-\sum_{j\in N^c}\psi_j(M)+\sum_{j\in N^c}\psi_j(M)}{c-\psi(M)(N^c)}\right],\\
&= \psi_i(M)\left[\frac{c}{c-\sum_{j\in N^c}\psi_j(M)}\right],\\
&= \psi_i(M)\left[\frac{c}{\sum_{k\in N}\psi_k(M)}\right]=\frac{\psi_i(M)}{\sum_{k\in N}\psi_k(M)}c.
\end{aligned}
$$

□

Algunas de las ideas que se presentan a continuación son reformuladas a partir del trabajo de Dipjyoti (Dipjyoti, 2004) donde el autor caracteriza la *regla de Bayes*.

Teorema 37. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $N \subseteq M$, $|M| = m \geq 4$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio, ψ una solución para M y φ una solución para N eficiente tal que*

$$\varphi_i(N) = \hat{f}_i c \qquad \textit{para todo } i \in N,$$

donde $\hat{f}$ es una regla de revisión que satisaface la propiedad de independencia de trayectoria. Si φ es igual a la solución dada en (29) para todo N tal que $|N| = n$ con $2 \leq n < m$, entonces φ es igual a la solución dada en (29) para todo problemas de colas R tal que $m > |R| > n$.

Demostración. Supongamos que φ es igual a la solución dada en (29) para todo N tal que $|N| = n$ con $2 \leq n < m$. Sea $f = (f_1, \ldots, f_m)$ tal que $f_i > 0$ para todo $i \in M$. Consideremos N y R tales que

$$R = N \cup \{\acute{j}\}, \acute{j} \in M \setminus N.$$

Sea $i \in N$ fijo. Luego, dado que $\hat{f}$ es una regla de revisión, tenemos que

$$\hat{f}_i(N, R, f) = f_i + \phi_i^N(f),$$

para todo $i \in N$ y, dado que satisaface la propiedad de independencia de trayectoria, se sigue que

$$\hat{f}(N, M, f) = \hat{f}(N, R, \hat{f}(R, M, f));$$

lo anterior implica que

$$\begin{aligned} f_i + \phi_i^N(f) &= f_i + \phi_i^R(f) + \phi_i^N((f_j + \phi_j^R(f))_{j\in R}), \\ \phi_i^N(f) &= \phi_i^R(f) + \phi_i^N(\left[f_j + \phi_j^R(f)\right]_{j\in R}). \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\phi_i^N(f)c = \phi_i^R(f)c + \phi_i^N(\left[f_j + \phi_j^R(f)\right]_{j\in R})c,$$

de donde, por ser φ igual a la solución 29, tenemos que

$$\begin{aligned} &\phi_i^R(f)c + \left[\psi_{\dot{j}}(M) + \phi_{\dot{j}}^R(f)c\right] \frac{\psi_i(M) + \phi_i^R(f)c}{\sum_{k\in N} \psi_k(M) + \phi_k^R(f)c}, \\ &\qquad = \left[\sum_{k\notin N} \psi_k(M)\right] \frac{\psi_i(M)}{\sum_{k\in N} \psi_k(M)}. \end{aligned} \tag{32}$$

Por eficiencia de φ, tenemos que

$$\sum_{k\in N} \psi_k(M) + \phi_k^R(f)c = c - \psi_{\dot{j}}(M) - \phi_{\dot{j}}^R(f)c.$$

Tomando

$$A = \psi_{\dot{j}}(M) + \phi_{\dot{j}}^R(f)c,$$

y

$$\frac{\sum_{k\notin N} \psi_k(M)}{\sum_{k\in N} \psi_k(M)} = t,$$

la ecuación 32 puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\phi_i^R(f)c + A\frac{\psi_i(M) + \phi_i^R(f)c}{c - A} &= t\psi_i(M), \\
\frac{\phi_i^R(f)c(c-A) + A(\psi_i(M) + \phi_i^R(f)c)}{(c-A)\psi_i(M)} &= t, \\
\frac{\phi_i^R(f)c^2 - A\phi_i^R(f)c + A\psi_i(M) + A\phi_i^R(f)c}{(c-A)\psi_i(M)} &= t, \\
\frac{\phi_i^R(f)c^2 + A\psi_i(M)}{(c-A)\psi_i(M)} &= t.
\end{aligned}$$

Observar que la última expresión es válida para cualquier $i \in N$. Luego, tomemos $i, j \in N$ con $j \neq i$; así,

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_j^R(f)c^2 + A\psi_j(M)}{(c-A)\psi_j(M)} &= \frac{\phi_i^R(f)c^2 + A\psi_i(M)}{(c-A)\psi_i(M)}, \\
\phi_j^R(f)c^2 + A\psi_j(M)c &= \frac{\psi_j(M)}{\psi_i(M)}(\phi_i^R(f)c^2 + A\psi_i(M)), \\
\phi_j^R(f)c^2 + A\psi_j(M)c &= \frac{\psi_j(M)}{\psi_i(M)}\phi_i^R(f)c^2 + A\psi_j(M)c, \\
\phi_j^R(f)c &= \frac{\psi_j(M)}{\psi_i(M)}\phi_i^R(f)c.
\end{aligned}$$

Sea $i \in N$ fijo y consideremos $\acute{N}$ en el cual $j \in N \setminus \{i\}$ es reemplazado por el usuario $\acute{j}$. Así, $\acute{N} = N \cup \{\acute{j}\}$. Por el razonamiento anterior tenemos que

$$\phi_{\acute{j}}^R(f)c = \frac{\psi_{\acute{j}}(M)}{\psi_i(M)}\phi_i^R(f)c.$$

Por otro lado

$$\sum_{i \notin R} \psi_i(M) = \sum_{j \in R} \phi_j^R(f)c.$$

Así

$$\sum_{i \notin R} \psi_i(M) = \sum_{j \in R} \frac{\psi_j(M)}{\psi_i(M)}\phi_i^R(f)c.$$

La ecuación anterior implica que

$$\phi_i^R(f)c = \frac{\sum_{i \notin R} \psi_i(M)}{\sum_{j \in R} \psi_j(M)} \psi_i(M)c.$$

Así, hemos probado que si φ es igual a la solución dada en (29) para todo N tal que $|N| = n$ con $2 \leq n < m$, se tiene que esta solución es igual a la dada en (29) cuando

$$R = N \cup \{j\}, j \in M \setminus N.$$

Supongamos que se tiene la igualdad para cualquier R tal que $n < |R| \leq r < m$. Considerando $\acute{R} = R \cup \{\acute{j}\}$, donde $\acute{j} \in M \setminus R$ y aplicando el procedimiento anterior tenemos que las soluciones siguen siendo iguales; luego, se obtiene el resultado deseado.

$\square$

La importancia de este teorema radica en que nos permite resolver una situación de abandono y además, si utilizamos una solución en la que las fracciones de tiempo del problema N se obtienen con una repartición $\hat{f}$ que sea una regla de revisión y que cumpla el axioma de independencia de caminos obtenemos siempre la solución dada en (29), esto nos hace pensar que considerando el axioma de proporcionalidad y añadiendo probablemente otros axiomas la solución dada en (29) se puede caracterizar de manera única.

Recepción: 20/05/2015. Aceptación: 28/06/2015.

Referencias

[1] Chun, Y., Hokari, T. (2007). "On the Coincidence of the Shapley Value and the Nucleolus in Queueing Problems". Seoul Journal of Economics. 2, 223-238.

[2] Dipjyoti, M. "An Axiomatic characterization of Bayes Rule". Mathematical Social Sciences. Volume 47 (3), 261-273.

[3] Hart, S., Mas-Colell, A. (1989) "A potential, value and consistency". Econometrika. Vol 57, núm 3, 586-614.

[4] Maniquet, F. (2003) "A characterization of de Shapley value in queueing problems". Journal of Economic Theory. 109, 90-103.

[5] Moulin, H., Schenker, S. (1992) “Serial Cost Sharing”. Econometrika, Vol 60, 1009 - 1037.

[6] Owen, G. “A note on the nucleolus”. International Journal of Game Theory. Vol 3, núm 2, 101-113.

[7] Shapley, L. S. (1953). “A value for n-person games ” In R. Luce and A. Tucker (Eds.), Contributions to the theory of games(vol. III). Princeton,NJ: Princeton University Press.

[8] Young, H.P. (1985) “Cost allocation: Methods, Principles, Applications‘”. North- Holland, Amsterdan.