PERSPECTIVAS *Revista de Análisis de Economía, Comercio y Negocios Internacionales*
Volumen 8 / No. 1 / enero - junio 2014 / 5 - 30
ISSN 2007-2104

Nuevas familias de juegos q-cíclicos con único punto de equilibrio de Nash

Sara Aida Alaniz[1]
Universidad Nacional de San Luis
San Luis, Argentina
salaniz@fices.unsl.edu.ar

Luis Guillermo Quintas[2]
Universidad Nacional de San Luis
San Luis, Argentina
lquintas@unsl.edu.ar

Silvina Ángela Sevilla[3]
Instituto de Formación Docente Continua
San Luis, Argentina
silvinasevilla@yahoo.com.ar

Resumen

En el presente trabajo se construyen familias de juegos de 3 jugadores q-cíclicos (Marchi y Quintas (1983)), con únicos puntos de equilibrios prefijados, siguiendo los lineamientos expuestos por Alaniz y Quintas (2010). Las construcciones aquí presentadas también generalizan las realizadas por Alaniz, Giunta, Marchi y Quintas (1991), para juegos bipersonales. Se exhiben también los elementos de las matrices de pago de cada jugador para una familia de juegos q-cíclicos de n jugadores y se da un esquema de la demostración de unicidad de equilibrio del caso general de n-jugadores.

[1] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales.

[2] IMASL - CONICET, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico - Matemáticas y Naturales.

[3] Departamento de Matemática.

Palabras clave: Equilibrio de Nash, unicidad, juegos q-cíclicos.
Clasificación JEL: D7.

Abstract

In this paper we construct families of 3-person q-cyclic games (Marchi and Quintas (1983)), with unique prefixed equilibrium points, following the guidelines given by Alaniz and Quintas (2010). The constructions presented here also generalize those given by Alaniz, Giunta, Marchi and Quintas (1991), for two-person games. We exhibit the elements of the payoff matrices for a family of n-person q-cyclic games and we give an outline of the proof of uniqueness of equilibrium in this general case.

Keywords: Nash Equilibrium, uniqueness, q-cyclic games.
JEL classification: D7.

1. Introducción

El concepto de equilibrio introducido por Nash (1951) es considerado la solución más importante en la teoría no cooperativa de juegos. El conjunto de puntos de equilibrio de Nash es no vacío para cualquier juego finito si se usan estrategias mixtas, esto es, distribuciones de probabilidades sobre estrategias puras (Nash (1951)). Sin embargo en general hay una multiplicidad de equilibrios. Esto es un problema importante para pronosticar qué equilibrio se jugará. Si los jugadores no pueden comunicarse, cada jugador podría elegir una estrategia de equilibrio pero el resultado del juego podría no ser un equilibrio. Incluso si ellos pueden comunicarse, todavía persiste un problema serio porque las utilidades pueden ser completamente diferentes en un punto de equilibrio o en otro. Este problema no existe si el equilibrio es único.

Muchos estudios han sido hechos sobre unicidad de puntos de equilibrio de Nash. Por una parte se estudiaron algunas condiciones suficientes para garantizar la unicidad. También ha sido estudiado bajo qué condiciones es posible construir juegos con equilibrio único predeterminado. Construcciones de juegos con equilibrio único prefijado han sido hechas para juegos bimatriciales por Raghavan (1970). Allí se demostró que, si los puntos de equilibrio de un juego son completamente mixtos, entonces la matriz de cada jugador es cuadrada y el equilibrio es único. Millham (1972) mostró condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un juego con único punto de equilibrio prefijado completamente mixto. Kreps (1974) dió condiciones de unicidad cuando el punto de equilibrio no es completamente mixto. Heuer (1979) amplió y complementó estos resultados para equilibrios no completamente mixtos. Quintas (1988 a1988 a) b)) amplió estos resultados construyendo una amplia familia de juegos bimatriciales con puntos de equilibrio únicos. Marchi y Quintas (1987) también estudiaron juegos con valores prefijos para puntos de equilibrio únicos. Alaniz, Giunta, Marchi y Quintas (1991) ampliaron esta construcción para otras familias de juegos bimatriciales con puntos de equilibrio únicos.

Los juegos n-personales q-cíclicos (Marchi y Quintas (1983)) son una subclase de los juegos Polimatriciales (Yanovskaya (1968)). Los juegos q-cíclicos aparecen muchas veces en ejemplos de aplicación en la Administración Pública, donde los usuarios tienen que interactuar formando un ciclo. Por ejemplo cuando uno tiene que realizar un reclamo por un mal servicio ante un empleado, que a su vez depende de un supervisor, que a su vez depende de otra autoridad, que es a quien el usuario puede elegir con su voto. Esto conforma un ciclo donde cada jugador está jugando juegos bipersonales con su supervisor y sus empleados o usuarios del servicio. La estructura del conjunto de Equilibrios de Nash y caracterizaciones de estos juegos fueron estudiadas por Quintas (1989).

En el presente trabajo construimos nuevas familias de juegos n-personales q-cíclicos con único punto de equilibrio de Nash prefijado. Aquí se extienden las construcciones para juegos bimatriciales dadas por Marchi y Quintas (1987) y Quintas (1988 a1988 a) b)), siguiendo la línea de investigación presentada de Alaniz, Giunta, Marchi y Quintas (1991)) para juegos bimatriciales, presentamos construcciones alternativas a aquellas dadas por Alaniz y Quintas (2010) para juegos q-cíclicos.

2. Notaciones y resultados previos

Daremos algunas definiciones, notaciones y resultados que usaremos posteriormente.

Definición 1 *Sea* $\Gamma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n, A_1, A_2, ..., A_n\}$, *un juego q-cíclico, finito, en forma normal de n jugadores, donde* Σ_i *es el conjunto de estrategias puras del jugador i. Sea* A_i *la correspondiente función de pago, con* $i = 1, ...n$. *La definición de la función* A_i *es la siguiente:* $A_i(\sigma_1, ..., \sigma_i, ..., \sigma_n) = B_i\left(\sigma_i, \sigma_{q(i)}\right)$ *con* $\sigma_i \in \Sigma_i$ *y q una función que satisface:* $q(i) \neq i$ *y* $\left|q^{-1}(i)\right| = 1$ *donde* $|\,.\,|$ *indica la cardinalidad de conjunto. .*

En el presente trabajo consideraremos juegos en donde:

1. $q(i) = i + 1 \bmod n$ y tomaremos $j = q(i)$.

2. Cada jugador tiene m estrategias, es decir, $|\Sigma_i| = m$, para $i = 1, ..., n$

Definición 2 *Una estrategia mixta para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras* $\Sigma_i = \left\{\sigma_1^i, \sigma_2^i, ..., \sigma_m^i\right\}$, *es decir, un vector definido por:* $x_i = \left(x_i(\sigma_1^i), x_i\left(\sigma_2^i\right), ..., x_i\left(\sigma_m^i\right)\right) = \left(x_1^i, x_2^i, ..., x_m^i\right)$ *donde* x_t^i *es la probabilidad de que el jugador i juegue su estrategia* $\sigma_t^i \in \Sigma_i$ *con* $t = 1, 2, ..., m$.

Definición 3 *Sea* $\tilde{\sum_i}$ *el conjunto de las estrategias mixtas para el jugador i:*

$$\tilde{\sum_i} = \left\{x_i \colon \sum_{t=1}^{t=m} x_t^i = 1 \quad con \quad x_t^i \geq 0, t = 1, 2, ..., m\right\}$$

Notación 4 *Llamaremos a:* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{i=n} \tilde{\sum_i}$ *una n-upla de estrategias mixtas de los n jugadores y denotaremos* $\left(x_{N-\{i\}}^*, x_i\right) = \left(x_1^*, ..., x_{i-1}^*, \ x_i, \ x_{i+1}^*, ..., x_n^+\right)$.

Definición 5 *La función esperanza matemática E_i para cada jugador i, en el juego q-cíclico, se define de la siguiente manera:*
$E_i\,(x) = F_i\left(x_i, x_{q(i)}\right)$ *donde F_i es la función esperanza de B_i.*

Las funciones esperanzas matemáticas, tienen la siguiente forma:

$$E_i(x) = F_i(x_i, x_j) = \sum_{l=1}^{l=m}\sum_{t=1}^{t=m} a_{tl}^{ij} x_l^j x_t^i \qquad \text{con } i = 1, 2, \ldots n$$

Notación 6 *Denominaremos indistintamente: $F_i\left(r, x_j\right) = F_i\left(e_r, x_j\right)$, donde e_r es una m-upla con 1 en el lugar r y 0 en el resto de los lugares.*

Definición 7 *Una n-upla $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in \prod_{t=1}^{t=n} \tilde{\sum_t}$ es un punto de Equilibrio de Nash si y sólo si $E_i(\overset{*}{x}) \geq \mathrm{E}_i(\underset{N-\{i\}}{\overset{*}{x}}, x_i)$ para cada $x_i \in \tilde{\sum_i}$; y para cada $i = 1, \ldots, n$.*

A continuación para cada jugador se definen los conjuntos de estrategias que son las mejores respuestas a una $n-1$ upla de estrategias de los demás jugadores. Estos conjuntos se usan para caracterizar los equilibrios de Nash.

Definición 8 *Los conjuntos de todas las estrategias puras, que son mejores respuestas contra $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{t=1}^{t=n} \tilde{\sum_t}$, se definen de la siguiente manera:*
$J_i(x_{q(i)}) = \{\sigma_r^i \in \Sigma_i\text{: } F_i(\sigma_r^i,\ \ x_j) \geq F_i(\sigma_t^i,\ x_{q(i)})$ para cada $\sigma_{\mathrm{t}}^{\mathrm{i}} \in \Sigma_{\mathrm{i}}$ con $\mathrm{t} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}\}$.

Se usará la siguiente caracterización de puntos de Equilibrio de Nash.

Teorema 9 $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{i=n} \tilde{\sum_i}$ *es un punto de Equilibrio de Nash, si y sólo si, $S\,(x_i) \subseteq J_i\left(x_{q(i)}\right)$, para cada $i = 1, 2, ..., n$, donde $S\,(x_i) = \left\{\sigma_s^i \in \Sigma_j x_s^i > 0 \text{ con } s = 1, 2, ..., m\right\}$ es el soporte de la estrategia mixta x_i.*

Definición 10 *Un punto* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{i=n} \tilde{\sum_i}$ *que es un Equilibrio de Nash resulta completamente mixto si* $S(x_j) = \Sigma_j$.

En este caso, se dice que cada jugador tiene todas sus estrategias activas.

Definición 11 *Sea* $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in \prod_{t=1}^{t=n} \tilde{\sum_t}$ *un punto de Equilibrio de Nash de un juego* $\tilde{\Gamma}$, *se le llaman valores esperados del juego a* v_1, $v_2, ..., v_n$, *donde:* $v_i = E_i(x^*)$ *para* $i = 1, 2, ..., n$.

En una primera instancia consideraremos $n = 3$.

3. Construcción de familias de juegos q-cíclicos de 3 jugadores con valores predeterminados.

En esta sección se establecen condiciones sobre E_1, la función de esperanza matemática del jugador 1, de manera que $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 \times \tilde{\Sigma}_2 \times \tilde{\Sigma}_3$ sea a posteriori un punto de equilibrio de Nash y tome valores predeterminados.

Sea $y = (y_1, y_2, y_3) \in \tilde{\Sigma}_2$ un punto completamente mixto. Se consideran también los siguientes puntos, que son vértices del simplex $\tilde{\Sigma}_2 : e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Además se eligen tres puntos que tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{y}^1 &= \left(0, \bar{y}_2^1, \bar{y}_3^1\right) \bar{y}^1 = \left(0, \bar{y}_2^1, \bar{y}_3^1\right) \\ \bar{y}^2 &= \left(\bar{y}_1^2, 0, \bar{y}_3^2\right) \bar{y}^2 = \left(\bar{y}_1^2, 0, \bar{y}_3^2\right) \\ \bar{y}^3 &= \left(\bar{y}_1^3, \bar{y}_2^3, 0\right) \bar{y}^3 = \left(\bar{y}_1^3, \bar{y}_2^3, 0\right) \end{aligned}$$

Estos puntos se construyen por proyecciones ortogonales del punto $y = (y_1, y_2, y_3) \in \tilde{\Sigma}_2$ sobre las correspondientes aristas del simplex (ver Figura 1).

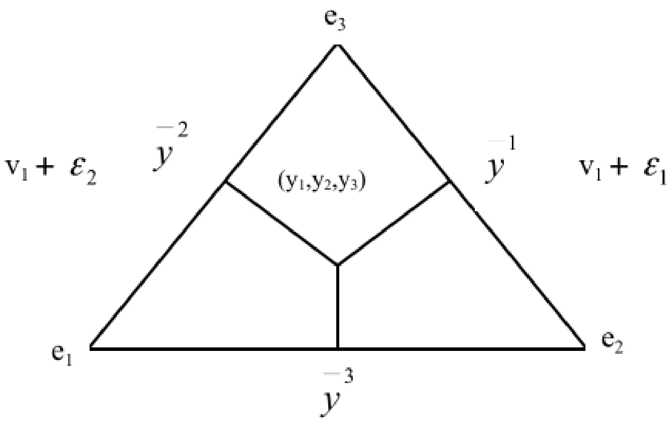

Figura 1

Así se requiere que

$$\left\langle \left(y - \overset{-1}{y,} \right), (e_3 - e_2) \right\rangle = 0 \tag{1}$$

donde $\langle\rangle$ *es el producto interno*

$$\bar{y}_1^1 + \bar{y}_2^1 + \bar{y}_3^1 = 1 \qquad \text{con } \bar{y}_1^1 = 0 \tag{2}$$

de (1) y (2) se obtiene:

$$\bar{y}_2^1 - \bar{y}_3^1 = y_2 - y_3; \qquad \bar{y}_1^1 + \bar{y}_2^1 + \bar{y}_3^1 = 1$$

Resolviendo el sistema: $\bar{y}_2^1 = y_2 - y_3 + \bar{y}_3^1$, operando se obtiene:

$$\bar{y}_2^1 = \frac{1}{2} y_1 + y_2$$

Y de manera análoga se tiene que $\bar{y}_2^3 = \frac{1}{2} y_3 + y_2$

Luego para obtener $\bar{y}_1^2$, $\bar{y}_3^2$:

$$\left\langle \left(y - \overset{-2}{y,} \right), (e_3 - e_1) \right\rangle = 0 \tag{3}$$

$$\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{y}_3^2 = 1 \qquad \text{con } \ \bar{y}_2^2 = 0 \tag{4}$$

de (3) y (4) se obtiene: $\bar{y}_1^2 = \frac{1}{2}y_2 + y_1$.Y de manera análoga se tiene que $\bar{y}_3^2 = \frac{1}{2}y_2 + y_3$.

Finalmente obtenemos $\bar{y}_1^3$, $\bar{y}_2^3$:

$$\left\langle \left(y - \overset{-3}{y,} \right), (e_2 - e_1) \right\rangle = 0 \tag{5}$$

$$\bar{y}_3^3 + \bar{y}_3^3 + \bar{y}_3^3 = 1 \qquad \text{con } \ \bar{y}_3^3 = 0 \tag{6}$$

de (5) y (6) se obtiene.

$$\bar{y}_1^3 = \frac{1}{2}y_3 + y_1; \qquad \bar{y}_2^3 = \frac{1}{2}y_3 + y_2$$

Así:

$$\bar{y}^1 = \left(0, \frac{1}{2}y_1 + y_2, \frac{1}{2}y_1 + y_3\right)$$

$$\bar{y}^2 = \left(\frac{1}{2}y_2 + y_1,\ 0\ , \frac{1}{2}y_2 + y_3\right)$$

$$\bar{y}^3 = \left(\frac{1}{2}y_3 + y_1, \frac{1}{2}y_3 + y_2,\ 0\right)$$

Teniendo en cuenta la definición 5 se tiene que $E_1(x, y, z) = F_1(x, y) = \sum_{s=1}^{s=3} \sum_{r=1}^{r=3} a_{rs}^{12}\ y_s x_r$. Y en particular $E_1(x, y, z) = F_1(e_i, y) = \sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12}\ y_{\ s} = A_1^i y^T$.

Denotaremos $F_1(e_i, y) = F_1(i, y)$.

Plantearemos las siguientes condiciones para llevar a cabo la construcción del los juegos:

- En el punto $y = (y_1, y_2, y_3)$ se alcanza el valor v_1, es decir:

$$F_1(i, y) = \sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12}\ y_{\ s} = A_1^i y^T = v_1$$

- En $\bar{y}^1$se alcanza el valor $v_1{+}\varepsilon_1$ con $\varepsilon_1>0$, esta condición se traduce en la siguiente ecuación:

$$F_1(i,\bar{y}^1) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq 1}}^{s=3} a_{is}^{12}\ \bar{y}_s^1 = v_1{+}\varepsilon_1$$

Teniendo en cuenta las componentes de $\bar{y}^1$:

$$\bar{y}^1 = (0, \frac{1}{2}y_1 + y_2, \frac{1}{2}y_1 + y_3)$$

la ecuación anterior se transforma en:

$$F_1(i,\bar{y}^1) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq 1}}^{s=3} a_{is}^{12}\ (y_s{+}\frac{1}{2}y_1) = v_1{+}\varepsilon_1$$

- En $\bar{y}^2$ se alcanza el valor $v_1{+}\varepsilon_2$ con $\varepsilon_2 > 0$, esta condición se traduce en la siguiente ecuación:

$$F_1(i,\bar{y}^2) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq 2}}^{s=3} a_{is}^{12}\ \bar{y}_s^2 = v_1{+}\varepsilon_2$$

Teniendo en cuenta las componentes de $\bar{y}^2$:

$$\bar{y}^2 = \left(\frac{1}{2}y_2 + y_1, 0, \frac{1}{2}y_2 + y_3\right)$$

la ecuación anterior se transforma en:

$$F_1(i,\bar{y}^2) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq 2}}^{s=3} a_{is}^{12}\ \left(y_s{+}\frac{1}{2}y_2\right) = v_1{+}\varepsilon_2$$

- En $\bar{y}^3$se alcanza el valor $v_1+\varepsilon_3$ con $\varepsilon_3 > 0$, esta condición se traduce en la siguiente ecuación:

$$F_1(i, \bar{y}^3) = \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq 3}}^{s=3} a_{is}^{12}\ \bar{y}_s^3 = v_1+\varepsilon_3$$

Teniendo en cuenta las componentes de $\bar{y}^3$:

$$\bar{y}^3 = \left(\frac{1}{2}y_3 + y_1, \frac{1}{2}y_3 + y_2, 0\right)$$

la ecuación anterior se transforma en:

$$F_1(i, \bar{y}^3) = \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq 3}}^{s=3} a_{is}^{12}\ \left(y_s+\frac{1}{2}y_3\right) = v_1+\varepsilon_3$$

Ahora introducimos la función f_{21}. Esta función distribuye los hiperplanos máximos en cada vértice del simplex del jugador 1. Se define una función biyectiva $f_{21} : \Sigma_2 \to \Sigma_1$, $f_{21}(j) = i$, donde i es el índice correspondiente al hiperplano maximizante. Además por la construcción arriba realizada resultará que $F_1(i, y) = v_1$.

Esto implica que: $F_1(i, j) = a_{ij} > a_{rj} = F_1(r, j)$ para cada $r \in\Sigma_1$. Para cada $e_i \in\ \tilde{\Sigma}_1$, para cada e$_j\in\ \tilde{\Sigma}_2$, $E_1(x, y, z) = F_1(x, y) = \sum_{s=1}^{s=3}\sum_{r=1}^{r=3} a_{rs}^{12} y_s x_r$ y como i es hiperplano maximizante $F_1(i, j) = a_{ij}^{12}$. Así la definición implica que $J_1(e_j) = \{f_{21}(j)\}$.

Por lo tanto, sobre cada vértice de $\tilde{\sum}_2$ habrá solamente un hiperplano máximo y f_{21} distribuirá diferentes hiperplanos máximos sobre cada vértice.

Requeriremos que para cada t, tal que $f_{21}(t) \neq i$, en cada punto $\bar{y}_t$ el $f_{21}(t)$ – hiperplano, pase “por debajo” del $f_{21}(j)$ – hiperplano. Este último hiperplano toma el valor $v_1 + \varepsilon_j$. Esto dice que, para $i \neq f_{21}(t)$:

$$\begin{aligned} F_1(i, \bar{y}_j) &= \sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12}\ \bar{y}_s^t = \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{s=3} a_{is}^{12}\ (y_s + \frac{1}{2} y_t) = v_1 + \varepsilon_1 \\ &> \sum_{s=1}^{s=3} a_{f_{21}(t)s}^{12}\ \bar{y}_s^t = \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq t}}^{s=3} a_{f(t)s}^{12}\ (y_s + \frac{1}{2} y_t) = F_1(f_{21}(t),\ \bar{y}_j) \end{aligned}$$

Ahora en el punto $y = (y_1, y_2, y_3)$ se requiere que todos los hiperplanos tomen el valor v_1. Es decir, para cada i (con $i = 1, 2, 3$) en el punto $y = (y_1, y_2, y_3)$ se satisface la ecuación:

$$\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12}\ y_s = v_1$$

y para cada t tal que $f_{21}(t) \neq i$, en el que el punto $\bar{y}_t$ se satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12} \left(y_s + \frac{1}{2} y_t\right)\right] - a_{it}^{12} \left(y_t + \frac{1}{2} y_t\right) \\ = &\left[\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12} \left(y_s + \frac{1}{2} y_t\right)\right] - a_{it}^{12} \frac{3}{2} y_t = v_1 + \varepsilon_1 \end{aligned}$$

- Consideremos a $f_{21}(j) = i$ (para otras formas de definir f_{21}se tienen construcciones similares). Así se tiene el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}^{12} y_1 + a_{12}^{12} y_2 + a_{13}^{12} y_3 = v_1 \\ a_{11}^{12} (y_1 + \frac{1}{2} y_2) + a_{13}^{12} (y_3 + \frac{1}{2} y_2) = v_1 + \varepsilon_2 \\ a_{11}^{12} (y_1 + \frac{1}{2} y_3) + a_{12}^{12} (y_2 + \frac{1}{2} y_3) = v_1 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

  Para simplificar el análisis consideraremos un mismo $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$. Resolviendo el sistema anterior se obtiene:

$$a_{11}^{12} = v_1 + \frac{2}{3} \varepsilon \left(4 + \frac{y_2}{y_3} + \frac{y_3}{y_2}\right)$$

$$a_{12}^{12} = v_1 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_3}{y_2} + \frac{y_1}{y_3}\right)$$

$$a_{13}^{12} = v_1 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{y_1}{y_3} + \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3}\right)$$

- En forma similar cuando $i = 2$, considerando los puntos y , $\bar{y}_1$, $\bar{y}_3$; se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{21}^{12}y_1 + a_{22}^{12}y_2 + a_{23}^{12}y_3 = v_1 \\ a_{22}^{12}(y_2 + \frac{1}{2}y_1) + a_{23}^{12}(y_3 + \frac{1}{2}y_1) = v_1 + \varepsilon_1 \\ a_{21}^{12}(y_1 + \frac{1}{2}y_3) + a_{22}^{12}(y_2 + \frac{1}{2}y_3) = v_1 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Nuevamente, resolviendo el sistema de manera análoga al anterior y considerando $\varepsilon > 0$ arbitrario, obtenemos:

$$a_{21}^{12} = v_1 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{y_2}{y_1} + \frac{y_3}{y_1} + \frac{y_2}{y_3}\right)$$

$$a_{22}^{12} = v_1 + \frac{2}{3}\varepsilon\left(4 + \frac{y_3}{y_1} + \frac{y_1}{y_3}\right)$$

$$a_{23}^{12} = v_1 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{y_2}{y_3} + \frac{y_1}{y_3} + \frac{y_2}{y_1}\right)$$

- Cuando $i = 3$, considerando los puntos puntos y , $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$; se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{31}^{12}y_1 + a_{32}^{12}y_2 + a_{33}^{12}y_3 = v_1 \\ a_{32}^{12}(y_2 + \frac{1}{2}y_1) + a_{33}^{12}(y_3 + \frac{1}{2}y_1) = v_1 + \varepsilon_1 \\ a_{31}^{12}(y_1 + \frac{1}{2}y_3) + a_{33}^{12}(y_3 + \frac{1}{2}y_2) = v_1 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Nuevamente, resolviendo el sistema de manera análoga al anterior y considerando $\varepsilon > 0$ arbitrario, obtenemos:

$$a_{31}^{12} = v_1 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{y_3}{y_1} + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_3}{y_2}\right)$$

$$a_{32}^{12} = v_1 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{y_3}{y_2} + \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_3}{y_1}\right)$$
$$a_{33}^{12} = v_1 + \frac{2}{3}\varepsilon\left(4 + \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1}\right)$$

Así se ha completado el cálculo de los coeficientes de las matriz A_1del jugador 1.

Observación 12 .

* *Los valores de los coeficientes de la matriz A_1 son $a_{ij}^{12} > v_1$, cuando $f_{21}(j) = i$. Esto se condice con el hecho que $f_{21}(j) = i$ (el i-ésimo-hiperplano) es máximo en el vértice e_j.*

* *Los valores de los coeficientes de la matriz A_1, cuando $f_{21}(j) \neq i$ son $a_{ij}^{12} < v_1$. Esto es consistente con que en el vértice j-ésimo del simplex $\tilde{\sum}_2$ el hiperplano i-ésimo no es máximo.*

* *Como $0 < y_j < 1$, los elementos de la matriz del primer jugador están bien definidos.*

* *La matriz A_1 de pago del jugador 1, es no singular, debido a que como $\varepsilon > 0$, $y_j > 0$ y $v \neq 0$ entonces el $\det(A_1) \neq 0$.*

Construcción de las matrices del jugador 2 y 3

La construcción de la matriz de pago del jugador 2 se realiza de manera similar, a como se construyó A_1. Se establecen condiciones sobre E_2, la función esperanza matemática del jugador 2, de manera tal que $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 \times \tilde{\Sigma}_2 \times \tilde{\Sigma}_3$ sea punto de equilibrio de Nash.

Sea $z = (z_1, z_2, z_3) \in \tilde{\Sigma}_3$, sean los vértices del simplex $\tilde{\Sigma}_3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Y se eligen tres puntos, que tienen la siguiente forma:

$$\bar{z}^1 = \left(0, \bar{z}_2^1, \bar{z}_3^1\right)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 &= \left(\bar{z}_1^2, 0, \bar{z}_3^2\right) \\ \bar{z}^3 &= \left(\bar{z}_1^3, \bar{z}_2^3, 0\right) \end{aligned}$$

Nuevamente estos puntos se construyen por medio de proyecciones ortogonales del punto z sobre las aristas del simplex.

Ahora se elige la función biyectiva f_{32} de tal manera que satisfaga $f_{32} : \Sigma_3 \to \Sigma_2,\ f_{32}(k) = j$-hiperplano con $F_2(j, z) = v_2$.

Para obtener la matriz de pago A_2 del segundo jugador, para cada j fijo, los coeficientes de a_{jk}^{23} deben satisfacer las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}^{23} z_1 + a_{12}^{23} z_2 + a_{13}^{23} z_3 = v_2 \\ a_{11}^{23}(z_1 + \frac{1}{2} z_2) + a_{13}^{23}(z_3 + \frac{1}{2} z_2) = v_2 + \varepsilon_2 \\ a_{11}^{23}(z_1 + \frac{1}{2} z_3) + a_{12}^{23}(z_2 + \frac{1}{2} z_3) = v_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema y considerando $\varepsilon > 0$ arbitrario, obtenemos:

$$a_{11}^{23} = v_2 + \frac{2}{3}\varepsilon \left(4 + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_2}\right)$$

$$a_{12}^{23} = v_2 - \frac{2}{3}\varepsilon \left(-1 + 2\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3}\right)$$

$$a_{13}^{23} = v_2 - \frac{2}{3}\varepsilon \left(-1 + 2\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3}\right)$$

- Cuando $j = 2$ se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{21}^{23} z_1 + a_{22}^{23} z_2 + a_{23}^{23} z_3 = v_2 \\ a_{22}^{23}(z_2 + \frac{1}{2} z_1) + a_{23}^{23}(z_3 + \frac{1}{2} z_1) = v_2 + \varepsilon_1 \\ a_{21}^{23}(z_1 + \frac{1}{2} z_3) + a_{22}^{23}(z_2 + \frac{1}{2} z_3) = v_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de manera análoga a los anteriores, se obtiene que:

$$a_{21}^{23} = v_2 - \frac{2}{3}\varepsilon \left(-1 + 2\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_2}{z_3}\right)$$

$$a_{22}^{23} = v_2 + \frac{2}{3}\varepsilon\left(4 + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_1}{z_3}\right)$$

$$a_{23}^{23} = v_2 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{z_2}{z_3} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1}\right)$$

- Cuando $j = 3$ se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{31}^{23}z_1 + a_{32}^{23}z_2 + a_{33}^{23}z_3 = v_2 \\ a_{32}^{23}(z_2 + \frac{1}{2}z_1) + a_{33}^{23}(z_3 + \frac{1}{2}z_1) = v_2 + \varepsilon_1 \\ a_{31}^{23}(z_1 + \frac{1}{2}z_2) + a_{33}^{23}(z_3 + \frac{1}{2}z_2) = v_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, y considerando $\varepsilon\rangle 0$ arbitrario obtenemos:

$$a_{31}^{23} = v_2 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{z_3}{z_1} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2}\right)$$

$$a_{32}^{23} = v_2 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_1}\right)$$

$$a_{33}^{23} = v_2 + \frac{2}{3}\varepsilon\left(4 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right)$$

Para encontrar la matriz de pago del jugador 3, se procede de manera análoga a como se construyeron las matrices de pago de los jugadores 1 y 2. Se establecen nuevamente condiciones sobre E_3, la función esperanza matemática del jugador 3, de manera que $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 \times \tilde{\Sigma}_2 \times \tilde{\Sigma}_3$ sea punto de equilibrio de Nash.

Sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in \tilde{\Sigma}_1$, se consideran las siguientes ternas que son vértices del simplex $\tilde{\Sigma}_1 : e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$. Y se eligen tres puntos, que tienen la siguiente forma:

$$\bar{x}^1 = \left(0, \bar{x}_2^1, \bar{x}_3^1\right)$$

$$\bar{x}^2 = \left(\bar{x}_1^2, 0, \bar{x}_3^2\right)$$

$$\bar{x}^3 = \left(\bar{x}_1^3, \bar{x}_2^3, 0\right)$$

Para obtener los $\bar{x}_i$ nuevamente se hacen proyecciones ortogonales sobre las aristas del simplex. Ahora introducimos la función f_{13} para definir la matriz del jugador 3:

Sea la correspondiente función biyectiva f_{13} de modo que satisfaga $f_{13}: \Sigma_1 \to \Sigma_3$, $f_{13}(i) = k$-hiperplano con $F_3(k,x) = v_3$ (donde k es el índice correspondiente al hiperplano maximizante).

Para obtener la matriz de pago A_3 del tercer jugador, para cada k fijo, los coeficientes de a_{ki}^{31} deben satisfacer las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}^{31}x_1 + a_{12}^{31}x_2 + a_{13}^{31}x_3 = v_1 \\ a_{11}^{31}(x_1 + \frac{1}{2}x_2) + a_{13}^{31}(x_3 + \frac{1}{2}x_2) = v_3 + \varepsilon_2 \\ a_{11}^{31}(x_1 + \frac{1}{2}x_3) + a_{12}^{31}(x_2 + \frac{1}{2}x_3) = v_3 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, y considerando $\varepsilon > 0$ arbitrario, obtenemos:

$$a_{11}^{31} = v_3 + \frac{2}{3}\varepsilon\left(4 + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right)$$

$$a_{12}^{31} = v_3 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3}\right)$$

$$a_{13}^{31} = v_3 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3}\right)$$

◦ Para $k = 2$ se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{21}^{31}x_1 + a_{22}^{31}x_2 + a_{23}^{31}x_3 = v_3 \\ a_{22}^{31}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) + a_{23}^{31}(x_3 + \frac{1}{2}x_1) = v_3 + \varepsilon_1 \\ a_{21}^{31}(x_1 + \frac{1}{2}x_3) + a_{22}^{31}(x_2 + \frac{1}{2}x_3) = v_3 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

Resolviendo de manera análoga al anterior y considerando $\varepsilon > 0$ arbitrario se obtiene:

$$a_{21}^{31} = v_3 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_3}\right)$$

$$a_{22}^{31} = v_3 + \frac{2}{3}\varepsilon\left(4 + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3}\right)$$
$$a_{23}^{31} = v_3 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1}\right)$$

- Cuando $k = 3$ se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{31}^{31}x_1 + a_{32}^{31}x_2 + a_{33}^{31}x_3 = v_3 \\ a_{32}^{31}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) + a_{33}^{31}(x_3 + \frac{1}{2}x_1) = v_3 + \varepsilon_1 \\ a_{31}^{31}(x_1 + \frac{1}{2}x_2) + a_{33}^{31}(x_3 + \frac{1}{2}x_2) = v_3 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Nuevamente, resolviendo el sistema de manera análoga al anterior se obtiene:

$$a_{31}^{31} = v_3 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2}\right)$$
$$a_{32}^{31} = v_3 - \frac{2}{3}\varepsilon\left(-1 + 2\frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x2} + \frac{x_3}{x_1}\right)$$
$$a_{33}^{31} = v_3 + \frac{2}{3}\varepsilon\left(4 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)$$

Así se ha completado el cálculo de los coeficientes de las matrices A_2 y A_3de los jugadores 2 y 3.

Observación 13 *Al igual que en la Observación anterior, se tiene que:*

* *Los valores de los coeficientes de la matrices calculadas están bien definidos y las matrices resultan no singulares.*

4. Equilibrio de Nash y unicidad

Probaremos que el punto (x, y, z) es el único equilibrio de Nash del juego. Para ello verificaremos que el punto $(x, y, z) = ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3))$ con $x \in \tilde{\Sigma}_1$, $y \in \tilde{\Sigma}_2$, $z \in \tilde{\Sigma}_3$ y $x_s > 0$, $y_s > 0$, $z_s > 0$ para $s = 1, 2, 3$ resulta un Punto de Equilibrio Nash. Es decir se deben satisfacer las inclusiones: $S(x) \subseteq J_1(y)$; $S(y) \subseteq J_2(z)$; $S(z) \subseteq J_3(x)$ (Teorema 9).

Esto efectivamente se cumple debido a:

* Que todos los hiperplanos del primer jugador toman el mismo valor v_1 sobre el punto $y = (y_1, y_2, y_3)$, ya que $\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12} \; y_s = v_1$. Entonces $J_1(y) = \{1, 2, 3\} = S(x)$.

* Que todos los hiperplanos del segundo jugador toman el mismo valor v_2 sobre el punto $z = (z_1, z_2, z_3)$, ya que $\sum_{s=1}^{s=3} a_{ij}^{23} \; z_s = v_2$. Entonces $J_2(z) = \{1, 2, 3\} = S(y)$.

* Que todos los hiperplanos del tercer jugador toman el mismo valor v_3 sobre el punto $x = (x_1, x_2, x_3)$, ya que $\sum_{s=1}^{s=3} a_{ks}^{31} \; x_s = v_3$. Entonces $J_3(x) = \{1, 2, 3\} = S(z)$.

Concluimos así que en la construcción realizada anteriormente, el punto prefijado es un Equilibrio de Nash

Chequearemos ahora la unicidad del Punto de Equilibrio de Nash.

Observemos que como consecuencia del Teorema 9, para que ello ocurra se deben elegir funciones f_{21}, f_{32} y f_{13} que satisfagan: Para cada $(k`, k")$ $\in \tilde{\Sigma}_3 \times \tilde{\Sigma}_3$ si $f_{13} \circ f_{21} \circ f_{32}(k`) = k"$ entonces $f_{13} \circ f_{21} \circ f_{32}(k") \neq k`$.

O equivalentemente: Para cada $(j`, j") \in \tilde{\Sigma}_2 \times \tilde{\Sigma}_2$ si $f_{32} \circ f_{13} \circ f_{21}(j`) = j"$ entonces si $f_{32} \circ f_{13} \circ f_{21}(j") \neq j`$.

O equivalentemente: Para cada $(i`, i") \in \tilde{\Sigma}_1 \times \tilde{\Sigma}_1$ si $f_{21} \circ f_{32} \circ f_{13}(i`) = i"$ entonces $f_{21} \circ f_{32} \circ f_{13}(i") \neq i`$.

En nuestro caso, al haber elegido las funciones $f_{21}(j) = j + 1, \mathrm{mod}\, 3$; $f_{32}(k) = k$ y $f_{13}(i) = i$, se satisfacen las condición de unicidad de equilibrio arriba mencionadas. Esto se hace así para evitar ciclos menores donde podrían aparecer otros equilibrios en las caras o vértices del simplex (esto ocurriría por ejemplo si eligiéramos todas las f_{ij} como funciones identidad). Por lo tanto la construcción realizada tiene a (x,y,z) como Único Equilibrio de Nash.

Observación 14 *Mostramos a continuación dos simples ejemplos de construcciones de juegos q-cíclicos resultantes de acuerdo a las matrices aquí definidas y los comparamos con los juegos definidos en Alaniz y Quintas (2010).*

Ejemplo 15 *Consideremos* $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 \times \tilde{\Sigma}_2 \times \tilde{\Sigma}_3$ *con* $x = (x_1, x_2, x_3) = y = (y_1, y_2, y_3) = z = (z_1, z_2, z_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$, $\varepsilon > 0$ *arbitrario,* $v_i = 0$ *para* $i = 1, 2, 3$, $f_{21}(j) = j + 1, \mathrm{mod}\, 3$ *;* $f_{32}(k) = k$ *y* $f_{13}(i) = i$.

En este caso tanto las proyecciones ortogonales (que se usan en el presente trabajo) como las medianas (que usan Alaniz y Quintas (2010)) seleccionan el punto medio de cada lado del simplex correspondiente y por lo tanto ambas construcciones coinciden. Así se tiene:

$$a_{31}^{12} = -2\varepsilon$$

$$a_{32}^{12} = -2\varepsilon$$

$$a_{33}^{12} = 4\varepsilon$$

Similarmente se definen los coeficientes restantes y también resultan coincidentes.

Ejemplo 16 *Consideremos* $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 \times \tilde{\Sigma}_2 \times \tilde{\Sigma}_3$ *con* $x = (x_1, x_2, x_3) = z = (z_1, z_2, z_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) = (1/2, 1/4, 1/4)$, $\varepsilon > 0$ *arbitrario,* $v_i = 0$ *para* $i = 1, 2, 3$, $f_{21}(j) = j + 1, \mathrm{mod}\, 3$ *;* $f_{32}(k) = k$ *y* $f_{13}(i) = i$.

En este caso las construcciones que aquí se presentan implican que:

$$a_{31}^{12} = -\varepsilon$$

$$a_{32}^{12} = -\varepsilon$$

$$a_{33}^{12} = \frac{13}{3}\varepsilon$$

Mientras que las dadas en Alaniz y Quintas (2010)) prescriben:

$$a_{31}^{12} = -3\varepsilon$$

$$a_{32}^{12} = -3\varepsilon$$

$$a_{33}^{12} = 3\varepsilon$$

Por lo tanto ambas construcciones definen distintos juegos con único equilibrio de Nash.

5. Generalización de la construcción para juegos cíclicos de n-jugadores

La construcción que realizamos anteriormente para 3 jugadores se puede generalizar para juegos q-cíclicos de n jugadores con m estrategias cada uno, de tal manera que el punto completamente mixto seleccionado resulte el único Equilibrio de Nash del juego.

Damos a continuación algunos detalles de los lineamientos que guían las construcciones de las matrices en el caso general. En este caso se construyen la matrices de pago A_i de cada jugador con $i = 1, 2, ..., n$, y para ello, en forma similar a lo hecho para 3 jugadores, se establecen nuevamente condiciones sobre la función de Esperanza Matemática E_i para que haya único punto de Equilibrio de Nash.

Así, se considera un punto arbitrario, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{i=n} \tilde{\sum_i}$, es decir que:

$$(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n}) = \left(\left(\mathrm{x}_1^1, \mathrm{x}_2^1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{m}^1\right), \left(\mathrm{x}_1^2, \mathrm{x}_2^2, ..., \mathrm{x}_\mathrm{m}^2\right), ..., \left(\mathrm{x}_1^\mathrm{n}, \mathrm{x}_2^\mathrm{n}, ..., \mathrm{x}_\mathrm{m}^\mathrm{n}\right)\right)$$

con $\sum_{t=1}^{t=m} x_t^i = 1$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. y $x_t^i > 0$ para cada $t = 1, 2, ..., m$ y cada $i = 1, 2, ..., n$. Es decir, que $|S(x_i)| = m$ para $i = 1, 2, ...n$.

Se eligen valores arbitrarios, v_i con $i = 1, ..., n$, que luego resultarán los pagos esperados del punto de equilibrio.

Nuevamente se hacen proyecciones ortogonales de cada punto x_i sobre las caras opuestas a cada vértice del simplex correspondiente, resultando en cada caso seleccionados m puntos sobre los cuales nuevamente se asume que las funciones de pago tienen valores $v_i + \varepsilon_i$.

Procediendo como en los casos estudiados en la sección anterior se obtiene:

$$a_{rs}^{ij} = \begin{cases} v_i + \varepsilon_i \frac{(m-1)}{m} \left(2\,(m-1) + \sum\limits_{\substack{k,s=1 \\ k\neq s \\ k\neq r}}^{m} \frac{x_k^j}{x_s^j} \right) & para \quad f_{ji}(s) = r \\ v_i - \varepsilon_i \frac{(m-1)}{m} \left(-\,(m-2) + \frac{2x_r^j}{x_r^j} + \sum\limits_{\substack{s\neq r \\ s\neq p}}^{m} \frac{x_s^j}{x_r^j} + \sum\limits_{\substack{l\neq s \\ l\neq p}}^{m} \frac{x_p^j}{x_l^j} \right) & para\; f_{ji}(s) \neq r \end{cases}$$

Observación 17 *Como* $0 < x_s^j < 1$ *los coeficientes de las matrices están bien definidos.*

Cuando $f_{ji}(s) = r$, *dichos elementos son* $a_{rs}^{ij} > v_i$. *Esto coincide con el esquema geométrico desarrollado para* $n = 3$ *en donde en el vértice r -ésimo del simplex* $\widetilde{\Sigma_j}$ *el hiperplano r-ésimo es máximo.*

Cuando $f_{ji}(s) \neq r$; $a_{rs}^{ij} < v_i$ *así en el vértice r -ésimo del simplex* $\widetilde{\Sigma_j}$ *el hiperplano r-ésimo no es máximo allí.*

Eligiendo nuevamente las funciones f_{ji} como en la sección anterior evitando que se produzcan ciclos que generen pontos de equilibrios sobres las caras o vértices de los simple (por ejemplo siendo todas funciones f_{ji} como funciones identidad salvo una de ellas que sea la identidad mas uno), se obtiene único punto de equilibrio de Nash completamente mixto.
Dadas las matrices de pago $A_1, A_2, ..., A_n$ de los jugadores, en forma similar a la realizada para juegos q-cíclicos con único punto de equilibrio (Alaniz S. and Quintas L. G. (2010)), se eligen funciones f_{ji} y Φ que satisfacen: Para cada $(r\prime, r") \in \Sigma_j x \Sigma_j$: $\Phi \circ f_{ji}\,(r') = r''$, *entonces* $\Phi \circ f_{ji}\,(r'') \neq r'$ con $\Phi : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_j$, resulta de hacer composiciones de funciones del tipo f_{ji}.

Notación 18 .

$\cdot$ $(x_j)^t$ *al vector transpuesto de* x_j.

· $\mathrm{V_i} = (\mathrm{v_i}, \mathrm{v_i} ... \mathrm{v_i})^{\mathrm{t}}$ *a la matriz de tamaño* $m \times 1$, *con todos sus elementos iguales a* v.

· A_i^j *al renglón* j *de la matriz del jugador* i.

A continuación presentamos un esquema de la prueba de unicidad del punto de Equilibrio de Nash.

Luego de verificar que la matriz de cada jugador es no singular, asumamos que existe otro punto de Equilibrio de Nash $(y_1, y_2, ..., y_n)$ con valor esperado del juego u_i, esto es $E_i(y_1, y_2, ..., y_n) = u_i$ para $i = 1, 2, ...n$.

Consideremos los siguientes casos:

- Caso 1: $(y_1, y_2, ..., y_n)$ es completamente mixto

  Debido a que $(y_1, y_2, ..., y_n)$ es punto de Equilibrio de Nash se satisfacen los sistemas:

  $$\text{a) } A_i\,(x_j)^{\;t} = V_i \qquad y \qquad \text{b)} A_i\,(y_j)^t = U_i$$

  Multiplicando por u_i a cada ecuación del sistema a) y por v_i a cada ecuación del sistema b) y luego restando se obtiene:

  $$\mathrm{A_i}\,(\mathrm{u_i x_j} - \mathrm{v_i y_j})^{\mathrm{t}} = 0$$

  siendo 0 la matriz nula de orden $m \times 1$.

  Las matrices A_i son matrices no singulares, debido a que cada $v_i \neq 0$ ya que los ε_p en consecuencia el sistema lineal homogéneo $\mathrm{A_i}\,(\mathrm{u_i x_j} - \mathrm{v_i y_j})^{\mathrm{t}}$

  $= 0$ tiene única solución, la trivial. $\mathrm{u_i x_j} - \mathrm{v_i y_j} = 0$, esto significa que, $\mathrm{u_i} x_s^j = v_i y_s^j$ con $s = 1, 2, ..., m$.

  Como x_je y_j son vectores de probabilidad, en consecuencia, $u_i = v_i$ y por lo tanto: $\mathrm{A_i}\,(x_j)^t = A_i\,(y_j)^t$ en consecuencia $x_j = y_j$.

- Caso 2: El punto $(y_1, y_2, ..., y_n)$ satisface que: $S\,(y_i) = S\,(x_i)$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$, excepto algún $j \in \{1, 2, ..., n\}$, tal que $S\,(y_j) \subseteq S\,(x_j)$ con $j \neq i$.

  Asumimos que $y_j = \left(y_1^j,\ y_2^j, ...,\ y_k^j, ..., y_{m-1}^i, 0\right)$ y que $f_{ji}\,(k) = k$.

* Sea $k \in S(x_j) - S(y_j)$, deberíamos probar $f_{ji}(k) \notin S(y_i)$, en consecuencia: $y^{i}_{f_{ji}(k)} = 0$., lo que es imposible, por hipótesis sabemos que $S(y_i) = S(x_i)$, y que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ es un punto de Equilibrio de Nash completamente mixto, lo que implica que $|S(y_i)| = |S(x_i)| = m$.

En consecuencia, $S(y_j) = S(x_j)$ para todo $j = 1, 2, ..., n$ y por lo probado en el caso 1, $x_j = y_j$ por lo que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ es único.

- Caso 3: El punto $(y_1, y_2, ..., y_n)$ que satisface que:

$$S(x_i) \subseteq S(y_i) \qquad \textit{para todo} \quad i = 1, 2, ..., n$$

* Sea $k \in S(x_n) - S(y_n)$, en este caso, se supone $k = m$, $f_{n(n-1)}(k) = k$, En el caso 2, se arribó a $y^{n-1}_{f_{n(n-1)}(k)} = 0$, es decir, que $y^{n-1}_{m} = 0$.

* Sea $j \in S(x_{n-1}) - S(y_{n-1})$, por hipótesis sabemos que $S(y_{n-1}) \subseteq S(x_{n-1})$, en este caso, un j que cumple esta condición es $j = m$.

Sea $f_{(n-1)(n-2)}(j) = j + 1 \bmod m$. Denotamos con $A^{f_{(n-1)(n-2)}(j)}_{n-2}$ al renglón $f_{(n-1)(n-2)}(j)$ de la matriz del jugador $n-2$. Deberíamos probar que $S(y_{n-2}) \subseteq J_{n-2}(y_{n-1})$, por esta razón es que, $f_{(n-1)(n-2)}(j) \notin S(y_{n-2})$, por lo tanto, $y^{n-2}_{f_{(n-1)(n-2)}(j)} = 0$, es decir, $y^{n-2}_{1} = 0$.

* Sea $i \in S(x_1) - S(y_1)$, y consideremos $f_{1n}(i) = i$. Trabajando de manera similar, a cuando $S(y_{n-1}) \subseteq S(x_{n-1})$, $S(y_n) \subseteq S(x_n)$, se arriba a que $f_{1n}(i) \notin J_n(y_1)$.

Debido a que $(y_1, y_2, ..., y_n)$ es punto de Equilibrio de Nash $S(y_n) \subseteq J_n(y_1)$, por esta razón es que: $f_{1n}(i) \notin S(y_n)$, en consecuencia: $y^{n}_{f_{1n}(i)} = 0$, es decir, $y^{n}_{1} = 0$.

* Ahora elegimos $k \in S(x_n) - S(y_n)$, tal que

$$L(k) = f_{1n}\left(f_{21}\left(\phi\left(f_{n(n-1)}(k)\right)\right)\right) \in S(y_n)$$

La existencia de tal k, está garantizado por (1).

Denotamos con $A_n^{L(k)}$ al renglón $L(k)$ de la matriz del jugador n. Por otro lado, k es tal que $L(k) \in S(y_1)$, y como $(y_1, y_2, ..., y_n)$ es punto de Equilibrio de Nash, se cumple que: $S(y_n) \subseteq J_n(y_1)$ (Teorema 9), por lo tanto, también se satisface la siguiente desigualdad:

$$A_n^{L(r)}(y_1)^t \leq A_n^{L(k)}(y_1)^t$$

Las desigualdades (3) y (4) son incompatibles, a menos que $y_{h(r)}^1 = 0$. Pero, si esto ocurriera el vector y_1 es el nulo, y esto es un absurdo, ya que es un vector probabilidad.

En consecuencia, es imposible que existe otro punto de equilibrio de Nash del juego Γ, $(y_1, y_2, ..., y_n)$ que cumpla las condiciones dadas en este caso.

6. Conclusiones y posibles extensiones

Las construcciones hechas en el presente trabajo generalizan varias de las construcciones de artículos anteriores sobre unicidad de equilibrios de Nash, obteniéndose nuevas familias de juegos n-personales q-cíclicos con único punto de equilibrio de Nash prefijado. Asi se extienden las construcciones para juegos bimatriciales dadas por Marchi y Quintas (1987) y Quintas (1988 a1988 a) b)), las hechas por Alaniz, Giunta, Marchi y Quintas (1991)) para juegos bimatrciales, y se dan construcciones alternativas a aquellas recientemente presentadas por Alaniz y Quintas (2010) para juegos q-cíclicos.

Al ser los juegos q-cíclicos un tipo de juego que sirven para modelizar la interaccion de individuos en la Administración Pública entre usuarios, prestadores de servicios y la cadena jerárquica generándose una estructura cíclica, conocer una amplia familia de juegos con equilibrios únicos permite que se establezcan reglas que sean compatibles con los incentivos de los jugadores para jugar en equilibrio y cuyo resultado sea previsible.

Posibles extensiones de estas construcciones pueden darse estableciendo otras estructuras sobre cada simplex. También se podría estudiar (aunque la extensión no parece ser inmediata) otras construcciones para juegos Polimaticiales.

Recepción: 25/11/2013. Aceptación: 17/03/2014.

Referencias

[1] Alaniz S. and Quintas L. G. (2010) "Constructing q-cicle game with unique Prefixed Equilibrium", Brazilian Journal of Bussiss Economics , vol 10, N*1, 07-28.

[2] Heuer G. A. (1979)."Uniqueness Equilibrium Points in Bimatrix Games", International Journal of Game Theory : Vol 8: 13-25.

[3] Kreps V. L. (1974). "Bimatrix Games with Unique Equilibrium Points", International Journal of Game Theory : Vol.3. 115-118.

[4] Marchi E. and Quintas, L. G. (1987). "About Extreme Equilibrium Points", Mathematical Social Sciences 13 273-276.

[5] Marchi E and Quintas L.G. (1983). "Computing Equilibrium Points for q-cicle Games", .Proceding of the II Latin American Congress of Applied Mathematic, Río de Janeiro, Vol II, 576-598.

[6] Millham C. B. (1972). "Constructing Bimatrix Games with Special Properties", International Journal of Game Theory: 10 (4): 125 -129.

[7] Nash, J. (1951). "Equilibrium points in n-person games", Proceedings of the National Academy of Science U.S.A., 36: 48-49.

[8] Quintas L. G. (1989). "A note on Polymatrix Games", International Journal of Game Theory, vol. 18 (3) 261-272 (1989).

[9] Quintas L. G.(1988 a)). "Constructing Bimatrix Game with Unique Equilibrium Points", Mathematical Social Sciences 15: 61-72.

[10] Quintas L.G (1988 b)). "Uniqueness of Nash Equilibrium Points in Bimatrix Games", Economic Letters.764: 1-8.

[11] Quintas L., Marchi E., Giunta A. and Alaniz S. (1991), "Brimatrix Games Constructed from Prefixed Equilibrium Points", AMSE Review, 17, 2, 33-44

[12] Raghavan T. E. S. (1970). "Completely Mixed Strategies in Bimatrix Games", J. London Math Soc.2 (2) 709-712.

[13] Yanovskaya E. B. (1968). "Equilibrium Points in Polymatrix Games", (in Russian) Lithuanian Mathematical Journal.