PERSPECTIVAS *Revista de Análisis de Economía, Comercio y Negocios Internacionales*
*Volumen 7 / No. 2 / julio - diciembre 2013 / 75 - 100*
ISSN 2007-2104

# Reglas proporcionales en problemas de árboles de mínimo costo

Juan Carlos Cesco
Universidad Nacional de San Luis
San Luis, Argentina
jcesco@unsl.edu.ar

Luciana B. Pepa Risma
Universidad Nacional de San Luis
San Luis, Argentina
luciana_mq@hotmail.com

Luis Quintas[1]
Universidad Nacional de San Luis
San Luis, Argentina
lquintas@unsl.edu.ar

## Resumen

En este trabajo se presenta una nueva familia de reglas de distribución para problemas de árboles de mínimo costo. Se usan criterios de proporcionalidad para definir estas reglas y a través de un ejemplo clásico se observa un mejor comportamiento que las reglas de Bird (Bird, 1976), Kar (Kar, 2002) y Dutta-Kar (Dutta y Kar, 2004), Kar (2002) y otras reglas. Se demuestran las propiedades que cumplen las reglas proporcionales aquí introducidas. Se concluye que comparativamente, las reglas proporcionales se encuentran bien posicionadas con respecto a otras reglas clásicas en cuanto a las propiedades que cumplen.

Palabras clave: Árbol de expansión, asignación de costos, reglas proporcionales.
Clasificación JEL: D7.

[1] Autor Corresponsal. Departamento de Matemáticas, IMASL, FCFMyN, Universidad Nacional de San Luis, Ejército de los Andes 950, D5700 San Luis, Argentina.

## Abstract

In this paper we present a new family of rules for minimum cost spanning tree problems. We consider proportionality criteria in order to define these rules and through a classic example it is observed a better behavior than the rules of Bird (Bird, 1976), Kar (Kar, 2002) and Dutta-Kar (Dutta and Kar, 2004), Kar (2002) and other rules. We prove the general properties that these rules fulfil and we conclude that the proportional rules are in good position in relation to other classical rules.



Keywords: Spanning tree, cost allocation, proportional rules.
JEL classification: D7.


# 1. Introducción

Las reglas proporcionales han sido utilizadas en distintos contextos desde tiempos ancestrales. La simpleza y el criterio de equidad que caracterizan a este tipo de reglas las convierten en una de las modalidades más implementadas para el reparto de costos y utilidades, siendo muchas veces la proporcionalidad tomada como definición de justicia. Uno de sus usos más extendidos tiene lugar en los sistemas electorales. La amplia aplicación de reglas proporcionales en ellos permite inferir que es, posiblemente, la manera más adecuada de representar la opinión popular a la hora de elegir representantes. Tambien es ampliamente usada en diversos ámbitos para asignación de salarios, tasas, costos de servicios, etc.

Los criterios de repartos proporcionales han sido considerados desde épocas ancestrales como principios básicos de equidad (Aristotle (2009)). La solución de Kalai-Smorodinsky (Kalai and Smorodinsky (1975)) para problemas de regateo es la solución proporcional más conocida en dicho contexto y enmienda algunas falencias de la pionera solución de Nash (Nash, 1950). Además varios estudios posteriores se han llevado a cabo sobre soluciones proporcionales para problemas de regateo (Kalai (1977); Roth (1979); Chun and Thomson (1992); Roemer J. E. and J. Silvestre (1993); Hougaard and Tvede (2010)). Las soluciones proporcionales también tienen un rol destacado en problemas de bancarrota (Thompson (2003)).

En el presente trabajo se proponen nuevas reglas proporcionales en problemas de repartición de costos. Particularmente, estudiamos *problemas de árboles de mínimo costo*. En Feltkamp, Tijs and Muto (1994) se presenta una regla proporcional para problemas de extensión de árboles de mínimo costo (los cuales son generalizaciones de los problemas de árboles de mínimo costo) aunque en una linea muy diferente.

En nuestro trabajo analizamos las propiedades que cumplen repartos proporcionales y se realiza una comparación con otras reglas clásicas. No damos aquí una caracterización de las reglas de repartos proporcionales que introducimos, ya que las mismas pueden ser consideradas principios tan básicos como los que habitualmente se usan para caracterizar otras reglas más complicadas.

Los problemas de árboles de mínimo costo, como tantos otros tratados principalmente en economía, computación y otras areas de investigación operativa, involucran la formación de redes. Consideremos, por ejemplo, una situación en la cual un grupo de agentes ubicados en diferentes puntos geográficos necesitan un servicio particular que solo puede ser provisto por una fuente común. Para conseguirlo se requerirán conexiones que implican cierto costo, y asumiremos que los agentes son indiferentes entre ser conectados a la fuente de manera directa o indirecta (a través de otros agentes). Muchas situaciones económicas pueden ser modeladas de esta manera. Bergantiños y Lorenzo (2004) estudiaron un caso real en que un grupo de campesinos tenían que afrontar el gasto de construir tuberías desde sus respectivas casas hasta una fuente de agua. Otros ejemplos frecuentes incluyen redes de comunicación tales como telefonía, internet, etc.

Surge, entonces, un primer interrogante que es, precisamente, cómo encontrar la red más barata que conecte a todos los agentes con la fuente. En la literatura sobre esta clase de problemas se encuentran definidos varios algoritmos para dicho cómputo. Cabe mencionar, entre los más conocidos en la literatura económica a Prim (1957). Nos referiremos a él como algoritmo de Prim. Kruskal (1956) formuló un algoritmo muy similar al de Prim. Sin embargo, la construcción de una red de costo agregado minimal (árbol mínimo) constituye solo una parte del problema. Otro aspecto importante es cómo distribuir el costo total de dicha construcción entre los agentes.

La evidente analogía entre división de costos y división de beneficios que se obtienen de la cooperación entre varios agentes, convirtieron a la teoría de juegos cooperativos en una herramienta muy útil para encarar problemas de árboles mínimos. Bird (1976) asoció un juego cooperativo con cada uno de estos problemas. Además, propuso una regla de distribución para casos en los cuales el árbol mínimo es único. Más tarde, Granot y Huberman (1981, 1984) estudiaron el core y el nucleolo de este juego cooperativo. Luego Kar (2002) estudió el correspondiente valor de Shapley y lo utilizó para definir su regla (que denotaremos por $K$). Recientemente, Dutta y Kar (2004) extendieron la regla de Bird a casos con más de un árbol mínimo (denotada por $B$), y propusieron una nueva regla ($DK$). Bergantiños y Vidal-Puga (2008) presentaron una regla de distribución definida a través de la forma irreducible de un problema de árboles de mínimo costo, inspirada en la clásica solución de Nash para problemas de negociación. Luego mostraron que esta regla coincide con la formulada en Feltkamp, Tijs and Muto (1994).

En el presente trabajo la denotaremos por $BVP$. $BVP$ cumple una propiedad análoga a la conocida *independencia de alternativas irrelevantes* que fuera introducida por Nash (1950) en el contexto de problemas de regateo. Al igual que allí, aquí tampoco parece ser una propiedad razonable, ya que desestima toda información que no proviene del árbol mínimo, perdiendo de vista las características originales del problema.

El presente trabajo se presentan reglas de reparto de costos que no adolecen de este inconveniente. A lo largo del mismo se asumirá que no hay fuerzas externas, tales como el mercado, que determinen la distribución final, sino que ésta se ha de alcanzar directamente por acuerdos entre los individuos o, indirectamente, por decisión de un referí neutral o un organismo centralizado.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se describe el modelo utilizado para formalizar los problemas de árboles de mínimo costo; En la sección 3 se dan las definiciones de algunas reglas de distribución y se analizan a la luz de un ejemplo crítico. Motivados por ciertos puntos débiles que pueden apreciarse en este ejemplo, e inspirados en la solución de Kalai-Smorodinsky (1975) como alternativa a la solución de Nash (1950) en problemas de regateo, se introduce en la sección 4 nuevas reglas de distribución usando *criterios de justicia* basados en la proporcionalidad. En la sección 5 se analizan propiedades que son satisfechas por cada regla. Se incluye en la sección 6 las conclusiones del trabajo y posibles extensiones.

# 2. Descripción del modelo

Formalmente, un *problema de árboles de mínimo costo* (*pamc*) es un par $(N_0, C)$ en el cual $N$ representa un conjunto finito de agentes, 0 denota a la fuente, $N_0 = N \cup \{0\}$ y $C = (c_{ij})_{i,j \in N_0}$ es una matriz que especifica el costo de conexión directa entre cada par de elementos de $N_0$. Asumiremos que $c_{ij} = c_{ji} > 0$ siempre que $i \neq j$ y $c_{ii} = 0$ para todo $i \in N_0$. Denotaremos por $C^N$ al conjunto de tales matrices.

Una *red* $\rho$ sobre $N_0$ es un subconjunto del conjunto $\{(i,j) \mid i,j \in N_0\}$. Los elementos de $\rho$ son llamados *arcos*. En este trabajo no interesan las direcciones en que se consideren los arcos, de modo que se escribirá indistintamente $(i,j)$ y $(j,i)$. Dados $i,j \in N_0$, un *camino* de $i$ a $j$ en la red $\rho$ es una sucesión de arcos diferentes $\{(i_{h-1}, i_h)\}_{h=1}^{l}$ tal que $(i_{h-1}, i_h) \in \rho$ para $h = 1, 2, ..., l$, $i_0 = i$ e $i_l = j$.

Se define el *costo* de cualquier red $\rho$ sobre $N_0$ asociado con la matriz $C$ como $c(N_0, C, \rho) = \sum_{(i,j) \in \rho} c_{ij}$.

Un *árbol* $\alpha$ es una red con la particularidad de que para cada $i \in N$ existe un único camino de $i$ a 0. Si $\alpha$ es un árbol es usual escribir $\alpha = \{(i, i^0)\}_{i \in N}$ donde $i^0$ representa el primer nodo que sigue a $i$ en el único camino en $\alpha$ de $i$ a 0.

Denotemos por $A^N$ al conjunto de todos los árboles sobre $N_0$. Un *árbol mínimo* (*am*) para $(N_0, C)$ es un árbol $\alpha^*$ que satisface que $c(N_0, C, \alpha^*) = mín_{\alpha \in A^N} c(N_0, C, \alpha)$. Es claro que siempre existe un árbol mínimo y que no es necesariamente único. El costo asociado con cualquier árbol mínimo para $(N_0, C)$ será denotado por $m(N_0, C)$. Dado $S \subset N$, se denotará por $(S_0, C)$ al *pamc* naturalmente inducido por $C$ en $S$, es decir, el que se obtiene considerando solo las entradas de $C$ que indican el costo de conexión entre dos agentes incluídos en $S$.

Surge entonces, en primer lugar, el siguiente interrogante: ¿Cómo conectar a todos los agentes a la fuente al menor costo agregado posible?, es decir, ¿cómo computar un árbol mínimo? Se encuentran en la literatura varios algoritmos para calcular un *am*, dado un *pamc*. Uno de los más conocidos es el provisto por Prim (1957), cuya idea es muy simple: comenzando desde la fuente se construye una red incorporando secuencialmente los arcos de más bajo costo entre los agentes ya conectados y los que aún no lo están. Formalmente:

Se comienza definiendo $S^0 = \{0\}$ y $\rho^0 = \varnothing$.

*Paso 1:* Se toma un arco $(0, i)$ tal que $c_{0i} = mín_{j \in N} \{c_{0j}\}$. Si hay más de uno, se elige cualquiera. Ahora, $S^1 = \{0, i\}$ y $\rho^1 = \{(0, i)\}$.

*Paso p+1:* Suponiendo que ya se ha formado $S^p \subsetneq N$ y $\rho^p$, se toma un arco $(j, i)$ con $j \in S^p$ e $i \in N_0 \setminus S^p$ tal que $c_{ji} = mín_{k \in S^p, l \in N_0 \setminus S^p} \{c_{kl}\}$. Nuevamente, si hay más de uno, se elige cualquiera. Ahora, $S^{p+1} = S^p \cup \{i\}$ y $\rho^{p+1} = \rho^p \cup \{(j, i)\}$.

Este proceso termina en $n = |N|$ pasos, con $S^n = N_0$, y la red resultante, $\rho^n$, constituye un *am*.

Otro planteo importante abordado por la literatura sobre *pamc* es cómo dividir entre los agentes el costo total (minimal) de conectarlos a la fuente. Sobre esto trataremos en la siguiente sección.

## 3. Reglas clásicas y ejemplo típico

Una *regla de distribución de costos* es una función $F$ que asocia con cada *pamc* $(N_0, C)$ un vector $F(N_0, C) \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\sum_{i \in N} F_i(N_0, C) = m(N_0, C)$$

Dado un *pamc* $(N_0, C)$, llamaremos un "*criterio de justicia*" a una función $v : N \to \mathbb{R}$. Dicho criterio permitirá, en cierto sentido, considerar regularidades y asimetrías entre aquellos agentes que han de asociarse para la construcción de un árbol mínimo. En efecto, se espera que el valor asignado por una regla de distribución $F$ esté influenciado directamente por el índice $v_i$ (la imagen bajo $v$ de $i$).

A continuación se describen tres reglas conocidas de la literatura y se analiza la aplicabilidad de las mismas en algunos ejemplos concretos. Luego, se utilizan diferentes criterios de justicia para definir nuevas reglas.

## 3.1. Reglas de Bird (B), Dutta-Kar (DK) y Kar (K)

Sea $(N_0, C)$ un *pamc*. Cuando $(N_0, C)$ tiene un único *am*, la *regla de Bird* (Bird 1976) está definida como sigue: Para cada $i \in N$,

$$B_i(N_0, C) = c_{i^0 i}$$

Esto es, los agentes se conectan sucesivamente a la fuente siguiendo el algoritmo de Prim y cada uno paga el costo del arco a través del cual se incorpora.

Cuando $(N_0, C)$ admite más de un *am*, la regla de Bird realiza un promedio entre todos los árboles asociados con el algoritmo de Prim. Como es usual, denotemos por $\Pi_N$ al conjunto de todos los órdenes (permutaciones) sobre $N$. Entonces, dado $\pi \in \Pi_N$, sea $B^\pi(N_0, C)$ la distribución obtenida aplicando el procedimiento antes descrito y resolviendo las indiferencias de acuerdo a las prioridades indicadas por $\pi$; luego se tiene:

$$B(N_0, C) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_N} B^\pi(N_0, C)$$

Otra regla de distribución basada en el algoritmo de Prim es la *regla de Dutta-Kar* (Dutta y Kar 2004). En problemas con un único *am*, procede de la siguiente manera: Suponiendo que los agentes, siguiendo el algoritmo de Prim, son conectados a la fuente en el orden $i_1, i_2, ..., i_n$, la regla de Dutta-Kar está dada por

$$DK_{i_k}(N_0, C) = x_{i_k}$$

donde para cada $k = 1, 2, ..., n$, $x_{i_k}$ se computa como sigue: Primero, el agente $i_1$ se conecta a la fuente y se toma $p^1 = c_{0i_1}$. Luego, el agente $i_2$ se conecta a $i_2^0$ y se definen $x_{i_1} = mín\{p^1, c_{i_2^0 i_2}\}$ y $p^2 = \{p^1, c_{i_2^0 i_2}\}$. Ahora, el agente $i_3$ se conecta a $i_3^0$ y, análogamente, se toman $x_{i_2} = mín\{p^2, c_{i_3^0 i_3}\}$ y $p^3 = \{p^2, c_{i_3^0 i_3}\}$. Este proceso continúa hasta la incorporación del agente $i_n$ con $x_{i_n} = mín\{p^{n-1}, c_{i_n^0 i_n}\}$. Es decir, como en la regla de Bird, los agentes se incorporan siguiendo el algoritmo de Prim pero con un posible intercambio en el costo asignado en cada etapa que privilegia a los agentes conectados previamente.

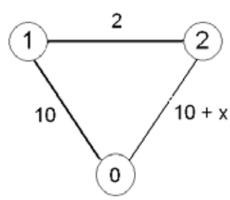
Para casos con más de un *am*, la regla de Dutta-Kar se extiende de manera análoga a la de Bird.

Por otra parte, se tiene también la *regla de Kar*, que se define utilizando herramientas de teoría de juegos. Un juego con utilidades transferibles sobre el conjunto de agentes $N$ es un par $(N, u)$ donde $u : 2^N \to R$ satisface la condición $u(\varnothing) = 0$. Bird (1976) asoció con cada *pamc* $(N_0, C)$ dado, el siguiente juego: Para cada $S \subseteq N$, $u_C(S) = m(S_0, C)$. Más tarde, Kar (2002) estudió el valor de Shapley de dicho juego y lo utilizó para definir su regla como sigue: para cada $i \in N$,

$$K_i(N_0, C) = Sh_i(N, u_C) = \frac{1}{n!} \sum_{S \subsetneq N} |S|!(n - |S| - 1)! \left[u_C(S \cup \{i\}) - u_C(S)\right]$$

## 3.2. Un ejemplo crítico

El primer caso interesante en *pamc* ocurre cuando dos agentes desean conectarse a la fuente y la elección óptima para uno de ellos es conectarse a través del otro. El siguiente ejemplo describe un caso particular de dicha situación: Hay dos agentes ($N = \{1, 2\}$). El costo de conexión entre el agente 1 y la fuente es 10 ($c_{01} = 10$), entre los agentes 1 y 2 es 2 ($c_{12} = 2$), y entre el agente 2 y la fuente es $10 + x$ ($c_{02} = 10 + x$), donde $x \geq 0$.



En el siguiente cuadro comparativo se muestran las distribuciones propuestas por las tres reglas antes descriptas:

| | $x = 0$ | $x > 0$ |
|---|---|---|
| $B$ | $(6, 6)$ | $(10, 2)$ |
| $DK$ | $(6, 6)$ | $(2, 10)$ |
| $K$ | $(6, 6)$ | $(6 - \frac{x}{2}, 6 + \frac{x}{2})$ |

**Observaciones:**

Cuando $x = 0$, los agentes son simétricos, y las tres reglas asignan la distribución simétrica (el costo de un árbol mínimo se reparte por igual entre los dos agentes).

Ahora bien, si el valor de $x$ cambia de 0 a una cantidad positiva, por más "insignificante" que esta sea, la distribución de costos asignadas por $B$ y $DK$ cambia notablemente. Esto no debería ocurrir, sino que una regla tendría que ser una función continua respecto de los costos.

$K$ no tiene este problema, es una función continua de los costos. Sin embargo, para valores de $x$ mayores que 12 dicha regla asignará una cantidad negativa al agente 1, lo cual significa que el agente 2 deberá pagar el costo total de la red y, además, cierta cantidad de dinero al agente 1. De nuevo, no es de esperarse que los agentes obtengan ganancias de la transacción (pues están "contratando" un servicio), de modo que una regla debería asignar solo valores positivos.

Begantiños y Vidal-Puga (2008) proponen una regla de distribución de costos que intenta superar estos puntos débiles. La misma se define a través de la forma irreducible de un *pamc*, introducida en *Bird (1976).*

La *forma irreducible* $(N_0, C^*)$ de un *pamc* $(N_0, C)$ tiene la propiedad de que, si se reduce el costo de cualquier arco, es decir, cualquier entrada de la matriz $C$, entonces el costo de conectar a los agentes a la fuente se reduce también. Específicamente, $c^*_{ij} = máx_{(k,l)\in\rho_{ij}}\{c_{kl}\}$, donde $\rho_{ij}$ denota el único camino en el árbol mínimo de $i$ a $j$. Se puede demostrar que si $(N_0, C^*)$ es una forma irreducible, $K(N_0, C^*) = B(N_0, C^*)$ (ver Bergantiños y Vidal-Puga 2008). Luego,

$$BVP(N_0, C) = K(N_0, C^*) = B(N_0, C^*)$$

En el ejemplo antes analizado resulta:

| | $x = 0$ | $x > 0$ |
|---|---|---|
| $BVP$ | $(6, 6)$ | $(6, 6)$ |

Cualquiera sea el valor no negativo de $x$, $BVP$ propone la misma distribución $(6, 6)$. Así, tomando valores suficientemente grandes para $x$, se vuelve grande la asimetría entre los dos agentes, en cuyo caso no resulta justa una repartición igualitaria. Por ello una regla no debería desechar la información aportada por $x$, que permite evaluar la situación real de los agentes. En general, $BVP$ satisface una propiedad de independencia de árboles irrelevantes ($IAI$), la cual involucra la siguiente definición:

Se dice que dos *pamc* $(N_0, C)$ y $(N_0, C')$ son *equivalentes en cuanto árboles* si existe un árbol $\alpha$ tal que $\alpha$ es un árbol mínimo para ambos problemas y, además, $c_{ij} = c'_{ij}$ para todo $(i, j) \in \alpha$.

Formalmente, una regla de distribución $F$ satisface la propiedad de *independencia de árboles irrelevantes* ($IAI$) si dados dos *pamc* $(N_0, C)$ y $(N_0, C')$ equivalentes en cuanto a árboles, se verifica que $F(N_0, C) = F(N_0, C')$. Lo que esta propiedad afirma es que toda la información relevante para el problema es provista por un árbol mínimo.

Como ya mencionamos anteriormente, ésta no parece una propiedad razonable, y justamente su no cumplimiento, que denominaremos *Sensibilidad a los Costos Generales* ($SCG$), será una propiedad esperable que sea cumplida por las reglas de reparto de costos. En consecuencia, definiremos en la siguiente sección dos nuevas reglas que cumplen SCG, las cuales tienen en cuenta información externa al árbol mínimo, como es por ejemplo el costo que cada agente pagaría por conectarse a la fuente en caso de no formar parte de la sociedad. Además, probaremos que las nuevas reglas que satisfacen dicha propiedad, también superan los puntos débiles mencionados sobre las reglas tradicionales ($B$, $DK$ y $K$).

# 4. Reglas proporcionales

Llamaremos un *criterio de justicia* ($cj$) a una función $v : N \to \mathbb{R}^+$. Denotaremos por $v_i$ a la imagen bajo $v$ del agente $i$. Esta función servirá para comparar la situación inicial de cada agente respecto a los demás en el siguiente sentido: se espera que una regla de distribución $F$ satisfaga que para $i, j \in N$, $F_i(N_0, C) \leq F_j(N_0, C)$ siempre que $v_i \leq v_j$. La misma puede definirse de múltiples maneras, permitiendo tener en cuenta total o parcialmente la información presentada por un *pamc*.

Entonces, como ya hemos dicho, luego de determinar un criterio común de justicia, se espera que el mismo "pese" sobre el costo asignado a cada agente. Una manera natural y sencilla de garantizar esto, es definiendo reglas que sean proporcionales a dicho criterio, es decir, que tengan la siguiente propiedad:

- **Proporcionalidad con el criterio de justicia (*PCJ*).** Fijado un criterio de justicia $v$, para todo *pamc* $(N_0, C)$ y todo par de agentes $i, j \in N$, se verifica que

$$\frac{F_i(N_0, C)}{v_i} = \frac{F_j(N_0, C)}{v_j}$$

Como lo establece la siguiente proposición, esta propiedad determina una regla de distribución de costos.

**Proposición 1** *Una regla de distribución $F$ satisface PCJ si y solo si está definida como sigue: Para cada pamc $(N_0, C)$, y cada agente $i \in N$,*

$$F_i(N_0, C) = \frac{v_i}{\sum\limits_{i \in N} v_i} m(N_0, C)$$

***Demostración.*** *Es trivial verificar que $F$ es una regla de distribución y que satisface PCJ. Por otro lado, fijados un pamc $(N_0, C)$ y un criterio de justicia $v$, PCJ implica que existe una constante p tal que para todo $j \in N$,*

$$\frac{F_j(N_0, C)}{v_j} = p$$

*Por otra parte, toda regla de distribución de costos debe cumplir que*

$$m(N_0, C) = \sum_{j \in N} F_j(N_0, C)$$

*Luego, combinando las dos igualdades anteriores y despejando, se obtiene que*

$$p = \frac{m(N_0, C)}{\sum\limits_{j \in N} v_j}$$

*de lo que se sigue finalmente*

$$F_i(N_0, C) = v_i p = \frac{v_i}{\sum\limits_{j \in N} v_j} m(N_0, C)$$

■

Si bien la familia de reglas caracterizada en la proposición anterior permite definir libremente un criterio de justicia, en este trabajo estudiaremos dos casos particularmente interesantes que apuntan, precisamente, a tomar en cuenta cierta información fuera del árbol mínimo, conservando la mayoría de las propiedades deseables en este contexto.

En primer lugar definimos, para cada $i \in N$,

$$v_i = c_{0i}$$

de modo que el costo asignado por la regla correspondiente resulta, para cada agente, proporcional a su costo directo de conexión con la fuente. Llamaremos a esta regla $PRD$ (*Proporcional Directa*). Entonces, dado un *pamc* $(N_0, C)$,

$$PRD_i(N_0, C) = \frac{c_{0i}}{\sum\limits_{j \in N} c_{0j}} m(N_0, C)$$

Retomando el ejemplo considerado en la sección 3, se obtienen las siguientes distribuciones:

| | $x = 0$ | $x > 0$ |
|---|---|---|
| $PRD$ | $(6, 6)$ | $(\frac{120}{20+x}, \frac{120+12x}{20+x})$ |

Nótese que, cuando el problema es simétrico ($x = 0$) $PRD$ también reparte el costo por igual entre los dos agentes. Por otra parte, cuando

$x > 0$, el observar el costo del arco $(0, 2)$ (el cual no pertenece a un $am$) permite advertir que la posibilidad "inicial" para la conexión del agente 2 es algo más costosa que la del agente 1, y cuanto mayor sea el valor de $x$ mayor se torna esta diferencia. Esta información es considerada por la regla $PRD$, la cual asigna en este caso una función decreciente de $x$ al agente 1 y una función creciente al agente 2. Este reparto nos parece más atinado que el igualitario propuesto por $BVP$, ya que no pierde de vista al problema original. Además, se mostrará en la sección 5 que $PRD$ satisface, entre otras buenas propiedades, continuidad y positividad.

Muchas veces, sin embargo, las posibilidades reales que un agente tiene para conectarse a la fuente sin cooperación de los demás son más que su conexión directa, pudiendo resultar algunas de ellas menos costosas que esta (como sería en este ejemplo cualquier situación en la cual los agentes no tuvieran el poder de evitar la construcción del arco $(1, 2)$). Esto motiva la definición de la siguiente regla proporcional. Para cada agente $i$, denotemos en general por $w_i^0$ cualquier camino de $i$ a la fuente; luego, sea $m(i) = \text{mín}_{w_i^0}\{c(N_0, C, w_i^0)\}$. Diremos que cualquier camino de $i$ a la fuente cuyo costo sea $m(i)$ es un *camino mínimo* para $i$. Entonces, podemos utilizar el criterio

$$v_i = m(i)$$

para definir una nueva regla proporcional al camino mínimo entre cada agente y la fuente, a la cual denotaremos por $PRDC$ (*Proporcional Directa por Caminos*). Esto es, dado un *pamc* $(N_0, C)$,

$$PRDC_i(N_0, C) = \frac{m(i)}{\sum\limits_{j \in N} m(j)} m(N_0, C)$$

Ahora, aplicando la regla $PRDC$ en el ejemplo 3.2 resulta la distribución de costos siguiente:

| | $x = 0$ | $0 < x < 2$ | $2 \leq x$ |
|---|---|---|---|
| $PRDC$ | $(6, 6)$ | $(\frac{120}{20+x}, \frac{120+12x}{20+x})$ | $(5.45, 6.55)$ |

Cuando $x$ toma valores entre 0 y 2 se tiene que $m(i) = c_{0i}$ para $i = 1, 2$ y, por lo tanto, $PRDC$ se comporta de la misma manera que $PRD$. Cuando

$x \geq 2$ el $cj$ adoptado asigna 10 para el agente 1 y 12 para el agente 2, y son estos índices, tomados del problema original, los que se han de tener en cuenta para comparar la situación "inicial" real de cada agente respecto del otro. Entonces, nuevamente luce más apropiada la distribución $(5.45, 6.55)$ que $(6, 6)$.

# 5. Otras propiedades de reglas de distribución

Comenzamos esta sección enumerando varias propiedades típicas de una regla de distribución $F$, luego las analizamos para cada regla en particular.

- **Continuidad (*CON*).** Para todo grupo finito de agentes $N$, $F(N_0, \cdot)$ es una función continua de $C^N$ en $\mathbb{R}^N$.

Esto garantiza que pequeños cambios en los costos no produzcan un gran cambio en la distribución.

- **Estabilidad grupal (*EG*).** Para todo *pamc* $(N_0, C)$ y todo $S \subseteq N$, se verifica que
$$\sum_{i \in S} F_i(N_0, C) \leq m(S_0, C)$$

*EG* asegura que ningún grupo de agentes pueda mejorar separándose de los demás y construyendo su propia red. Esta propiedad evita, por ejemplo, que algunos agentes tengan que subsidiar a otros.

- **Monotonía de costos (*MC*).** Para todo par de *pamc* $(N_0, C)$ y $(N_0, C')$ tal que $c_{ij} < c'_{ij}$ para algún $i \in N$, $j \in N_0$ y $c_{kl} = c'_{kl}$ en otro caso, se verifica que
$$F_i(N_0, C) \leq F_i(N_0, C')$$

Esto es, el aumento de un costo de conexión no ha de beneficiar a los agentes involucrados en la red. Esta propiedad evita que los agentes se beneficien reportando costos de conexión superiores a los verdaderos.

- **Monotonía de población ($\boldsymbol{MP}$).** Para todo *pamc* $(N_0, C)$, $S \subseteq N$, e $i \in S$, se verifica que $F_i(N_0, C) \leq F_i(S_0, C)$.

Es decir, ningún agente empeora con la incorporación de nuevos agentes.

- **Positividad ($\boldsymbol{POS}$).** Para todo *pamc* $(N_0, C)$ y todo $i \in N$, se verifica que

$$F_i(N_0, C) \geq 0$$

$POS$ establece que ningún agente puede tener una ganancia.

- **Repartición equitativa de costos extras ($\boldsymbol{RECE}$).** Sean $c_0, c_0' \geq 0$ con $c_0 < c_0'$. Y sean $(N_0, C)$ y $(N_0, C')$ dos *pamc* tales que $c_{i0} = c_0$ y $c_{0i}' = c_0'$ $\forall\ i \in N$, y $c_{ij} = c_{ij}' \leq c_0$ $\forall\ i, j \in N$, entonces

$$F_i(N_0, C') = F_i(N_0, C) + \frac{c_0' - c_0}{n}$$

$RECE$ implica que, cuando la conexión directa con la fuente es la más cara y tiene el mismo costo para todos los agentes, estos deberían repartir equitativamente cualquier costo extra que surgiera en dicha conexión.

Se dice que $i, j \in N$ son *simétricos* si para todo $k \in N_0 \backslash \{i, j\}$ es $c_{ik} = c_{jk}$.

- **Simetría ($\boldsymbol{SIM}$).** Para todo *pamc* $(N_0, C)$ y todo par de agentes simétricos $i, j \in N$ se verifica que

$$F_i(N_0, C) = F_j(N_0, C)$$

Creemos que junto con **Sensibilidad a los Costos Generales (SCG)** (y a diferencia de *IAI)*, todas estas propiedades serian deseables que pudieran ser cumplidas por reglas que dan solución a los *pamc*.

## 5.1. Propiedades que satisface cada regla

A continuación analizamos qué propiedades satisfacen cada una de las reglas antes descriptas.

**Teorema 2** .

**a)** *$B$ satisface EG, POS, RECE, SCG y SIM; y no satisface CON, MC y MP.*

**b)** *$DK$ satisface EG, MC, POS, SCG y SIM; y no satisface CON, MP y RECE.*

**c)** *$K$ satisface CON, MC, RECE, SCG y SIM; y no satisface EG, MP y POS.*

**d)** *$BVP$ satisface CON, EG, MC, MP, POS, RECE y SIM; pero no satisface SCG.*

***Demostración.*** *Referirse a Bergantiños y Vidal-Puga (2008).* ■

**Teorema 3** *$PRD$ satisface CON, MC, POS, RECE, SIM y SCG ; y no satisface EG y MP.*
***Demostración.*** .

**i)** *$PRD$ satisface CON. En efecto, si $\alpha^*$ denota cualquier árbol mínimo, la función*

$$PRD_i(N_0, C) = \frac{c_{0i}}{\sum\limits_{j \in N} c_{0j}} \sum_{(k,l) \in \alpha^*} c_{kl}$$

*es claramente continua respecto a las variables componentes de $C$.*

**ii)** *$PRD$ satisface MC. En efecto, dados dos pamc $(N_0, C)$ y $(N_0, C')$ tal que $c_{ij} < c'_{ij}$ para ciertos $i \in N$, $j \in N_0$ y $c_{kl} = c'_{kl}$ en otro caso, es claro que*

$$m(N_0, C) \leq m(N_0, C')$$

*Por otra parte, si $j \neq 0$ se tiene que*

$$\frac{c_{i0}}{\sum\limits_{k \in N} c_{k0}} = \frac{c'_{i0}}{\sum\limits_{k \in N} c'_{k0}}$$

*mientras que, si $j = 0$, entonces*

$$\frac{c_{i0}}{\sum\limits_{k \in N} c_{k0}} = \frac{c_{i0}}{c_{i0} + \sum\limits_{k \in N \setminus \{i\}} c_{k0}} < \frac{c'_{i0}}{c'_{i0} + \sum\limits_{k \in N \setminus \{i\}} c_{k0}} = \frac{c'_{i0}}{\sum\limits_{k \in N} c'_{k0}}$$

*pues es fácil ver que la función $f(x) = \frac{x}{x+c}$ con $c = \sum_{k \in N \setminus \{i\}} c_{k0} = \sum_{k \in N \setminus \{i\}} c'_{k0}$ es creciente para $x \geq 0$. Luego, se sigue inmediatamente de estas observaciones que*

$$PRD_i(N_0, C) = \frac{c_{i0}}{\sum\limits_{k \in N} c_{k0}} m(N_0, C) \leq \frac{c'_{i0}}{\sum\limits_{k \in N} c'_{k0}} m(N_0, C') = PRD_i(N_0, C')$$

**iii)** *$PRD$ satisface $POS$. Es trivial, ya que se asume que todos los costos de conexión son positivos.*

**iv)** *$PRD$ satisface $RECE$. Sean $c_0, c'_0 \geq 0$ con $c_0 < c'_0$. Y sean $(N_0, C)$ y $(N_0, C')$ dos pamc tales que $c_{i0} = c_0$ y $c'_{0i} = c'_0$ $\forall$ $i \in N$, y $c_{ij} = c'_{ij} \leq c_0$ $\forall$ $i, j \in N$. Se deduce del algoritmo de Prim y del hecho de que $c_{ij} \leq c_0$ $\forall$ $i, j \in N$ que $(N_0, C)$ admite un árbol mínimo $\alpha^*$ en el cual hay exactamente un agente conectado directamente con la fuente. Es claro que $\alpha^*$ será también un árbol mínimo para $(N_0, C')$ y, en consecuencia, se tiene que*

$$m(N_0, C) = c_0 + \sum_{(j,k) \in \alpha^*/j,k \neq 0} c_{jk}$$

*y*

$$m(N_0, C') = c'_0 + \sum_{(j,k) \in \alpha^*/j,k \neq 0} c'_{jk} = c'_0 + \sum_{(j,k) \in \alpha^*/j,k \neq 0} c_{jk}$$

*Luego,*

$$\begin{aligned}
PRD_i(N_0, C') &= \frac{c'_{0i}}{\sum\limits_{j\in N} c'_{0j}} m(N_0, C') \\
&= \frac{c'_0}{\sum\limits_{j\in N} c'_0}[c'_0 + m(N_0, C) - c_0] \\
&= \frac{1}{n}[c'_0 + m(N_0, C) - c_0] \\
&= \frac{c_0}{\sum\limits_{j\in N} c_0} m(N_0, C) + \frac{c'_0 - c_0}{n} \\
&= PRD_i(N_0, C) + \frac{c'_0 - c_0}{n}
\end{aligned}$$

**v)** *$PRD$ satisface SIM. En efecto, dado un pamc $(N_0, C)$ y un par de agentes simétricos $i, j \in N$, se tiene que, en particular, $c_{0i} = c_{0j}$ y por lo tanto*

$$PRD_i(N_0, C) = \frac{c_{0i}}{\sum\limits_{k\in N} c_{0k}} m(N_0, C) = \frac{c_{0j}}{\sum\limits_{k\in N} c_{0k}} m(N_0, C) = .PRD_j(N_0, C)$$

**vi)** *$PRD$ satisface SCG (no satisface IAI). Considérese el ejemplo analizado en la sección 3.2. Siempre que $x$ sea positivo, se tendrá que el único árbol mínimo es $\alpha^* = \{(0,1); (1,2)\}$ con $c_{01} = 10$ y $c_{12} = 2$. Por lo tanto, todos estos problemas son equivalentes en cuanto árboles y, sin embargo,*

$$PRD(N_0, C) = \left(\frac{120}{20+x}, \frac{120+12x}{20+x}\right)$$

*de modo que a cada valor diferente de $x$ corresponde una distribución de costos diferente según $PRD$.*

**vii)** *PRD no satisface EG. Ejemplo: Sea* $(N_0, C)$ *tal que* $N = \{1, 2, 3\}$ *y*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \\ 10 & 11 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

*Tomando* $S = \{1, 2\}$ *se tiene que*

$$PRD_1(N_0, C) + PRD_2(N_0, C) = \frac{18}{7} + \frac{6}{7} = \frac{24}{7} > 3 = m(S_0, C)$$

**viii)** *PRD no satisface MP. Ejemplo: Sean* $(N_0, C)$ *y* $S$ *como en el ejemplo dado en (vi), entonces*

$$PRD_1(N_0, C) = \frac{18}{7} > \frac{9}{4} = PRD_1(S_0, C)$$

■

**Teorema 4** *PRDC satisface CON, POS, RECE, SIM y SCG; y no satisface EG, MC y MP.*
***Demostración.*** **.**

**i)** *PRDC satisface CON. En efecto, para cada* $a \in N$, $m(a)$ *es una función continua de las variables componentes de* $C$ *(es el mínimo de funciones continuas de estas); luego, si* $\alpha^*$ *denota cualquier árbol mínimo, la función*

$$PRI_i(N_0, C) = \frac{m(i)}{\sum\limits_{j \in N} m(j)} \sum_{(k,l) \in \alpha^*} c_{kl}$$

*es claramente continua respecto a* $C$.

**ii)** *PRDC satisface POS. Es trivial, ya que se asume que todos los costos de conexión son positivos.*

**iii)** *PRDC satisface RECE. Sean* $c_0, c'_0 \geq 0$ *con* $c_0 < c'_0$. *Y sean* $(N_0, C)$ *y* $(N_0, C')$ *dos pamc tales que* $c_{i0} = c_0$ *y* $c'_{0i} = c'_0 \ \forall \ i \in N$, *y* $c_{ij} = c'_{ij} \leq c_0 \ \forall \ i, j \in N$. *Bajo estas condiciones se tiene que* $m(i) = c_{0i} = c_0$ *y* $m'(i) = c'_{0i} = c'_0$ *para todo* $i \in N$, *pues cualquier otro camino de* $i$ *a* $0$ *en* $(N_0, C)$ *costará* $c_{0i} = c_0$ *más los costos de los otros arcos que lo conformen; análogamente en* $(N_0, C)$. *Por otra parte, se deduce del algoritmo de Prim y del hecho de que* $c_{ij} \leq c_0 \ \forall \ i, j \in N$ *que* $(N_0, C)$ *admite un árbol mínimo* $\alpha^*$ *en el cual hay exactamente un agente conectado directamente con la fuente. Es claro que* $\alpha^*$*será también un árbol mínimo para* $(N_0, C')$ *y, en consecuencia, se tiene que*

$$m(N_0, C) = c_0 + \sum_{(j,k) \in \alpha^* / j,k \neq 0} c_{jk}$$

*y*

$$m(N_0, C') = c'_0 + \sum_{(j,k) \in \alpha^* / j,k \neq 0} c'_{jk} = c'_0 + \sum_{(j,k) \in \alpha^* / j,k \neq 0} c_{jk}$$

*Luego,*

$$\begin{aligned} PRDC_i(N_0, C') &= \frac{c'_{0i}}{\sum\limits_{j \in N} c'_{0j}} m(N_0, C') \\ &= \frac{c'_0}{\sum\limits_{j \in N} c'_0} [c'_0 + m(N_0, C) - c_0] \\ &= \frac{1}{n} [c'_0 + m(N_0, C) - c_0] \\ &= \frac{c_0}{\sum\limits_{j \in N} c_0} m(N_0, C) + \frac{c'_0 - c_0}{n} \\ &= PRDC_i(N_0, C) + \frac{c'_0 - c_0}{n} \end{aligned}$$

**iv)** *PRDC satisface SIM. En efecto, dado un pamc* $(N_0, C)$ *y un par de agentes simétricos* $i, j \in N$, *sea que* $h$ *denote el primer nodo siguiente* *de $i$ (comúnmente llamado predecesor inmediato) en un camino mínimo $c_i^*$. Si $h = 0$, es claro que se tendrá que*

$$m(i) = c_{0i} = c_{0j} = m(j)$$

*Por otro lado, si $h \neq 0$, sea $c_h^* = c_i^* \backslash \{(i,h)\}$ (es facil ver que $c_h^*$ debe ser un camino mínimo para $h$). Se afirma que $\{(j,h)\} \cup c_h^*$ es un camino mínimo para $j$. En efecto, supongamos que hay un camino $c_j^*$ más barato que este y denótese por $k$ al primer nodo siguiente de $j$ en dicho camino. Entonces, haciendo $c_k^* = c_j^* \backslash \{(j,k)\}$ se tendría que el camino de $i$ a la fuente determinado por $\{(i,k)\} \cup c_k$ tiene costo*

$$\begin{aligned} c(\{(i,k)\} \cup c_k) &= c_{ik} + c(c_k^*) = c_{jk} + c(c_k^*) = c_j^* < c(\{(j,h)\} \cup c_h^*) \\ &= c_{jh} + c(c_h^*) = c_{ih} + c(c_h^*) = m(i) \end{aligned}$$

*y esto es una contradicción ya que $m(i)$ es el mínimo costo que pude tener un camino de $i$ a la fuente en $(N_0, C)$. La contradicción provino de suponer que existe un camino de $j$ a la fuente con menor costo que $\{(j,h)\} \cup c_h^*$; luego, esto no puede ser y queda así demostrado que $\{(j,h)\} \cup c_h^*$ es un camino mínimo para $j$. En consecuencia, se tiene que, también en este caso,*

$$m(j) = c(\{(j,h)\} \cup c_h^*) = c_{jh} + c(c_h^*) = c_{ih} + c(c_h^*) = c(c_i^*) = m(i)$$

*Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} PRDC_i(N_0, C) &= \frac{m(i)}{\sum\limits_{k \in N} m(k)} m(N_0, C) = \frac{m(j)}{\sum\limits_{k \in N} m(k)} m(N_0, C) \\ &= PRDC_j(N_0, C) \end{aligned}$$

**v)** *PRDC satisface SCG (no satisface IAI). Considérese el ejemplo presentado en la sección 3.2. Para todos los valores de $x$ en el intervalo $(0, 2)$, se tendrá que $m(1) = 10$, $m(2) = 10+x$ y el único árbol mínimo* *es* $\alpha^* = \{(0,1);(1,2)\}$ *con* $c_{01} = 10$ *y* $c_{12} = 2$. *Por lo tanto, todos estos problemas son equivalentes en cuanto árboles y, sin embargo,*

$$PRDC(N_0, C) = \left(\frac{120}{20+x}, \frac{120+12x}{20+x}\right)$$

*de modo que a cada valor diferente de* $x$ *corresponde una distribución de costos diferente según* $PRDC$.

**vi)** $PRDC$ *no satisface EG. Considérese el ejemplo dado en vi) de la demostración del teorema anterior. Nótese que en dicho ejemplo*

$$PRDC_a(N_0, C) = PRI_a(N_0, C)$$

*para todo* $a \in N$.

**vii)** $PRDC$ *no satisface MC. Ejemplo: Sean* $(N_0, C)$ *y* $(N_0, C')$ *tales que* $N = \{1,2,3\}$,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 11 \\ 9 & 2 & 0 & 3 \\ 10 & 11 & 3 & 0 \end{pmatrix} \; y \; C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & 4 & 11 \\ 9 & 4 & 0 & 3 \\ 10 & 11 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

*Entonces, se tiene que* $c_{12} = c_{21} < c'_{12} = c'_{21}$ *y* $c_{kl} = c'_{kl}$ *en cualquier otro caso pero, sin embargo,*

$$PRDC_1(N_0, C) = \frac{3}{5} > \frac{4}{7} = PRDC_1(N_0, C')$$

**viii)** $PRDC$ *no satisface MP. Considérese el mismo ejemplo que en vii) en la demostración del teorema anterior, en el cual se tiene que también*

$$PRDC_1(N_0, C) = \frac{18}{7} > \frac{9}{4} = PRDC_1(S_0, C)$$

**Observaciones:**

A continuación se presenta una tabla que resume las propiedades (EG, POS, RECE, SCG, SIM, CON, MC y MP).que cumplen (marcadas con una X) las soluciones (B, DK, K, BVP, PRD y PRDC) mencionadas en el presente artículo.

| Propiedades/Soluciones | $B$ | $DK$ | $K$ | $BVP$ | $PRD$ | $PRDC$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $EG$ | $X$ | $X$ | | $X$ | | |
| $POS$ | $X$ | $X$ | | $X$ | $X$ | $X$ |
| $RECE$ | $X$ | | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ |
| $SCG$ | $X$ | $X$ | $X$ | | $X$ | $X$ |
| $SIM$ | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ |
| $CON$ | | | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ |
| $MC$ | | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ | |
| $MP$ | | | | $X$ | | |

Todas las reglas clásicas: $B$, $DK$ y $K$ cumplen varias propiedades deseables pero también no cumplen otras propiedades que seria importante satisfacer. $B$, $DK$ y $K$ no cumplen $MD$ y otras propiedades importantes. $BVP$ si bien satisface muchas propiedades deseables, al no cumplir $SCG$ pierde de vista el problema original lo cual desvirtúa el posterior análisis de costos.

$PRD$ y $PRDC$ satisfacen varias propiedades deseables, incluida $SCG$, aunque no satisfacen $EG$; sin embargo, nótese que esta propiedad pierde relevancia cuando los agentes no pueden "negociar" entre si (como sería el caso, por ejemplo, en que una municipalidad recoge los datos del problema y decide la distribución final del costo de construir una red de canales de riego), o cuando no hay suficiente comunicación entre ellos (como podría suceder cuando el grupo de interesados es numeroso), etc.

# 6. Comentarios finales

En el presente trabajo hemos definido y analizado una nueva familia de reglas de distribución de costo, en el contexto de los *pamc*. Se usaron criterios de proporcionalidad para definir estas reglas y a traves de un ejemplo típico se observó un mejor comportamiento que las reglas de Bird (Bird, 1976), Kar (Kar, 2002) y Dutta-Kar (Dutta y Kar, 2004), Kar (2002) y otras reglas, lo que fue corroborado al estudiarse las propiedades generales que cumplen las reglas proporcionales aquí introducidas

Se concluye que comparativamente, las reglas proporcionales se encuentran bien posicionadas con respecto a otras reglas clásicas en cuanto a las propiedades que cumplen. Sumado a ello cabe señalar que las soluciones proporcionales por la simpleza de implementación y claro sentido de equidad las convierten en una alternativa muy ampliamente usada y atractiva para la asignación de costos en los *pamc*.

Como posibles extensiones cabe mencionar que sería interesante estudiar la adaptación de estas reglas proporcionales a casos en que los problemas a resolver involucran árboles en los que los miembros de las distintas componentes pretenden asociarse por separado.

Otro interesante aspecto que podría ser tenido en consideración en posteriores estudios es que la implementación de reglas proporcionales basadas en diferentes criterios de justicia podría ser de utilidad para tratar problemas en los cuales la calidad del servicio se vea afectada según las conexiones con la fuente sean directas o indirectas.

Recepción: 04/11/2013. Aceptación: 19/12/2013.

# Referencias

[1] Aristotle (2009): "*The Nicomachean Ethics*". Vol 5, Oxford University Press.

[2] Bergantiños G. and Lorenzo L. (2004): "*A non cooperative approach to the cost spanning tree problem*". Mathematical Methods of Operations Research, 38, 163-174.

[3] Bergantiños G. and Vidal-Puga J.J. (2008): "*On some properties of three cost allocation rules in minimum cost spanning tree problems*". AUCO Czech Economic Review 2: 251-267.

[4] Bird C. G. (1976). "*On cost allocation for a spanning tree : A game theoretic approach*", Networks 6, 335-350.

[5] Chun, Y. and Thomson W. (1992): "*Bargaining problems with claims*". Mathematical Social Sciences, 24, 19-33.

[6] Dutta B. and Kar A. (2004): "*Cost monotonicity, consistency and minimum cost spanning tree games*". Games and Economic Behavior 48, 223-248.

[7] Feltkamp B., Tijs S. and Muto S. (1994): "*On the irreducible core and the equal remaining obligation rule on minimum cost spanning extension problems*". Mimeo, Tilburg University.

[8] Granot D. and Huberman G. (1981): "*Minimum cost spanning tree games*". Mathematical Programming 21, 1-18.

[9] Granot D, Huberman G (1984). "*On the core and nucleolous of the minimum cost spanning tree games*" Mathematical Programming 29: 323-347.

[10] Hougaard J.H. and Tvede M. (2010). "*N − Person Nonconvex Bargaining : Efficient Proportional Solution*". Discussion Papers, Department of Economics University of Copenhagen.

[11] Kalai E. (1977): "*Proportional solutions to bargaining situations, interpersonal utility comparison*". Econometrica, vol 45, 7, 1623-1630.

[12] Kalai, E. and Smorodinsky R. (1975): "*Other solutions to Nash's bargaining problem*". Econometrica, 43, 513-518.

[13] Kar A. (2002): "*Axiomatization of the Shapley Value on minimum cost spanning tree games*". Games and Economic Behavior, vol. 38, 2, 265-277

[14] Kruskal J (1956). "*On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem*". Proceedings of the American Mathematical Society, 7: 48-50.

[15] Nash, J. (1950): "*The bargaining problem*". Econometrica, 18, 129-140.

[16] Prim R C (1957). "*Shortest connection networks and some generalizations*". Bell Systems Technology Journal 36: 1389-1401.

[17] Roemer J. E. and Silvestre J. (1993) "*The Proportional Solution for Economies with Both Private and Public Ownership*". Journal of Economic Theory, 59, 426-444

[18] Roth A. (1979): "*Proportional solutions to bargaining problems*". Econometrica, vol 47, 3, 775-778.

[19] Thompson W. (2003): "*Axiomatic and game-theoretic analisis of bankruptcy and taxation problems, a survey*". Mathematical Social Science, 45, 249-297.