

¿Qué hay detrás de una matematización? El caso de las primeras teorías económicas

Alfonso Ávila del Palacio
Instituto de Ciencias Sociales, UJED
Durango, México
acavila@dgo.megared.net.mx

Resumen

El objetivo de este documento es analizar el papel de las matemáticas en el desarrollo de las teorías económicas. Para analizar esta cuestión, estudiamos aquí dos casos clásicos de matematización de teorías económicas: el caso de Cournot que intentó matematizar, por primera vez, la teoría de la producción de Adam Smith; y el caso de Walras que matematizó la teoría del intercambio propuesta por el mismo Smith y otros. Se trabajará con cada uno de los tres autores desde una perspectiva lógica. De lo cual se concluye que Cournot y Walras más que matematizar la teoría de Smith, crearon nuevas teorías económicas.

Palabras clave: Matematizar, Smith, Cournot, Walras.

Clasificación JEL: C02.

Abstract

The objective of this paper is to analyze the role of mathematics in the development of economic theories. To analyze this issue, we studied here two classic cases of mathematization of economic theory: the case of Cournot who tried to do mathematical, for the first time, the theory of the production of Adam Smith; and the case of Walras which did mathematical the exchange theory proposed by Smith and others. They will work with each one of the three authors from a logical perspective. From which it is concluded that Cournot and Walras more than to do mathematical the theory of Smith, created new economic theories.

Keywords: Do mathematical, Smith, Cournot, Walras.

JEL classification: C02.

1. Introducción

Para algunos la Economía es la ciencia, de entre las sociales, la más desarrollada. Al parecer, lo que quieren decir es que es la ciencia social más matematizada. No obstante, hay también quienes piensan que las matemáticas no ayudan en nada a la ciencia de la economía. Entre ellos, Beed and Beed (2000) sostienen que,

Los modelos (matemáticos) formales de la teoría de la elección racional no han clarificado la explicación de los fenómenos del mundo real más allá de los modelos verbales que los modelos matemáticos tratan de formalizar. . . Los modelos formales no han arrojado nuevas predicciones o “nuevos hechos” acerca del comportamiento del mundo real (p. 172).

Keynes, por su parte, había dicho:

Una gran proporción de la reciente economía “matemática” es una simple mixtura, tan imprecisa como los supuestos originales que los sustentan, que permite al autor perder de vista las complejidades e interdependencias del mundo real en un laberinto de símbolos pretensivos e inútiles (1936, p. 298).

Estos cuestionamientos ponen el dedo en la yaga: ya que, si el formalismo no va más allá de los modelos verbales es frívolo; y si no describe mejor que estos el comportamiento humano, es una pérdida de tiempo.

Para analizar estas cuestiones, estudiaremos aquí dos casos clásicos de matematización de teorías económicas: el caso de Cournot (1838) que intentó matematizar, por primera vez, la teoría de la producción de Adam Smith (1776); y el caso de Walras (1874) que matematizó la teoría del intercambio propuesta por el mismo Smith (1776) y otros.

Trabajaré con cada uno de los tres autores desde una perspectiva lógica. Primero expondré las ideas centrales de esos autores entresacándolas de sus propias obras; en seguida, simbolizaré dichas ideas para trabajar con ellas de forma más esquemática; y finalmente, presentaré sus respectivas

argumentaciones ordenadas lógicamente. A partir de ahí, construiré dos tablas comparativas que nos permitan ver sus semejanzas y diferencias.

Con el objeto de destacar la estructura lógica de los autores mencionados, clasificaré sus afirmaciones en Axiomas (A), Definiciones (D), Propositiones Empíricas (P) y Conclusiones (C). Los “Axiomas” son afirmaciones que implícita o explícitamente se adoptan sin cuestionarlas. Generalmente se toman del conocimiento que los autores tienen de la naturaleza humana. Las “Definiciones” son afirmaciones que sólo aclaran la terminología que cada uno de ellos usa. Las “Propositiones Empíricas” son afirmaciones apoyadas en observaciones acerca del comportamiento de los fenómenos económicos. Las “Conclusiones” son afirmaciones que están apoyadas por todas las otras. Vistas estas últimas desde otro ángulo, se trata de las afirmaciones más importantes, es decir, las hipótesis que dichos autores quieren defender mediante su argumentación y algunos apoyos empíricos.

2. Argumentación de Smith, Cournot y Walras

2.1. Argumento de Adam Smith

Adam Smith (1776) aclara al principio de su obra qué entiende por “Riqueza”:

La suma anual de trabajo de cada nación constituye el fondo que la provee originalmente de todo lo que consume cada año para atender a las necesidades o las comodidades de la vida, y que es siempre, o bien un producto inmediato de aquel trabajo, o bien algo que con él se compra a otras naciones (Smith, 1776, p. 3).

Lo cual podemos expresarlo con la siguiente igualdad: *Riqueza = Producto del Trabajo*; o, sintéticamente, $R = PT$.

Como consecuencia de esa definición, Smith deduce que, “La abundancia o la penuria de la provisión anual antedicha, en una nación determinada, depende principalmente de la productividad del trabajo, sea cualesquiera

el suelo, el clima o la extensión del territorio” (Smith, 1776, p. 3). Lo cual podemos expresarlo mediante la siguiente función creciente:

$$\textit{Producto del Trabajo} = f(\textit{productividad}) :$$

$$PT = f(PR); \quad \text{con } d(PT)/d(PR) > 0$$

Después de aclarar lo que él entiende por “Riqueza” y de sacar las consecuencias lógicas de su definición, Adam Smith apunta un hecho empírico que él ha observado:

El mayor adelanto realizado en la capacidad productiva del trabajo, y la parte mayor de la aptitud, destreza y discernimiento con que es dirigido o aplicado en todas partes, parece haber sido consecuencia de la división del mismo (Smith, 1776, p. 9).

Lo cual podemos expresarlo mediante la siguiente función creciente:

$$\textit{Productividad} = f(\textit{División del Trabajo}) :$$

$$PR = f(DT); \quad \text{con } d(PR)/d(DT) > 0$$

En seguida, Adam Smith apela a su conocimiento de la naturaleza humana para establecer un principio no cuestionado en esa obra, es decir un axioma:

Esta división del trabajo de la que se derivan tantas ventajas, no es fruto de una sabiduría humana que haya previsto y proyectado esa riqueza general que produce. Es consecuencia obligada, aunque lenta y gradual, de cierta tendencia de la naturaleza humana que no busca una utilidad de tanto alcance: la tendencia al trueque, a la permuta, al cambio de una cosa por otra (Smith, 1776, p. 17).

$$TT \Rightarrow DT$$

Ahora bien, dado que la División del Trabajo es lo mismo que la separación y especialización de oficios ($DT = SO$), la especialización podrá ser más amplia si hay más gente involucrada. De tal manera que la dimensión del mercado (es decir el número de gente que intercambia sus productos) determina hasta dónde se puede llevar a cabo la separación de oficios. Esto lo expresa Smith con las siguientes palabras: “La división del trabajo está limitada por las dimensiones del mercado” (Smith, 1776, p. 21). De manera que la Tendencia al Trueque, tomada como una constante, y la dimensión variable del mercado determinan la dimensión de la separación de oficios:

$$(TT + \wedge M) \Rightarrow \wedge SO^1$$

Lo cual podemos expresarlo mediante la siguiente función creciente:

$$\textit{División del Trabajo} = f(\textit{Mercado}) + TT :$$

$$DT = f(M) + TT; \text{ con } d(DT)/d(M) > 0$$

Por supuesto, dado que TT es una constante, podríamos decir que DT depende solamente de M ; pero quisimos conservar la constante en la fórmula con la idea de expresar que es un requisito sin el cual no habría División del Trabajo por muy grande que fuera una comunidad.

A partir de lo anterior, Adam Smith extrae varias consecuencias lógicas, que podemos resumir básicamente en las tres siguientes:

- a) Dado que la Tendencia al Trueque es una tendencia natural siempre presente, podemos decir que el tamaño del mercado determina la Riqueza de una comunidad. Lo cual podemos expresarlo mediante la siguiente función creciente:

$$\textit{Riqueza} = f(\textit{Mercado}) + TT :$$

$$R = f(M) + TT; \text{ con } d(R)/d(M) > 0$$

¹En todo este trabajo, ‘ \Rightarrow ’ significa que el antecedente es una causa suficiente para que se dé el consecuente; mientras que ‘ \wedge ’ significa “un incremento de”.

- b) Por consiguiente, cualquier circunstancia que amplíe el mercado (como el comercio exterior) redundará en una mayor riqueza para todos los implicados; y cualquier circunstancia que lo limite (como los aranceles), provoca una disminución de la Riqueza o, al menos, entorpece su crecimiento. Por tanto, dice Smith, es falso lo que piensan los mercantilistas de que hay que fomentar la exportación y restringir la importación para incrementar la Riqueza de una nación (Smith, 1776, p. 391). En igualdad de circunstancias, un país con comercio exterior tendrá más riqueza que uno que no lo practique (Smith, 1776, p. 593). Lo cual podemos expresarlo mediante la siguiente relación:

$$(TT + \wedge M) \Rightarrow \wedge R$$

- c) Por consiguiente, el incremento de la Riqueza general es producto de la Tendencia al Trueque, que es una constante, y del incremento del mercado, que es variable.

Resumen del argumento de Smith

- $A1 : TT \Rightarrow DT$ (Comportamiento humano)
- $D1 : DT = SO$ (Definición de la DT)
- $D2 : R = PT$ (Definición de riqueza)
- $P1 : (TT + \wedge M) \Rightarrow \wedge SO$ (Tomando TT como dada, el incremento del Mercado produce un incremento en la separación de oficios)
- $P2 : PT = f(PR); d(PT)/d(PR) > 0$ (Hecho observado)
- $P3 : PR = f(DT); d(PR)/d(DT) > 0$ (Hecho observado)
- $P4 : DT = f(M) + TT; d(DT)/d(M) > 0$ ($D1$ y $P1$)
- $C1 : R = f(M) + TT; d(R)/d(M) > 0$ (Por transitividad de $P2$, $P3$, $P4$ y sustitución en $D2$)
- $C2 \therefore (TT + \wedge M) \Rightarrow \wedge R$ (Por $C1$)

2.2. Argumento de Augustin Cournot

Cournot (1838) establece su propia definición de Riqueza con las siguientes palabras: “Conviene identificar absolutamente el sentido de la palabra riquezas con el que presentan estas otras palabras: valores intercambiables” (Cournot, 1838, p. 23): Lo cual podemos expresarlo mediante la siguiente igualdad:

$$\text{Riquezas} = \text{Valores Intercambiables} :$$

$$R = VI$$

Posteriormente, Cournot aclara lo que entiende por Valores Intercambiables: los Valores Intercambiables, dice, son todo lo que se demanda; es decir, todo lo que está en el mercado; donde la Demanda es lo mismo que las Ventas “ya que para nosotros estas dos palabras son sinónimas”. Estas equivalencias las podemos expresar mediante las siguientes igualdades:

$$\text{Valores Intercambiable} = \text{Demanda} = \text{Venta} :$$

$$VI = D = V$$

Una vez que aclara lo que entiende por ‘Riqueza’ y por ‘Demanda’, Cournot explica el papel que juegan sus definiciones:

La idea abstracta de riqueza, tal como la hemos concebido, al construir una relación perfectamente determinada, puede ser objeto de deducciones teóricas, como todas las ideas precisas. (Cournot, 1838, p. 32).

Lo cual lo justifica de la siguiente manera:

La teoría de la riqueza, según la noción que tratamos de dar, sólo sería una especulación ociosa si se alejara demasiado de lo que son las riquezas dentro de nuestros hábitos sociales. . . Pero, como ya se ha dicho, la influencia de una civilización progresiva es tal, que tiende sin cesar a aproximar las relaciones reales y variables a una relación absoluta a la que nos hemos elevado por vía de abstracción. (Cournot, 1838, p. 33).

En seguida, Cournot enuncia explícitamente un axioma que expresa lo que él piensa de la naturaleza humana:

Sólo invocaremos un axioma, o si se quiere, sólo emplearemos una hipótesis: que cada hombre intenta extraer el máximo valor posible de sus bienes o de su trabajo. (Cournot, 1838, p. 66).

Lo cual podemos expresarlo mediante la siguiente relación:

Racionalidad individual = Búsqueda de Maximización :

$$RI \Rightarrow BM$$

Cournot añade a su argumentación un hecho empírico observable: “La venta o la demanda, decimos, crece en general cuando el precio desciende” (Cournot, 1838, p. 68). A partir del cual extrae la ley de la demanda expresada de la siguiente forma: “La venta o la demanda anual D es, para cada mercancía, una función particular $F(p)$ del precio p de la mercancía” (p. 70):

$$D = F(p)$$

La cual es una función continua si consideramos un número grande de consumidores, de manera que a cualquier variación en el precio de la mercancía, habrá al menos un consumidor que varíe el monto de sus compras. Esta función es decreciente porque al subir el precio, baja el consumo.

Cournot adopta el punto de vista de los productores para realizar su análisis. De esa forma, los ingresos de cada productor serán iguales a sus ventas multiplicadas por el precio de cada unidad. Pero, dado que las Ventas son lo mismo que la Demanda; ya que una demanda que no es seguida de una venta no tiene significado, Cournot expresa el ingreso de productor de la siguiente forma:

Ingreso = Demanda \times Precio :

$$I = V \times p = D \times p = pF(p)$$

Ahora bien, de acuerdo al axioma de maximización, cada productor intentará maximizar su función de Ingreso. Esto, por supuesto, en el caso más sencillo en el que no se consideran los costos. En esos términos, al examinar el comportamiento de un monopolio, dado que él puede fijar el precio, se trabajará con la función $I = pF(p)$. De tal manera que derivando la función con respecto a p , igualando a cero la derivada, y finalmente despejando p obtenemos el precio (p_m) que maximiza el ingreso del monopolio y que, por consiguiente, le conviene fijar al monopolista. De esa forma se determina un precio y, aunado a él, un nivel de producción (D_m); lo cual se obtiene de la función de Demanda del consumidor. Por consiguiente, $F(p) + pF'(p) = 0$ determina el nivel de Riqueza, ya que $R = D$. Si queremos encontrar la Riqueza en términos de dinero, multiplicamos $D \times p$; y por consiguiente $R_d = D \times p$. Sin embargo, si consideráramos los costos, el precio así obtenido tendría que ser superior al costo unitario.

En el caso de n productores, se obtienen n ecuaciones maximizadoras que habrá que resolver conjuntamente. Cada productor tratará de maximizar su ingreso y la competencia por incrementar las ventas (uno de los factores del ingreso), hará que entre todos fijen un precio de equilibrio. Si transformamos la función de demanda de $D = F(p)$ en $p = f(D)$, esta última es la conocida función inversa de la demanda. Así pues, la función de ingreso en concurrencia será: $I_c = D_c f(D_c)$; ya que en este caso, la variable que puede modificar cada productor no es el precio sino sus ventas. Así pues, derivando las funciones para cada productor, obtenemos n ecuaciones con n incógnitas: D_1, D_2, \dots, D_n ; es decir:

$$\begin{aligned} f(D_1 + D_2 + \dots + D_n) + D_1 f'(D_1 + D_2 + \dots + D_n) &= 0 \\ f(D_1 + D_2 + \dots + D_n) + D_2 f'(D_1 + D_2 + \dots + D_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f(D_1 + D_2 + \dots + D_n) + D_n f'(D_1 + D_2 + \dots + D_n) &= 0 \end{aligned}$$

De esa forma, tal como lo muestra Cournot, se determina un precio menor que en el monopolio y un nivel de producción $D_c = D_1 + D_2 + \dots + D_n$, es decir de Riqueza, mayor que en el monopolio.

Por consiguiente, la Racionalidad Individual conduce a que los produc-

tores, enfrentados a una función de demanda, en situaciones de monopolio o competencia, fijen el precio y su producción, lo cual viene a determinar el nivel de Riqueza de la comunidad en cuestión. Esto lo podemos expresar mediante la siguientes relaciones:

$$(RI + F(p_m)) \Rightarrow R_{dm}$$

$$(RI + f(D_c)) \Rightarrow R_{dc}$$

Resumen de la argumentación de Cournot

- $A1 : RI \Rightarrow BM$ (Hipótesis de Racionalidad Individual)
- $D1 : R = VI$ (Definición de Riqueza en especie)
- $D2 : R_d = VI \times p$ (Riqueza en dinero)
- $D3 : VI = D$ (Equivalencia entre VI y Demanda)
- $D4 : D = V$ (Demanda para el Productor)
- $P1 : I = V \times p$ (Ingreso para el Productor)
- $P2 : D = F(p); dD/dF(p) < 0$ (Demanda para el Consumidor)
- $P3 : I_m = pF(p)$ (Ingreso para un monopolio)
- $C1 : F(p) + pF'(p) = 0$ (Por $A1$ se maximiza $P3$ y se obtiene esta función con la que se determina el precio que maximiza el ingreso del monopolio. Una vez fijado el precio (p_m), se obtiene en $P3$ el ingreso del monopolio (I_m), el cual equivale a la riqueza en términos monetarios en una situación de monopolio (R_{dm}))
- $C2 : I_m = p_m F(p_m)$ (Por $P3$ y $C1$)
- $C3 : I_m = R_{dm}$ (Por $D2, D3, D4, P1, P2$ y $C2$)

La Riqueza en un sistema de monopolio, como puede verse en $C1$, depende en última instancia de la función de demanda a la que se enfrente el monopolista y la constante de la Racionalidad Individual, que es la hace que el monopolista pase de $P3$ a $C1$. Por consiguiente:

- $C4 : (RI + F(p_m)) \Rightarrow R_{dm}$
- $C5 : p_c = f(D_c)$ (Función inversa de la demanda $P2$)
- $D5 : D_c = D_1 + D_2 + \dots + D_n$ (Demanda para concurrencia de productores)
- $C6 : p_c = f(D_1 + D_2 + \dots + D_n)$ (Por $P4$ y $C5$)
- $C7 : I_c = (D_1 + D_2 + \dots + D_n) \times p_c$ (Ingreso global por $P1$ y $D4$)
 - $f(D_1 + D_2 + \dots + D_n) + D_1 f'(D_1 + D_2 + \dots + D_n) = 0$
 - $f(D_1 + D_2 + \dots + D_n) + D_2 f'(D_1 + D_2 + \dots + D_n) = 0$
 - $C8 :$
 - \vdots
 - $f(D_1 + D_2 + \dots + D_n) + D_n f'(D_1 + D_2 + \dots + D_n) = 0$

(Maximizando $C4$ se obtiene este sistema de ecuaciones y resolviéndolas se obtiene la demanda (o ventas) de cada productor y el precio que las equilibra (p_c). Las demandas individuales sumadas forman la demanda global, la cual también es el ingreso global (I_c) y por consiguiente la riqueza en una situación de competencia de productores)

- $C9 : I_c = Df(D)$ (Por $P1$, $D4$ y $C5$)
- $C10 : I_c = R_{dc}$ (Por $D2$, $D3$, $D4$, $P1$, $C5$ y $C9$)

La Riqueza monetaria en una situación de competencia, como puede verse en $C7$, depende en última instancia del precio de equilibrio que determina las demandas o ventas individuales de los diversos productores. Por consiguiente, dado que el principio de Racionalidad Individual hace que cada productor trate de maximizar su ingreso manipulando sus ventas hasta el punto en el que se obtenga un precio de equilibrio, podemos decir que la Riqueza monetaria en situación de competencia depende del principio de RI y del precio de equilibrio:

- $C11 : (RI + f(D_c)) \Rightarrow R_{dc}$ (Por $A1$, $C10$)

2.3. Argumento de León Walras

León Walras da una definición de Riqueza muy similar a la de Cournot:

Por riqueza social yo entiendo todas las cosas materiales e inmateriales que son escasas; es decir, que por una parte son útiles para nosotros y por la otra sólo están disponibles en cantidades limitadas (Walras, 1874, p. 65).

Lo cual podemos expresarlo mediante las siguientes igualdades:

Riqueza = Bienes Escasos = Bienes Útiles y Limitados :

$$R = BE = UL$$

Lo cual, por cierto, es equivalente a la definición de Cournot, ya que los Bienes escasos son, justamente, los que se intercambian, es decir, los que se ofrecen y demandan. Por lo tanto:

$$UL = D$$

Walras aclara también lo que él piensa acerca de la naturaleza humana, es decir la Racionalidad Individual, de forma muy similar a Cournot, aunque sin decir expresamente que se trata de un axioma. No obstante, Walras sostiene claramente que todo individuo busca lograr la máxima satisfacción posible con los bienes que posee intercambiando una parte de ellos por otros más deseables para él. (ver, por ejemplo, Walras, 1874, p. 125). Esto lo podemos expresar mediante la siguiente relación:

Búsqueda de la Satisfacción Máxima \Rightarrow Intercambio de Bienes

$$BM \Rightarrow IB$$

Mediante el intercambio los individuos logran alcanzar su máxima satisfacción; es decir que el intercambio lleva a la máxima satisfacción individual. No obstante, la fórmula trata de expresar el sentido contrario de la relación, es decir, que es el deseo de una máxima satisfacción lo que lleva a los individuos a intercambiar algún bien que tienen por otros que no tienen.

Walras adopta explícitamente la Ley de la Demanda de Cournot (véase Walras, 1874, p. 98); y la expresa de la siguiente manera: “la Demanda del bien A es una función decreciente de su precio”:

$$D = F(p); \quad dD/dF(p) < 0$$

Partiende de lo anterior, Walras inicia su análisis examinando el comportamiento básico del mercado, es decir, el intercambio de bienes. En el caso más sencillo, tenemos dos poseedores 1 y 2 de dos Bienes A y B . El intercambio supone que el propietario 1 que tiene sólo el bien A , quiere también una cantidad del bien B y está dispuesto a ofrecer a cambio una cantidad de A . Por otra parte, 2 tiene originalmente sólo una cantidad del bien B y quisiera tener cierta cantidad del bien A , por la que está dispuesto a ofrecer una cantidad del bien B a cambio. Por consiguiente:

La demanda del bien B implica que hay una oferta del bien A

La oferta del bien A implica que hay una demanda del bien B

$$D_a \Rightarrow O_b \quad \text{y} \quad O_a \Rightarrow D_b$$

La demanda global o total D_t es la suma de D_a, D_b, D_c, \dots

El precio de un Bien en términos del otro es la relación de cuántas unidades de uno se cambian por las de otro. Cada individuo tiene su propia medida de acuerdo a sus preferencias; de manera que es mediante el regateo como se llega a un precio general que se llama de equilibrio. De tal manera que al final del intercambio de Bienes ambos habrán establecido un precio para cada Bien y habrán obtenido su máxima satisfacción con el intercambio. Ese es, justamente, un punto de equilibrio. Por ejemplo, si se intercambian m unidades de A con n unidades de B , los precios serán los siguientes:

$$p_a = n/m \quad \text{y} \quad p_b = m/n \quad (\text{véase Walras, 1874, p. 87})$$

Así pues, en el Equilibrio se igualan la oferta de cada bien con su demanda, y se fija el precio de equilibrio (p_e) y la cantidad intercambiada o

demandada (Walras, 1874, p. 88). De esa forma, la Demanda del Bien A se iguala a la Oferta de A en el precio de equilibrio:

$$D_a = O_b p_b$$

Por otra parte, la Oferta del Bien A se iguala a la Demanda de A al precio de equilibrio:

$$O_a = D_b p_b$$

Ahora bien, si del intercambio de bienes, pasamos al intercambio de trabajo y salarios, que funciona de la misma forma, el punto de Equilibrio entre estos últimos fijará el nivel de empleo y la Riqueza de la comunidad. El trabajador ofrece su mano de obra y el empresario ofrece dinero o bienes a cambio y así se establece el salario y el nivel de producción.

De tal manera que, la búsqueda de maximizar la satisfacción personal y el juego de oferta y demanda determinan finalmente el precio y las cantidades intercambiadas en el mercado, y, por consiguiente, la Riqueza social:

$$BM + D_t p_e \Rightarrow R_d$$

Resumen de la argumentación de Walras

- $A1 : BM \Rightarrow IB$ (La búsqueda de maximizar la satisfacción lleva al intercambio de bienes para lograrla)
- $D1 : IB = (D_a \Rightarrow O_b \text{ y } O_a \Rightarrow D_b)$ (La oferta crea la demanda (Ley de Say))
- $D2 : R = BE$ (Definición de riqueza)
- $D3 : BE = UL$ (Definición de bienes intercambiables)
- $D4 : D = UL$ (Definición de la Demanda)
- $P1 : D_t = D_a + D_b + \dots + D_n$ (Hecho empírico)
- $P2 : D_a = F_a(p_a); \quad dD_a/dF_a(p_a) < 0$ (Ley tomada de Cournot)

- $C1 : D_a = O_b p_b$ y $O_a = D_b p_b$ (Por $A1$, $D1$ y $P2$)
- $C2 : D_t p_e \Rightarrow R_d$ (Por $P1$ y $C1$)
- $C3 : BM + D_t p_e \Rightarrow R_d$ (Por $A1$ y $C2$)

$C1$ significa que hay un Equilibrio en el que todos alcanzan el máximo beneficio que pueden obtener con lo que poseen inicialmente. No podría ser de otra forma, ya que la búsqueda del beneficio máximo provoca y guía el intercambio.

$C2$ significa que el principio de búsqueda de maximización de la satisfacción personal, que es un axioma implícito en Walras y equivalente a la racionalidad individual de Cournot, hace que los individuos realicen intercambios ventajosos para cada uno y de esa forma determinen el precio y la cantidad demandada de cada bien. Eso determina el nivel del comercio y, consecuentemente, de la Riqueza.

Precisar y desarrollar estas ideas llevó a la prueba de la existencia matemática del equilibrio walrasiano por parte de Arrow y Debreu (1954) e, incluso, a reconstrucciones lógicas como la de Balzer (1982), por mencionar sólo unos ejemplos. Habría que aclarar que todas las reconstrucciones lógicas que conozco difieren de la que aquí presento porque aquellas están interesadas en la formulación matemática más acabada del equilibrio a partir de las decisiones individuales de intercambio; mientras que yo intento recoger la secuencia lógica de las afirmaciones de Walras que le sirven de sustento a su incipiente formulación matemática.

3. Comparación lógica

SMITH	
Supuestos	
<i>A1</i>	<i>TT</i> es condición para <i>DT</i>
Definiciones	
<i>D1</i>	$R = PT$
<i>D2</i>	$DT = SO$
<i>D3</i>	
<i>D4</i>	
<i>D5</i>	
Hechos y premisas	
<i>P1</i>	$PT = f(PR); dPT/dPR > 0$
<i>P2</i>	$PR = f(DT); dPT/dDT > 0$
<i>P3</i>	$DT = f(M) + TT; dDT/dM > 0$
Consecuencias lógicas	
<i>C1</i>	$R = f(M) + TT; dR/dM > 0$
<i>C2</i>	
<i>C3</i>	$(\mathbf{TT} + \wedge\mathbf{M}) \Rightarrow \wedge\mathbf{R}$
<i>C4</i>	
<i>C5</i>	
<i>C6</i>	
<i>C7</i>	
<i>C8</i>	
<i>C9</i>	
<i>C10</i>	
<i>C11</i>	
En última instancia la Riqueza está determinada por:	$(\mathbf{TT} + \wedge\mathbf{M}) \Rightarrow \wedge\mathbf{R}$

	COURNOT	WALRAS
Supuestos		
<i>A1</i>	$RI \Rightarrow BM$	$BM \Rightarrow IB$
Definiciones		
<i>D1</i>	$R = VI$	$IB = (D_a \Rightarrow O_b \text{ y } O_a \Rightarrow D_b)$
<i>D2</i>	$R_d = VI \times p$	$R = BE$
<i>D3</i>	$VI = D$	$BE = UL$
<i>D4</i>	$D = V$	$UL = D$
<i>D5</i>	$D_c = D_1 + D_2 + \dots + D_n$	
Hechos o premisas		
<i>P1</i>	$I = V \times p$	$D_t = D_a + D_b + \dots + D_n$
<i>P2</i>	$D = F(p); dD/dp < 0$	$D = F(p); dD/dp < 0$
<i>P3</i>	$I_m = pF(p)$	
Consecuencias lógicas		
<i>C1</i>	$F(p) + pF'(p) = 0$	$D_a = O_b p_b; O_a = D_b p_b$
<i>C2</i>	$I_m = p_m F(p_m)$	$D_t p_e \Rightarrow R_d$
<i>C3</i>	$I_m = R_{dm}$	BM + $D_t p_e \Rightarrow R_d$
<i>C4</i>	$(\mathbf{RI} + \mathbf{F}(\mathbf{p}_m)) \Rightarrow \mathbf{R}_{dm}$	
<i>C5</i>	$p_c = f(D_c)$	
<i>C6</i>	$p_c = f(D_1 + D_2 + \dots + D_n)$	
<i>C7</i>	$I_c = (D_1 + D_2 + \dots + D_n) \times p_c$	
<i>C8</i>	$f(D_1 + D_2 + \dots + D_n) + D_1 f'(D_1 + D_2 + \dots + D_n) = 0$	
<i>C9</i>	$I_c = Df(D)$	
<i>C10</i>	$I_c = R_{dc}$	
<i>C11</i>	$(\mathbf{RI} + \mathbf{f}(\mathbf{D}_c)) \Rightarrow \mathbf{R}_{dc}$	
Riqueza det. por:	$(\mathbf{RI} + \mathbf{F}(\mathbf{p}_m)) \Rightarrow \mathbf{R}_{dm};$ $(\mathbf{RI} + \mathbf{f}(\mathbf{D}_c)) \Rightarrow \mathbf{R}_{dc}$	BM + $D_t p_e \Rightarrow R_d$

Cuadro 1. Comparación lógica de las tres teorías

Como podemos ver en el cuadro anterior, con el objeto de poder hacer la comparación redujimos las tres propuestas a su estructura lógica. A par-

tir de ese terreno común, podemos constatar que se trata de tres teorías diferentes; aunque dos de ellas muy cercanas: la de Cournot y la de Walras.

El objetivo de las tres teorías es muy similar: mientras que Smith intenta explicar cuáles son las causas de que unas naciones sean más ricas que otras; Cournot y Walras intentan explicar las causas que determinan el nivel de la riqueza que se produce y se intercambia en un momento y nación determinadas. No obstante, para Smith las causas últimas de la riqueza de una nación son la tendencia natural al trueque y la extensión del mercado que permite hacer una más eficiente división del trabajo; mientras que para Cournot y Walras, habiendo adoptado un punto de vista subjetivo, las causantes últimas de la riqueza que produce e intercambia una sociedad son las decisiones de los agentes racionales que intentan maximizar su utilidad. Para Cournot los principales agentes son los productores; mientras que para Walras son todos los individuos que intervienen en los intercambios de bienes y servicios en una sociedad determinada.

Una vez que se tienen las causas últimas y aquello que se quiere explicar, la argumentación de cada autor consiste en exponer la cadena causal que une las causas últimas con aquello que se intenta explicar. En esos términos, las conclusiones de la argumentación lógica presentadas en la tabla comparativa conforman la hipótesis de cada autor; es decir, la forma como explican la riqueza de las naciones. Veamos, pues, en la siguiente tabla las tres teorías de forma inversa a su secuencia lógica; es decir, poniendo primero la conclusión, o ley propuesta, y después su argumentación y sus evidencias.

SMITH	COURNOT
Hipótesis	
* $(TT + \wedge M) \Rightarrow \wedge R$ (i)	* $(RI + F(p_m)) \Rightarrow R_{dm}$ * $(RI + f(D_c)) \Rightarrow R_{dc}$ (ii)
Argumentos	
* TT es condición para DT * $TT + \wedge M \Rightarrow \wedge DT$ * $\wedge DT \Rightarrow \wedge PR \Rightarrow \wedge R$ (iii)	* $RI \Rightarrow BM$ * $I = pD; D = F(p)$ * $BM \Rightarrow F' = F(p) + pF'(p) = 0$ * $(F(p) + pF'(p) = 0) \Rightarrow p_e$ * $P_e \Rightarrow D \Rightarrow R$ (iv)
Evidencias	
(v)	(vi)

WALRAS
Hipótesis
* $BM + D_t p_e \Rightarrow R_d$ (vii)
Argumentos
* $IB = (D_a \Rightarrow O_b \text{ y } O_a \Rightarrow D_b)$ * $BM \Rightarrow (D_a = O_b p_b \text{ y } O_a = D_b p_b) \Rightarrow D_t$ * $D_t = D_a + D_b + \dots + D_n = R$ (viii)
Evidencias
(ix)

Cuadro 2. Argumentación de los tres autores

i) La tendencia al trueque y la ampliación del mercado producen el incremento de la riqueza de una nación.

ii) El deseo de maximizar la utilidad de cada empresario que se enfrenta a una función de demanda determina la producción de riqueza de una sociedad.

iii) La tendencia al trueque produce la División del Trabajo; pero ésta está limitada por el tamaño del mercado. El aumento en la división del trabajo genera un aumento de la productividad y por consiguiente de la riqueza.

iv) La racionalidad individual hace que cada empresario busque obtener el máximo ingreso. Este depende del precio y de la demanda a la que se enfrenta. Por lo tanto, el precio que maximiza el ingreso, determina la producción y por lo tanto, la riqueza.

v) Las evidencias que proporciona Smith son de tipo histórico. Por ejemplo, dice que todas las primeras grandes civilizaciones, como Egipto y Mesopotamia, se desarrollaron por tener un gran río que facilitaba el comercio y, de esa forma, ampliaba el mercado.

vi) Cournot no presenta evidencias, pero la formulación matemática de su hipótesis permite realizar cálculos verificables. Permitiría saber, por ejemplo, si, como lo dice la teoría, en el monopolio el precio es superior y la producción es menor a cuando hay concurrencia de productores.

vii) La búsqueda de maximizar la satisfacción personal por parte de todos los individuos que intercambian bienes y servicios es lo que determina el nivel de riqueza de una sociedad.

viii) El deseo de maximizar la satisfacción personal, hace que los individuos intercambien bienes. Este enfrentamiento y la búsqueda de maximización determinan los precios así como las cantidades intercambiadas; y, por consiguiente, la riqueza.

ix) Walras presenta su obra en forma matemática pero imperfecta. Por ello, Arrow y Debreu le dieron a la tarea de probar la existencia matemática del equilibrio walrasiano. Con ello sólo se garantiza que dicho equilibrio es posible, no que realmente se dé.

4. Conclusiones

Como podemos ver, se trata, en rigor, de tres teorías; pero atendiendo a sus vínculos, podemos decir que son reducibles a dos: la de Smith (*S*) y la de Cournot-Walras (*CW*). Las teorías de Smith y de Cournot-Walras son

claramente diversas porque: *a)* parten de diferentes supuestos psicológicos (*TT* para *S*, y *BM* para *CW*); *b)* adoptan su propia definición de Riqueza ($R = \text{trabajo}$ para *S*, y $R = \text{bienes intercambiables}$ para *CW*); *c)* y llegan a conclusiones diferentes: para Smith, la causa de una mayor riqueza se debe a las dimensiones del mercado; mientras que para Cournot se debe a la competencia entre productores y Walras no da una explicación de por qué una sociedad produce una mayor riqueza que otra. Una diferencia en el nivel matemático es que, mientras Smith sólo puede expresarse mediante relaciones funcionales; tanto Cournot como Walras dan un paso más y presentan verdaderas ecuaciones que permiten su cálculo.

La intención de usar matemáticas por parte de Cournot-Walras los obligó, como lo confiesa Cournot (1838, pp. 23 y 24), a adoptar definiciones y axiomas susceptibles de formulación matemática; lo cual, al parecer, vino a determinar que crearan en realidad teorías diferentes a la de Smith. Por consiguiente, podemos decir que una matematización puede servir, como en los casos analizados aquí, para incrementar el conocimiento y no son solamente un adorno técnico.

Ahora bien, aunque hemos resaltado aquí las similitudes entre Cournot y Walras, habrá que decir que Cournot trabaja lo que se conoce como un equilibrio parcial; mientras que Walras trabaja con el equilibrio general.

Regresando a las inquietudes de Beed and Beed (2000) y Keynes (1936) con respecto al uso de las matemáticas en Economía, con base en los casos analizados aquí, podemos decir que el uso de las matemáticas es una herramienta de precisión y verificación de cualquier teoría; pero que, al exigir ciertas condiciones meramente formales, obliga en ocasiones a cambiar la teoría original. En esas condiciones, lo que habría que analizar es si dichos cambios se justifican empírica o conceptualmente; o si sólo crean un laberinto de símbolos pretensivos e inútiles, como dice Keynes. Tal vez, es más fácil medir el valor de mercado, que el valor trabajo; y por ello, Cournot y Walras adoptaron el primero. Pero, habría que preguntarse si esa forma de medir y conceptualizar la riqueza es la más adecuada. De igual manera, tal vez es más fácil trabajar matemáticamente la maximización de la utilidad que es conciente, que la tendencia al trueque que es inconsciente; y, por ello, Cournot y Walras adoptan la primera. Pero, habría que preguntarse tam-

bién, si las decisiones racionales explican mejor los fenómenos económicos, que ciertas tendencias naturales inconscientes. Keynes (1936), por cierto, se fue en esta última dirección. No pretendo dar aquí una respuesta a estas cuestiones; pero me gustaría apuntar que una matematización tiene ciertas ventajas prácticas indudables, pero también ciertas dificultades conceptuales.

La Microeconomía actual ha seguido el enfoque de Walras, al que incorporó la teoría de la demanda y el análisis del monopolio de Cournot; no obstante, no faltan las críticas al Principio de Racionalidad, que a varios teóricos les parece poco realista.

Así pues, una reconstrucción lógica aún incipiente como la que presento, creo que permite llevar las teorías a un terreno común en el cuál es más fácil ver sus semejanzas y diferencias. Viendo así las cosas, una teoría no es mejor que otra por estar matematizada; aunque sí la hace más contrastable. Lo que hace que una teoría sea una buena explicación de ciertos fenómenos es, justamente, que logre explicarlos con o sin matemáticas. Por otra parte, una formulación matemática es una buena matematización de cierta teoría siempre y cuando las exigencias del lenguaje matemático no la orillen a aceptar supuestos poco realistas.

Habría que aclarar que la matematización de una teoría no lleva forzosamente a modificar la teoría original, como sí fue el caso de las propuestas de Cournot y Walras. Tenemos, como ejemplos de lo contrario, las teorías de Newton (1687) precisada en su formulación matemática primeramente por McKinsey, Sugar y Suppes (1953), y posteriormente por parte de Sneed (1971); o la teoría de Walras (1874) también precisada en su formulación matemática inicialmente por parte de Wald (1936), y finalmente por parte de Arrow y Debreu (1954), quienes probaron la existencia del equilibrio competitivo apoyados en los trabajos de Von Neumann, Kakutani y Nash y en el teorema del punto fijo en los juegos finitos de n -personas. En ese sentido la matematización de Cournot está mejor lograda y, de hecho, “el origen del equilibrio de Nash puede trazarse al capítulo 7 de Cournot” (Debreu, 1959, p. ix); es decir a su tratamiento de la concurrencia de productores.

Ciertamente estos dos ejemplos de matematización parten de formulaciones matemáticas incipientes; mientras que Cournot y Walras parten

de una teoría no matematizada. No obstante, también podemos encontrar casos similares a los de Cournot y Walras que parten de teorías no matematizadas. Tales son los casos de matematización de la teoría económica de Keynes (1936) por parte de Hichs (1937), Modigliani (1944), Clower (1965), Roberts (1987), Cooper y John (1988), y Guesneri (2001), entre otros.

Recepción: 24/04/2013. Aceptación: 25/09/2013.

Referencias

- [1] Arrow, K., and Debreu, G. (1954). "Existence of Equilibrium for a competitive economy", *Econometrica*, número 22, páginas 265-290.
- [2] Balzer, W. (1982). "A logical reconstruction of pure exchange economics", *Erkenntnis*, número 17, páginas 23-46.
- [3] Beed, Clive, and Beed, Cara. (2000). "Intellectual progress and academic economics: rational choices and game theory." *Journal of Post Keynesian Economics*, volumen 22, número 2, páginas 163-186.
- [4] Clower, R. (1965). "The Keynesian Counterrevolution: A Theoretical Appraisal", in F.H. Hahn y F.P. Brechling (eds.), *The Theory of Interest Rates*. London: Macmillan.
- [5] Cooper, R. y John, A. (1988). "Coordinating Coordination Failures in Keynesian Models", *The Quarterly Journal of Economics*, número 103, páginas 441-64.
- [6] Cournot, Antoine-Augustin. (1838). *Investigaciones acerca de los principios matemáticos de la teoría de las riquezas*, versión española de Juan Carlos Zapatero. Madrid: Alianza Editorial, 1969.
- [7] Debreu, Gerard (1959). *Theory of Value*. London: Yale University Press

- [8] Hicks, J. R. (1937). “Mr. Keynes and the Classics: a suggested interpretation”, *Econometrica*, número 5, páginas 147-59.
- [9] Keynes, John Maynard. (1936). *The General Theory of Employment, Interest, and Money*. USA: Harcourt Brace & Company, 1991.
- [10] McKinsey, J.C., A. C. Sugar y P. Suppes. (1953). “Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics”, *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 2, no. 2.
- [11] Modigliani, F. (1944) “Liquidity preference and the theory of interest and money”. *Econometrica* January, 45-88.
- [12] Newton, Isaac. (1687). *Principios matemáticos de la filosofía natural y su sistema del mundo*. Edición de Antonio Escotado. Madrid: Editora Nacional, 1982.
- [13] Roberts, J. (1987). “An Equilibrium Model with Involuntary Unemployment at Flexible, Competitive prices and Wages”, *The American Economic Review*, número 77, páginas 856-874.
- [14] Smith, Adam. (1776). *Indagación acerca de la naturaleza y las causas de la riqueza de las naciones*. España: Aguilar Ediciones, 1961.
- [15] Sneed, J.D. (1971). *The Logical Structure of Mathematical Physics*. Dordrecht: Ed. Reidel.
- [16] Wald, A., (1936) “On some Systems of Equations of Mathematical Economics,” *Econometrica*, número 19, páginas 368-403.
- [17] Walras, Léon. (1874). *Elements of Pure Economics or the theory of Social Wealth*, traducido por William Jaffé. Philadelphia: Orion Editions, 1926.