PERSPECTIVAS *Revista de Análisis de Economía, Comercio y Negocios Internacionales*
Volumen 7 / No. 1 / enero - junio 2013 / 15 - 26
ISSN 2007-2104

Una aplicación del modelo de inspección de la teoría de juegos: el problema del alcoholímetro

Julio César Macías Ponce
Departamento de Matemáticas y Física, UAA
Aguascalientes, México
jlmacias@correo.uaa.mx

Tania Vanessa Rosales López
Departamento de Matemáticas y Física, UAA
Aguascalientes, México
taniavrosales@gmail.com

Resumen

En este trabajo[1] resolveremos un problema de inspección que consta de dos entidades, un ciudadano alcoholizado y el municipio. El ciudadano tiene dos opciones: tomar taxi o manejar su auto, mientras que el municipio puede implementar o no el alcoholímetro. Encontraremos la estrategia óptima para el ciudadano y el municipio, usando el equilibrio de Nash.

Palabras clave: Juegos no cooperativos, equilibrio de Nash, problema de inspección.
Clasificación JEL: C72.

Abstract

In this paper we solved an inspection problem of two agents: A drunk driver and the police traffic manager. In our model, the driver has two options for returning to his home: To take a taxi or to drive his car; the options of the police traffic

[1]Los autores agradecen las correcciones y los comentarios realizados a este trabajo por Luis Fernando Martínez Alvarez.

manager are to implement or not the breathalyzer. We model this situation as a non-cooperative game and we find the optimal strategy for the driver and the manager using the Nash equilibrium concept.

Keywords: Non-cooperative games, Nash equilibrium, inspection problem.
JEL classification: C72

1. Introducción

Un problema de inspección[2] consiste de dos entes, el trabajador y el jefe. El primero tiene dos opciones: trabajar adecuadamente o incurrir en actividades ilícitas, el segundo puede o no inspeccionar al primero. Las utilidades del trabajador varían acorde a la decisión que tome y a la probabilidad de ser inspeccionado, el jefe a su vez incurre en un costo de inspección si decide hacerlo, pero también en un costo de posible pérdida si el trabajador actúa incorrectamente. En este tipo de problema se busca la estrategia óptima para el trabajador y el jefe.

Por ejemplo en [4] Tsebelis define un juego de inspección básico, en particular supone que existen potenciales infractores que mediante una multa se desincentivan para cometer la falta, sin embargo también se generan costos para la aplicación de una multa; de manera similar nosotros definimos un problema particular de inspección: "El problema del alcoholímetro", cuyo contexto es el siguiente:

En un fin de semana cualquiera, un ciudadano decide ir a divertirse a un centro nocturno. A su salida el ciudadano en estado de ebriedad tiene dos opciones: tomar taxi o manejar su auto, mientras que el municipio tiene también dos opciones, implementar o no el alcoholímetro.

En la sección 2, describimos los conceptos básicos de teoría de juegos en forma normal y presentamos el modelo matemático para nuestro problema particular del alcoholímetro y en la sección 3 solucionamos el juego del problema del alcoholímetro, ahí describimos las diferentes soluciones obtenidas,

[2] En [1] se presenta el problema general de inspección.

en la última sección hacemos un resumen de las soluciones obtenidas así como la interpretación de estas.

2. Preliminares

En esta sección describimos el modelo matemático. Primero definimos y denotamos conceptos para el desarrollo del trabajo:

2.1. Juegos en forma normal

Los elementos que describen un juego G en forma normal son:

- Un conjunto de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$.
- Un conjunto de acciones o estrategias posibles S_i para cada jugador $i \in N$.
- Una función de utilidad (esperada) sobre los perfiles de acciones posibles:

$$(s_1, \ldots, s_n) \in S = S_1 \times \cdots \times S_n$$

$$u_i : S \to R, \quad \text{para cada jugador } i \in N$$

Así, un juego en forma normal está descrito por una terna (N, S, u).

El concepto de equilibrio de Nash identifica los perfiles de estrategias que son estables, en el sentido de que ningún jugador quiera desviarse, si espera que los demás adopten las acciones que se prescribe para ellos. El equilibrio de Nash indica el desenlace predecible del juego y puede interpretarse como un "acuerdo" o una "norma" que tiene la propiedad de que es autosostenible: una vez aceptado, ningún jugador tiene incentivos para modificarlo unilateralmente. Otra interpretación interesante contempla al concepto de equilibrio de Nash como perfil de expectativas que se"autoconfirman", en el sentido de que si los jugadores esperan que los demás se comporten de acuerdo con lo prescrito, entonces, estas acciones ocurren como consecuencia de la conducta óptima de los jugadores; es decir, las expectativas de los jugadores son "racionales" porque son consistentes con la conducta racional.

En un juego de dos jugadores en su forma normal $G = \{\{1,2\}, S_1 \times S_2, (u_1, u_2)\}$, las estrategias mixtas (p_1^*, p_2^*)[3] son un equilibrio de Nash si la estrategia mixta de cada jugador es la mejor respuesta a la estrategia mixta del otro jugador; es decir, se debe de cumplir que:

$$u_1(p_1^*, p_2^*) \geq u_1(p_1, p_2^*)$$

para cada distribución de probabilidad p_1 sobre S_1 y

$$u_2(p_1^*, p_2^*) \geq u_1(p_1^*, p_2)$$

para cada distribución de probabilidad p_2 sobre S_2.

2.2. Modelo matemático para el problema del alcoholímetro

Ahora describimos el modelo matemático del problema del alcoholímetro, la notación que damos a continuación será empleada en las secciones subsecuentes.

- x : Cuota del taxi.
- y : Costo (por ciudadano) de implementar el alcoholímetro.
- M : Multa por manejar en estado de ebriedad.
- A : Costo del accidente para el conductor alcoholizado.
- P : Probabilidad de accidentarse el ciudadano manejando en estado de ebriedad.
- B : Costo del accidente para el municipio.

[3] p_i es una distribución de probabilidad sobre S_i.

- $P \cdot A$: Costo esperado del accidente para el individuo alcoholizado. Para simplificar escribiremos simplemente PA.
- $P \cdot B$: Costo esperado del accidente para el municipio. Para simplificar escribiremos simplemente PB.
- α : Probabilidad de que el ciudadano tome taxi (frecuencia o proporción con que se usa taxi).
- β : Probabilidad de que el municipio implemente el alcoholímetro.

3. Solución del problema del alcoholímetro

Presentamos ahora el procedimiento de solución para nuestro problema, en particular describimos las estrategias que deben seguir cada uno de los jugadores (para el ciudadano alcoholizado y el municipio), en [2] se describen los procedimientos para encontrar equilibrios de Nash para juegos bipersonales de suma no constante (como el del problema del alcoholímetro).

Así entonces, tenemos siguiente matriz de recompensas:

		MUNICIPIO	
CIUDADANO		INSPECCIONAR	NO INSPECCIONAR
	TAXI	$(-x,-y)$	$(-x,0)$
	MANEJAR	$(-M,M-y)$	$(-PA,-PB)$

3.1. Estrategia $(\alpha, 1-\alpha)$ para el ciudadano alcoholizado

Supongamos que el ciudadano alcoholizado toma taxi con probabilidad α y con probabilidad $1-\alpha$ maneja su auto, de aquí en adelante diremos que su estrategia es $(\alpha, 1-\alpha)$.

La esperanza de recompensa del municipio si decide inspeccionar es $-\alpha y+(1-\alpha)(M-y)$. Pero si decide no inspeccionar, entonces la recompensa esperada sería $-(1-\alpha)PB = -PB + \alpha PB$.

Como $-\alpha y+(1-\alpha)(M-y) = -\alpha y+M-y-\alpha M+\alpha y = M-y-\alpha M$, observemos que:

$$M - y - \alpha M > -PB + \alpha PB$$
$$\Leftrightarrow M - y + PB > \alpha M + \alpha PB$$
$$\Leftrightarrow M - y + PB > \alpha(M + PB)$$

Por tanto obtenemos lo siguiente:

i) Si $\frac{(M-y+PB)}{(M+PB)} > \alpha$, entonces el municipio prefiere inspeccionar (la recompensa esperada por inspeccionar es mayor).

ii) Si $\frac{(M-y+PB)}{(M+PB)} < \alpha$, entonces el municipio prefiere no inspeccionar (la recompensa esperada por no inspeccionar es mayor).

Una representación gráfica sería:

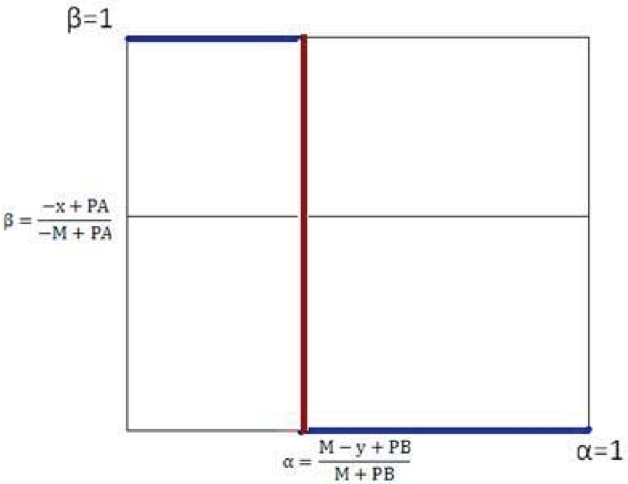

Figura 1

Nota: Observe que en la línea horizontal $\left(\alpha = \frac{M-y+PB}{M+PB}\right)$ es indiferente para el municipio.

3.2. Estrategia $(\beta, 1-\beta)$ para el municipio

El municipio decide inspeccionar con una probabilidad β por tanto $(1-\beta)$ es la probabilidad de no implementar el alcoholímetro, diremos pues que la estrategia del municipio es $(\beta, 1-\beta)$.

Tenemos que las recompensas para el ciudadano están dadas de la siguiente manera: si el ciudadano toma taxi $-x\beta+(-x)(1-\beta)$; y la siguiente si maneja $-M\beta - PA(1-\beta)$.

Aquí es necesario considerar dos casos, uno en el que el costo esperado del accidente es mayor que la multa $(PA > M)$ y el segundo es el caso contrario $(PA < M)$.

Caso 1 $(PA > M)$

En esta situación tenemos:

$$\begin{aligned} -x\beta + (-x)(1-\beta) &= -x \\ &y \\ -M\beta - PA(1-\beta) &= -M\beta - PA + \beta PA = \beta(-M+PA) - PA \end{aligned}$$

Entonces

$$-x > \beta(-M+PA) - PA \Leftrightarrow -x + PA > \beta(-M+PA)$$

Por lo tanto:

i) *Si* $\frac{(-x+PA)}{(-M+PA)} > \beta$, *el ciudadano debe tomar taxi (la recompensa es mayor si toma taxi).*

ii) *Si* $\frac{(-x+PA)}{(-M+PA)} < \beta$, *entonces el ciudadano prefiere manejar (la recompensa es mayor si no toma taxi).*

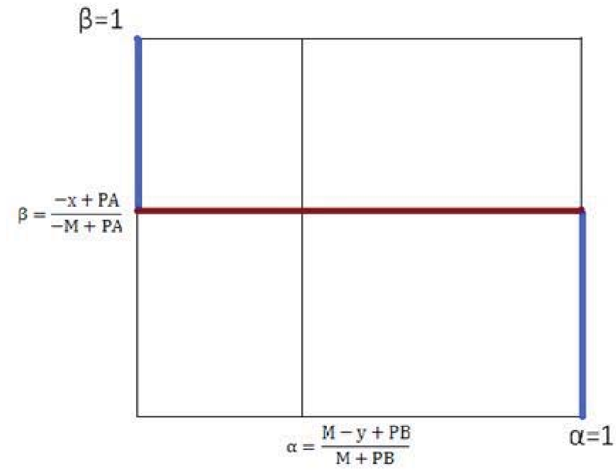

Figura 2

Nuevamente tenemos una "línea de indiferencia". Juntando las dos gráficas anteriores, obtendremos:

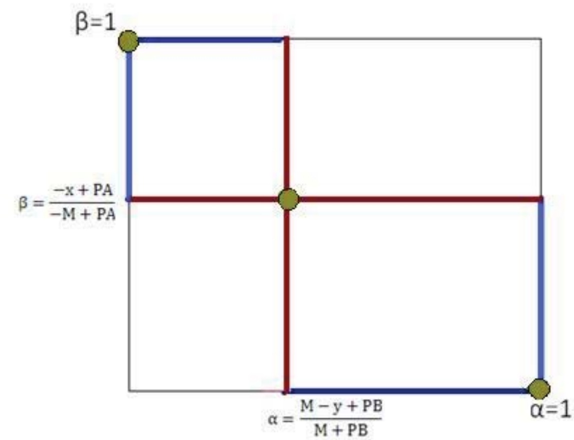

Figura 3

Ahora bien, si el monto de la multa es mayor a la tarifa de taxi $(M > x)$, *entonces* $\frac{-x+PA}{-M+PA} > 1$, *lo que indica que no importa con qué probabilidad el municipio inspeccione, el ciudadano siempre tomará taxi. Gráficamente tendríamos:*

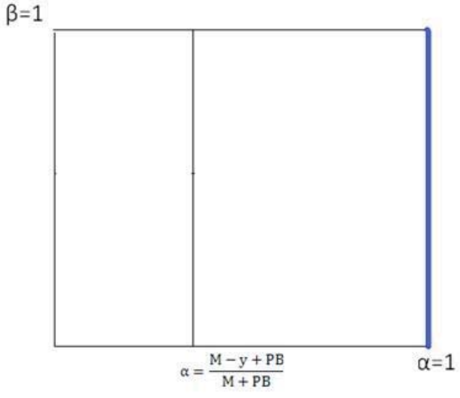

Figura 4

Si conjuntamos la Figura 2 y la Figura 4 obtenemos lo siguiente:

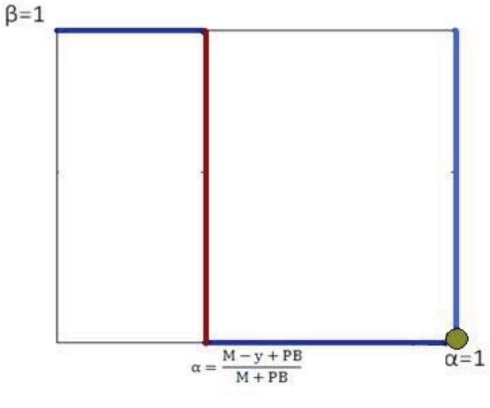

Figura 5

Caso 2 $(PA < M)$

Para esta situación, el monto esperado por el accidente del ciudadano alcoholizado es menor que la multa, luego tenemos las desigualdades invertidas (con respecto al caso 1).

i) *Si* $\frac{-x+PA}{-M+PA} < \beta$*, el individuo alcoholizado prefiere tomar taxi.*

ii) *Si* $\frac{-x+PA}{M+PA} > \beta$*, el ciudadano decidiría manejar su auto en lugar de tomar taxi.*

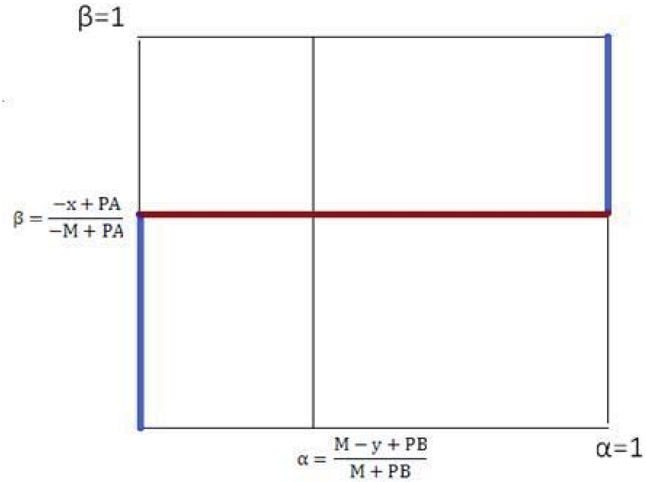

Figura 6

Juntando las gráficas de las estrategias obtenemos la siguiente figura:

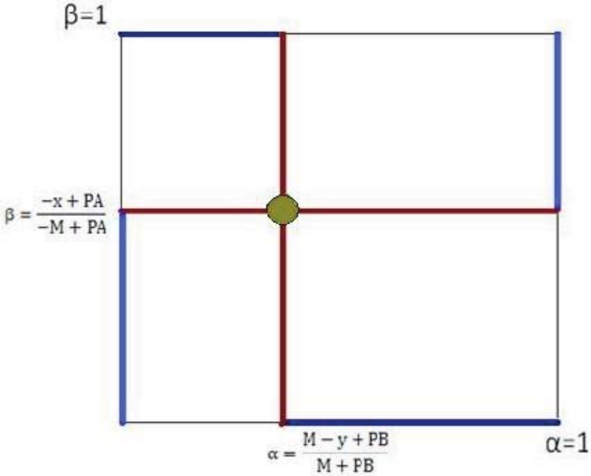

Figura 7

4. Conclusiones

A manera de conclusión, listamos e interpretamos cada una de las soluciones obtenidas en nuestro trabajo.

- Mientras el monto del costo esperado de un accidente para el ciudadano sea mayor que la multa y esta a su vez sea mayor que la tarifa de taxi, la solución de equilibrio de Nash indica que el ciudadano siempre toma taxi y el municipio nunca inspecciona[4] (Figura 5).

- Si la tarifa de taxi es más alta que la multa (manteniéndose la relación $PA > M$), entonces existen dos equilibrios de Nash más (Figura 3):

  a) El ciudadano toma taxi con probabilidad (o frecuencia) de $\frac{M-y+PB}{M+PB}$

[4] Sería lo ideal en una sociedad civilizada, "El ciudadano toma taxi y el municipio no inspecciona".

y el municipio inspecciona con probabilidad de $\frac{-x+PA}{-M+PA}$. (Figura 3).

b) El ciudadano siempre maneja en estado de ebriedad y el municipio siempre inspecciona.

- Por otra parte, si la multa es mayor que el monto del costo esperado por un accidente, entonces $\alpha = \frac{M-y+PB}{M+PB}$ y $\beta = \frac{-x+PA}{-M+PA}$ es el único equilibrio de Nash (Figura 7).

Recepción: 27/11/2012. Aceptación: 05/02/2013.

Referencias

[1] Fernández J. (2002), *Teoría de juegos: su aplicación en economía.* El colegio de México, Ciudad de México, México.

[2] Gibbons R. (1992), *Game theory for applied economists*. Princeton University Press, New Jersey, U.S.A.

[3] John F. Nash, (1996), *Essays on Game Theory*. Edward Edgar Publishing Inc., Cheltenham, U.K.

[4] Tsebelis, G. (1990) "Penalty has no Impact on Crime: A Game-Theoretic Analysis", Rationality and Society vol. 2 no. 3, paginas 255-286.