Índice general

Formación de precios y bienestar social en condiciones de existencia de poder de mercado e información imperfecta

Elvio Accinelli [1]

[1]Facultad de Economía de la Universidad Autónoma de San Lui Potosí. E-mail: elvio.accinelli@eco.uaslp.mx. El capítulo 10 de este libro, ha sido escrito por Edgar Carrera.

Prefacio

En condiciones de competencia perfecta, todos los consumidores y productores son considerados tomadores de precios. Estos encuentran los precios dados y no existen comportamientos estratégicos. No obstante, este supuesto puede no ser bueno cuando en el mercado hay sólo un pequeño grupo de agentes. Estos agentes tendrán *poder de mercado* y por lo tanto podrán desarrollar estrategias que les permitan fijar precios por encima de los competitivos. Parecen razonables las dudas que el propio Adam Smith planteaba respecto de las posibilidades de funcionamiento de un mercado competitivo. La economía de mercado genera muchas veces incentivos a que los agentes se comporten en forma estratégica, no competitiva. En tanto que maximizadora de beneficios, la firma prefiere ser monopolista a competitiva. Preferirá fijar precios a tomarlos como parámetros, conseguir este objetivo dependerá de las condiciones del mercado y de su capacidad estratégica.

El supuesto del comportamiento competitivo de la firmas, expresado en que éstas maximizan beneficios, supone tanto que los precios están dados y son independientes de la acción elegida por cada una de ellas, como que los objetivos del gerente y del propietario de la firma coinciden.

La teoría económica moderna discute estos dos supuestos: el de la existencia de condiciones de mercado que aseguren la competencia perfecta por un lado, y por el otro el de la igualdad de intereses del propietario y el gerente de la firma. El primero de ellos se basa en el estudio de la existencia de poder de mercado (comportamiento monopólico) y el segundo en el llamado problema del agente y el principal, o más en general de la información imperfecta. Los intereses de los gerentes y de los propietarios de las firmas pueden no coincidir, la existencia de información imperfecta puede aparejar perjuicio moral para el propietario. Ambos temas son de igual importancia en la teoría económica moderna. No obstante, en este trabajo, por entenderlo más básico, abordaremos con mayor amplitud, el primero de los dos temas mencionados. El segundo tema adquiere cada vez más relevancia en la teoría económica moderna, no obstante no dedicaremos en este trabajo más que un capítulo (y así mismo, introductorio). Su consideración rigurosa, supone un conocimiento importante por parte del lector de la teoría de las probabilidades, lo que no es prerrequisito para la comprensión del presente material.

Diferentes situaciones pueden llevar a la existencia de agentes con poder de mercado. En principio estas condiciones pueden plantearse tanto desde el lado de la producción (oligopolios) como desde el lado de los consumidores (monopsonios). Ciertos elementos estructurales del mercado pueden facilitar el comportamiento estratégico de los agentes económicos. Como por ejemplo, una determinada configuración de la demanda acompañada de un cierto tipo de tecnología que haga posible que sólo un pequeño número de empresas puedan obtener costos medios reducidos, ventajas para la obtención de materias primas o bien, la existencia de patentes que protejan determinado tipo de tecnologías. Por otra parte siempre está presente la posibilidad de que las empresas prefieran ponerse de acuerdo para repartirse el mercado, antes que envolverse en una lucha competitiva.

En este trabajo nos concentraremos solamente en algunos tópicos específicos de la teoría económica moderna, relacionados con los cambios de las condiciones de mercado, su repercusión en el bienestar social y formas de medirlas. No pretendemos agotar la temática, y nos concentraremos en aquellos puntos que creemos menos conocidos de la teoría y más polémicos en la realidad actual. Otros, si bien necesarios para la comprensión del tema, los trataremos pero sólo lo imprescindible, recomendando al lector que pueda no conocerlos, la lectura de textos de microeconomía moderna, en los que existe una amplia información. Discutiremos en la primera sección (capítulos 1 al 5 inclusive), el proceso de formación de los precios bajo condiciones no competitivas y analizaremos las repercusiones en el bienestar de la sociedad de diferentes formas de fijar los precios.

La necesidad de regulación aparece como respuesta a las distorsiones propias de cualquier situación no competitiva. Distorsiones que, en algunos casos, implican ineficiencia paretiana y en otros que si bien no conllevan ineficiencia, suponen la apropiación de cantidades de excedente social en función de asimetrías o poder de mercado. Analizaremos la posibilidad de regular a las firmas monopólicas, y discutiremos las posibles alternativas bajo la perspectiva de mejorar la ineficiencia que la existencia del monopolio implica, sin introducir criterios de justicia distributiva; no porque ellos no tengan importancia sino porque su introducción supone escaparnos del objetivo del presente trabajo.

Clásicamente se muestra que la existencia de oligopolios o monopolios (un único agente productor) tiene efectos negativos en el bienesar social. Básicamente, este argumento se apoya en la pérdida del excedente de mercado para el consumidor que el monopolio implica. El enfoque marshaliano nos permitirá medir la pérdida en el bienestar social, que la distorsión introducida por el monopolio conlleva. La medida de esta pérdida, se basa en la diferencia entre los excedentes agregados producido por el mercado en el caso competitivo y en el caso monopolista. En contrapartida algunos autores, como [Williamson, O.E.], explican que el monopolio se sostiene gracias a la existencia de ventajas tecnológicas posibles para una empresa monopolista. Las que redundan en la disminución de los costos, por lo que la pérdida de bienestar (al menos para el consumidor) que el monopolio implica, se vería reducida. Solamente en el caso en que el monopolio se mantenga sin ayuda de privilegios de ningún tipo, es decir cuando se trata del caso de un *monopolio natural*, tiene sentido la pregunta de si la intervención de un regulador puede aminorar la ineficiencia o no. Si bien la respuesta es afirmativa, debe tenerse especial cuidado en analizar las formas de esta intervención y las condiciones de mercado que hacen que ésta sea posible. Está claro que, si se desea evitar la ineficiencia de un monopolio basado en privilegios o trabas legales, bastaría abolirlas.

Por otra parte es necesario destacar que situaciones en las que puede ejercerse plenamente el poder de mercado, pueden llevar a asignaciones eficientes sin intervención de ningún tipo, pero en general esta posibilidad va acompañada de la transferencia total o parcial, del excedente del consumidor al monopolista. En estos casos, la eficiencia, lejos de significar menores beneficios para el monopolista, en general implica un incremento de estos. No obstante, como contrapartida, esto proceso puede verse acompañado de mejoras para los consumidores, como veremos más adelante. Discutiremos aquí este resultado y analizaremos condiciones bajo las cuales puede ser posible que la regulación conlleve efectos perversos para el bienestar.

A continuación presentaremos el enfoque de la teoría de juegos para el caso de ramas oligopólicas, la formación de coalisiones y acuerdos tácitos. Analizaremos también la ineficiencia como resultado de la existencia de asimetrías en la información.

Dedicaremos el capítulo 6 a estudiar las distorsiones, respecto a la asignación de equilibrio, que la asimetría en la información comporta. No obstante, como ya fue señalado, el tema está lejos de agotarse con lo dicho en este capítulo. Nos enfcaremos finalmente, capítulos 8 en adelante, en las repercusiones en el bienestar de los agentes económicos individuales, de los cambios en el nivel de precios. Junto con los precios, varía el valor de la riqueza inicial de cada agente económico. Esto supone modificaciones en su demanda y consecuentemente en los niveles de bienestar alcanzados por cada uno de estos agentes. Cambios que pueden ser producidos directamente por la variación en el precio de un determinado bien, o por la consecuente variación de la riqueza de cada agente, que los cambios de precios de los bienes implica. Introduciremos una serie de herramientas que nos permitan medir esta variación en el nivel del bienestar de cada uno de los agentes, y finalmente, un índice para medir el bienestar social agregado del conjunto de la economía, al que hemos llamado Indice de Negishi. Vale la advertencia de que mucho de lo que se dirá en esta sección forma parte de trabajos de investigación más recientes del autor de estas notas, por lo que los resultados son aún parciales e incompletos. No obstante parecen ser de interés para el estudio de la relación entre bienestar social, bienestar individual de los agentes económicos y equilibrios walrasianos, por lo cual ha decidido incluirlos.

El texto está dirigido a un amplio público y su nivel corresponde al de una maestría en teoría económica, sobre todo a interesados en la repercusión de las imperfecciones de mercado en el bienestar social y en el mejoramiento del mismo.

Colaboradores

El texto se escribe sobre la base de los cursos dictados por Elvio Accinelli en la Universidad Nacional de San Luis, República Argentina y en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México. Quiero agradecer a Luis Quintas quien me ha alentado y apoyado en la elaboración del material que aquí se ofrece. He contado con la participación de Edgar Carrera, quien colaboró en la elaboración el capítulo 6 de este texto. Así como con la de Ricardo Hernández Medina quien participó en la elaboración de las figuras que ayudan a la comprensión del texto correspondiente. Los errores subyacentes son responsabilidad de la práctica obstinada del autor, y a nadie más debe culparse por ellos.

A mi esposa María del Huerto Bettini, quien además de ser incansable colaboradora, ha tenido la paciencia hacer la corrección ortográfica de infinitas versiones de este trabajo.

Agradecimientos

El autor desea agradecer a la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, y en particular a su Director, Lic. David Vega, por el apoyo y estímulo permanente para la edición de este libro. Apoyo que no es ajeno a su decisión de impulsar en México y en particular en las universidades públicas el estudio y la investigación en la teoría económica, tema con el cual dichas instituciones tienen aún una gran deuda. Este esfuerzo es de un gran valor intelectual y precisa muchas veces de una gran voluntad, ya que lamentablemente resulta ser aún insuficiente la comprensión en los medios académicos, (y particularmente en aquellos relacionados con las universidades públicas), de la importancia de la teoría económica, para el crecimiento y el bienestar social. Incomprensión esta que se hace extensiva en gran medida a los demás países latino americanos.

También deseo agradecer a los integrantes del Cuerpo Académico de Análisis Microeconómico, de la Facultad de Economía de la UASLP, en especial a Leobardo Plata por el permamente intercambio de ideas y pareceres sobre al enseñanza y la investigación en teoría económica en las universidades públicas de México.

Deseo también hacer explícito, mi reconocimiento siempre implícito, a Pedro Uribe, pionero en la investigación en teoría económica en México y fundador de uno de los mejores grupos de trabajo con los que he tenido posibilidad de interactuar y aprender.

Mayo de 2010.
San Luis Potosí, México.

Capítulo 1

Formación de precios monopolistas

En general, el hecho de que en un mercado, pueda una empresa en forma duradera, alcanzar beneficios extraordinarios, es un síntoma de que la competencia se encuentra impedida o dificultada. De otra forma, la entrada de capitales, que se produciría, llevaría al mercado a sus niveles competitivos. Esto parece ser un hecho habitual en nuestros días, en numerosas ramas de la producción actúan pocas firmas, esto supone que su presencia en el mercado sea determinante en la oferta de bienes y en los precios que la sociedad deberá pagar por estos bienes. Las firmas que actúan en estas ramas, donde la libre concurrencia se ve impedida, dejan de ser "tomadoras de precios" (como se asume en el caso de libre concurrencia) y más bien se convierten en *hacedoras* de precios, ellas pueden determinar precios y cantidades y esto les otorga beneficios extraordinarios. Se dice que son firmas con poder de mercado. Esto es precisamente lo que sucede en los casos en que una empresa se mantiene como monopolista, es decir como la única firma que produce determinado tipo de bien, o en aquellos casos en el que relativamente pocas firmas actúan en el mercado. Analizaremos en este capítulo los efectos de la existencia del poder de mercado, cuando es ejercido por una única firma, sobre el bienestar social, sus causas y las posibilidades de evitar que este poder se convierta en una extraordinaria posibilidad de incremento en la desigualdad distributiva a favor de quienes pueden ejercerlo, y en contra del resto de la sociedad (esto será el centro del siguiente capítulo). Entendemos como situación óptima (tal vez ideal) aquella en la que existe competencia perfecta, o libre concurrencia, al menos en el sentido de que ésta asegura la eficiencia Paretiana. No obstante, nuestro análisis será crítico, en el sentido de que consideraremos diversas consecuencias, algunas socialmente deseables de la existencia de poder de mercado Analizaremos las causas que hacen posible el mantenimiento de esta situación de privilegio, aún sin la existencia de leyes que la amparen.

1.1 Un precio homogéneo de monopolio

Comenzaremos esta sección con el estudio del comportamiento de un monopolista que busca maximizar su función de beneficios. La referencia básica para esta sección es [Mas-Colell, A. Whinston, M. Green J.]. Asumimos como conocida por el monopolista la demanda por su producto, la cual es función del precio. Representaremos por $x(p)$ a la cantidad demandada del bien al precio p. Asumiremos que la demanda es una función continua, cuasicóncava y decreciente del precio y definida para todo $p \geq 0$. Además, $x(p) \geq 0 \ \forall p \geq 0$ y supondremos también la existencia de $\bar{p} < \infty$ tal que para todo $p \geq \bar{p}, \ x(p) = 0$. El costo para producir una cantidad q del producto en cuestión, se representará por $c(q)$, se asume ser una función dos veces derivable, convexa y definida para todo $q > 0$.

El problema del monopolista en estas condiciones será:

$$Max_{p \geq 0} \, px(p) - c(x(p)) \tag{1.1}$$

Usaremos una formulación equivalente, más conveniente para este problema, pensando en un monopolista que elige cantidades a producir, a las que representaremos por q. Para esto escribiremos la función inversa de la demanda $p(\cdot) = x^{-1}(\cdot)$ usando esta formulación el problema (1.1) puede escribirse en la forma:

$$Max_{q \geq 0}\, p(q)q - c(q), \tag{1.2}$$

Obsérvese que a diferencia del caso de competencia perfecta, aquí el precio del bien no está dado, sino que depende de la cantidad que el monopolista elija en función de su propio bienestar. Este es el punto central de toda la discusión posterior.

Asumiremos en lo que sigue que tanto $p(\cdot)$ como $c(\cdot)$ son funciones dos veces diferenciables para todo $q \geq 0$ y que $p(0) > c'(0)$. Suponemos también la existencia de un único producto q_s socialmente óptimo para el que $p(q_s) = c'(q_s)$.

En las condiciones preestablecidas la solución de este problema puede obtenerse a partir de las condiciones de primer orden,[1] para la óptima del monopolista q_m se tiene que:

$$p'(q_m)q_m + p(q_m) \leq c'(q_m), \text{con igualdad si } \ q_m > 0. \tag{1.3}$$

El término de la izquierda de la inecuación anterior es conocido como como el ingreso (o la renta) marginal .

Bajo la condición asumida de $p(0) > c'(0)$ la desigualdad (1.3) se satisface para valores $q_m > 0$ por lo tanto se sigue que la oferta óptima del monopolista, verifica la igualdad

$$p'(q_m)q_m + p(q_m) = c'(q_m). \tag{1.4}$$

[1]El hecho de que q_m satisfaga las condiciones de primer orden depende de que la concavidad de la función objetivo en el intervalo $[0, q^0]$. La concavidad en este caso no se sigue sólo de la convexidad supuesta de la función de costos, también depende de la concavidad de la función inversa de la demanda. Esta condición puede en muchos casos no cumplirse, en definitiva esto depende de las características de la demanda como función de los precios. Asumirla cuasicóncava de aquí en más nos evita volver a este problema cada vez.

Para el caso típico $p'(q) < 0$ para todo $q > 0$ por lo que para q_m se cumple que $p(q_m) > c'(q_m)$ por lo que el precio en las condiciones de monopolio excede el óptimo social, consecuentemente la cantidad monopolista q_m es menor que la que se produciría en condiciones de competencia perfecta: q_s.

1.2 Ineficiencia y pérdida bienestar social

La pérdida de bienestar producida por la distorsión provocada por el término $p'(q_m)q_m$ es conocida como la *pérdida por el peso muerto del monopolio (PMM)*. Esta pérdida puede ser medida en términos marshalianos:

$$\int_{q_m}^{q_s} [p(q) - c'(q)]dq > 0. \tag{1.5}$$

Este valor corresponde al área comprendida entre las funciones $p(q)$ decreciente con q y $c'(q)$ creciente, limitado por las rectas paralelas al eje de las ordenadas q_m y q_s. Donde q_m se obtiene por el corte de $p(q)+p'(q)q$ y $c'(q)$ mientras que, q_s se obtiene a partir del corte de $p(q)$ y $c'(q)$, siendo que $p(q) + p'(q)q < p(q)$ se sigue que $q_m < q_s$.

La ineficiencia del monopolio se mide precisamente por esta pérdida en el bienestar social agregado. La ineficiencia paretiana del monopolio, radica en que es posible mejorar el bienestar tanto del monopolista como el de los consumidores, sin que esto implique pérdida de bienestar para nadie. Basta para convencerse de esto, la observación de que, bajo las leyes de la producción monopolística, existen consumidores, dispuestos a pagar al monopolista, por una unidad adicional de su producto, un precio que si bien es inferior al por él establecido, es superior a su costo marginal. Producción ésta, que, en caso de realizarse, traería aparejados beneficios tanto al monopolista como al consumidor que está dispuesto a pagar este precio por una unidad adicional, pero no al precio que el monopolista fija inicialmente. Ciertamente que, poder hacer esto, supone que el monopolista puede discriminar, aunque sea mínimamente, entre la disposición a pagar por parte de los diferentes consumidores.

Equivalentemente, el monopolio supone una pérdida en el excedente creado por el intercambio de bienes, es decir en la suma del excedente del consumidor más el excedente del productor, respecto a la misma suma en el caso de competencia perfecta. Lo que se representa por la inecuación $(CS_s + PS_s) > (CS_m + PS_m)$. La diferencia entre estas dos sumas es precisamente el peso muerto del monoplio $(CS_s+PS_s)-(CS_m+PS_m) = PMM > 0$. El valor CS_s corresponde al excedente del consumidor en el caso de competencia perfecta y se representa por el área comprendida entre la curva inversa de la demanda $p(q)$ y la recta correspondiente al precio de competencia $p(q_s)$. Es decir $CS_s = \int_0^{q_s}[p(q) - p(q_s)]dq$. Mientras que el excedente del productor en el caso competitivo $PS_s = \int_0^{q_s}[p(q_s) - c'(q)]dq$. Los valores correspondientes a los excedentes del consumidor y del productor en el caso monopolista son respectivamente iguales a: $CS_m = \int_0^{q_m}[p(q) - p(q_m)]dq$ y $PS_m = \int_0^{q_m}[p(q_m) - c'(q)]dq$. Obsérvese que además de una pérdida en el excedente total, la existencia de monopolio conlleva una transferencia adicional del excedente del consumidor al productor, ver figura 1 (c).

Otra forma de medir la ineficiencia del monopolio consiste en medir la disminución en la demanda de factores que el monopolio implica, respecto a esta demanda bajo competencia perfecta. Esto puede valorarse a partir de considerar al monopolista maximizando su función de beneficios para la tecnología representada por $f : R^n_+ \to R$, definida como $y = f(x)$, donde representamos por y la cantidad producida a partir de x unidades del único insumo utilizado. El programa de maximización correspondiente será:

$$\begin{aligned} &\text{máx}_x\, p(y)y - wx \\ &s.a. \quad y = f(x), \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde $wx = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$; siendo w_i el precio del factor $i-$ésimo y x_i la co-

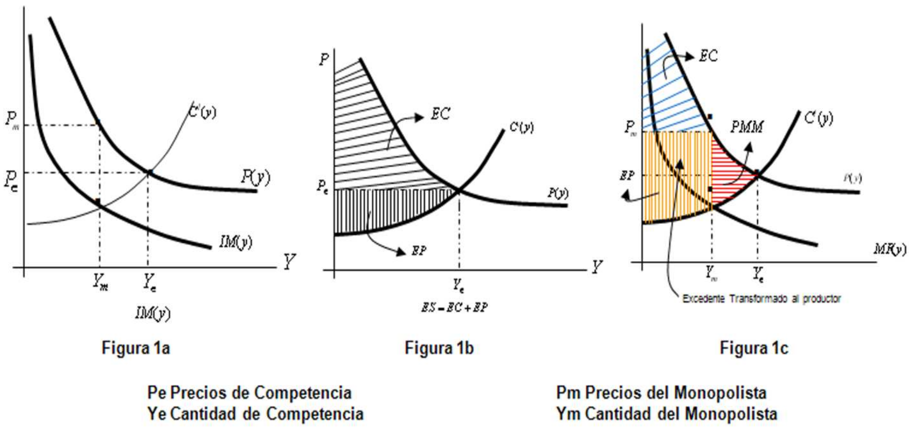


Figura 1.1: Precios y bienesatar social

rrespondiente demanda; conlleva que la solución maximizadora verifique la ecuación:

$$\frac{d\,(p(y)y)}{dy}\frac{\partial y}{\partial x_i} = w_i. \tag{1.7}$$

Luego, siendo $\frac{d}{dy}\,(p(y)y) < p$, se sigue que la demanda por el factor $i-$ésimo es menor que en el caso de competencia perfecta.

Se denomina *índice de poder del monopolio* al número $\frac{p_m - c'(q_m)}{q_m}$ donde p_m es el precio del monopolista, q_m el producto del monopolista, y $c'(q_m)$ el costo marginal evaluado en q_m. Este índice, que mide la distorsión en el mercado que el monopolio implica, es siempre igual a la inversa de la elasticidad relativa de la demanda del producto respecto de su propio precio[2], evaluada en p_m.

Obsérvese que de la forma acá discutida, el monopolista ejerce su poder de mercado en forma ineficiente, entre otras cosas porque no dis-

[2]Recordamos que se denomina elasticidad relativa de la demanda del producto, respecto a su propio precio, en p, al número $\eta(p) = \frac{p}{x(p)}\frac{dx(p)}{dp}$, siendo $x(\cdot)$ la función de demanda. Como puede comprobarse fácilmente a partir de (1.4) se tiene que, $p_m = c'(q_m)\left(1 + \frac{1}{\eta(p_m)}\right)$. Sigue de esta igualdad que el monopolista opera siempre en regiones donde $p : \eta(p) < -1$.

crimina entre consumidores. Impone a la sociedad un precio homogéneo, que si bien le permite obtener beneficios positivos, hace que el poder de mercado sea aún deficientemente utilizado. Diferenciar entre consumidores de acuerdo a su disposición a pagar por el bien, le daría aún más beneficios, conservaría para sí todo el excedente creado en el intercambio. No obstante hay que anotar que las posibilidades de discriminar no siempre existen. Discutiremos más adelante esta forma más eficiente de ejercer el poder de mercado y sus repercusiones en el bienestar de la sociedad.

La discusión, tanto empírica como teórica, del significado real de la pérdida de bienestar social, por la ineficiencia que el monopolio implica, ha sido ampliamente desarrollada y discutida desde diversos puntos de vista. Como ya se dijo en contraposición al planteo de la pérdida de bienestar social que el monopolio conlleva (en términos de pérdida de excedente social), hay quienes sostienen que el monopolio logra sostenerse por la existencia de ventajas técnicas en forma de economías de escala para el monopolista, que redundan en un beneficio social, al suponer dichas ventajas, una dismisnución del costo social de producción. En opinión de diversos especialistas, esta forma de producción implica un aumento neto en el excedente comercial de la sociedad. Quienes sostienen este argumento estiman que la reducción del costo por la existencia del monopolio tiene verdadera significación, siendo ello básicamente la causa de un aumento en el excedente global. Surge inmediatamente a continuación, la pregunta sobre la equidad de la distribución del excedente social. Parte de este excedente del que se apropia el monopolista en perjuicio de los consumidores, se distribuye entre accionistas de la firma monopolista, lo que puede contribuir a la desigualdad en la distribución del ingreso. No obstante una porción de estos super-beneficios pueden emplearse en inversiones en programas de investigación y desarrollo lo que ayudará sin duda a dinamizar la economía, mejorando así el bienestar de toda la sociedad. Existe un debate permanente sobre las potencialidades del marco competitivo y el monopolista para crear el mejor entorno para el desarrollo de la investigación.

Nótese que en ningún caso se hace referencia a la propiedad del monopolista. La discusión es en ese sentido completamente general.

En la siguiente sección discutiremos este enfoque y veremos las condiciones que pueden hacer que un monopolio sea sostenible sin la existencia de barreras legales que impidan la libre entrada de competidores.

1.3 Ejercicios

Ejercicio 1.1. *Considere una firma monopolista, en un mercado en el cual la función inversa de demanda tiene la forma:* $p(x) = 30 - 2x$, *mientras que la función de costos de la firma está dada por* $1 + 2x + x^2$.

1. Dibuje ambas curvas y las curva de ingreso y beneficio del monopolista.

2. Calcule el punto de corte del ingreso marginal con el costo marginal.

3. Calcule la oferta, el ingreso y los beneficios del monopolista.

4. ¿Cuál sería el precio, la oferta y los beneficios de una firma competitiva?

Ejercicio 1.2. *Para el caso del ejercicio anterior:*

1. Obtenga la elasticidad, en función de x. Calcúlela para x óptimo.

2. Escriba el ingreso marginal en función del producto y de la elasticidad. Recuerde que la elasticidad $\epsilon(x) = \frac{p(x)}{x}\frac{dx(p)}{dp}$ por lo que se asume negativa.

3. Calcule la recaudación del gobierno si la autoridad central fija una tasa $t = \frac{1}{3}$ sobre los beneficios del monopolista.

4. Igualmente para el caso en que la tasa se fije sobre el producto.

5. Muestre que el monopolista pasa al consumidor más pérdida de bienestar que la que él obtiene por la imposición de la tasa, es decir que $(p_t - p_m)x_t > tx_t$.

6. Muestre que hay en este caso, exceso de gravamen, y calcúlelo. *(Ver nota al final del ejercicio)*

7. ¿Qué tipo de gravamen elegiría si usted fuera la autoridad central? Explique su elección.

8. ¿Estaría de acuerdo con una política regulatoria que obligue al monopolista a vender su producto por el precio marginal? Explique.

- **Nota:** *Se dice que hay* ***exceso de gravamen*** *cuando se pierde más beneficio del que se recauda.*

- **Ayuda:** Para ver esto defina x_t como la cantidad producida por el monopolista en el caso en que se impone la tasa t, y sea x_m el producto óptimo el monopolista no gravado. Llame $\pi_m(0)$ al beneficio de monopolista que produce x_t pero sin tasa. Si $\pi_m(x_m)$ es el beneficio óptimo del monopolista no gravado, se tiene que $\pi_m(x_m) \geq \pi_m(0) = \pi_m(x_t) + tx_t$. De donde se sigue que $\pi_m(x_m) - \pi_m(x_t) \geq tx_t$.

Ejercicio 1.3. *Considere una firma monopolista, en un mercado en el cual la función inversa de demanda tiene la forma:* $p(x) = 40 - 2x$, *mientras que la función de costos de la firma está dada por* $2 + 3x + x^2$.

1. Calcule el excedente del consumidor para los casos de competencia perfecta y de monopolio.

2. Análogamente el excedente del productor.

3. Calcule el peso muerto del monopolio.

Ejercicio 1.4. *Considere una firma monopolista cuya función de costos* $c(x) = ax$*. considere la función de demanda* $x(p) = \alpha p^{-\gamma}$*, siendo* $\gamma > 0$.

1. Muestre que si $\gamma \leq 1$ entonces el precio óptimo del monopolista no está bien definido.

2. Calcule el precio óptimo del monopolista para el caso en que $\gamma > 1$ y el peso muerto del monopolista.

   Ejercicio 1.5. *La expresión* $\frac{p_m - c'(x_m)}{x_m}$ *donde* p_m *es el precio del monopolio y* x_m *el correspondiente producto, se llama* índice del poder de monopolio.

   (a) Justifique el nombre de dicha expresión.

   (b) Muestre que dicho índice es igual a la inversa de la elasticidad de la demanda respecto a su precio, evaluada en p_m.

1.4 Sustentabilidad y excedente de mercado

Analizamos en las secciones anteriores, los efectos negativos que, sobre la distribución del excedente de mercado, (medido por la pérdida de éste excedente en beneficio del productor), la existencia de poder de mercado implica. A los efectos de contrarrestar estos efectos negativos, generados por el monopolio, es de especial interés conocer las condiciones que hacen que este poder se mantenga aún sin trabas legales a la entrada de ningún tipo, pues en otro caso, si el interés es el de eliminar la distorsión, basta anular la ley que lo ampara. Es el primero, el caso del llamado monopolio natural, y es para este caso que debemos discutir políticas regulatorias que tiendan a hacer desaparecer la ineficiencia producida por la monopolización y las posibilidades de generar nuevas inequidades sobre la base del poder del monopolista, que redunden en generar y potenciar desigualdades sociales.

Pasaremos a discutir entonces el concepto de monopolio natural. Una discusión muy rica del concepto de monopolio natural puede verse en [Segura, J.], aunque la referencia fundamental en lo que sigue será precisamente [Baumol, W. Panzar, Y., Willig, R.].

Salvo que se tenga éxito en la creación de barreras a la entrada de potenciales competidores o restricciones legales que concedan privilegios monopolistas a una determinada empresa, la duración en el tiempo de un monopolio sólo puede deberse a la existencia de ventajas absolutas en los costos de producción, o bien suponiendo una relación muy particular entre demanda y costos. La forma más inmediata de modelar esta última situación, pero no la única como veremos, es la de suponer costos decrecientes. Es esta la forma tradicional de introducir lo que se llama el monopolio natural. Este supuesto sobre los costos es el que muchas veces se ha utilizado para justificar determinado tipo de producción monopolista como la generación y suministro de la energía eléctrica, transportes, telecomunicaciones, abastecimiento de agua, transporte colectivo en las grandes ciudades, etc. En general como veremos, se trata de situaciones en las que se produce en regiones de costos marginales muy por debajo de los costos medios (en regiones de costos medios decrecientes), en este caso, queda eliminada entonces, la posibilidad de producir bajo la regla precio igual a costo marginal, al menos sin la introducción de subsidios o transferencias.

El tema central, con relación al monopolio natural es el de la *sostenibilidad* es decir el de las condiciones que hacen posible la existencia del propio monopolio sin que la entrada de nuevos competidores acaben con él. En relación al tema aparecen dos puntos de vista claves, el de la existencia de costos decrecientes (clásico) y el más moderno de la existencia de subaditividades en la función de costos, no necesariamente asociadas a regiones de costos marginales decrecientes. Trataremos ambos temas a seguir, en primer lugar considerando la producción de un único bien.

Supongamos una empresa monopolista que hace frente a unos costos representados por $c(q)$, costos medios $CM(q)$, y una función de demanda dada por $x(p)$. Supongamos que la empresa actúa en un mercado de libre entrada y que trata de evitar la entrada de competidores eligiendo precios y cantidades. Los posibles competidores si entran tendrán los mismos costos que la empresa hasta ahora dominante. La siguiente definición, caracteriza a los llamados monopolios naturales, cuya sustentabilidad no requiere de trabas o privilegios impuestos por alguna autoridad central.

Definición 1.6. *Decimos que el* **monopolio es sostenible** *si bajo los siguientes supuestos:*

1. *Libre entrada.*
2. *El monopolista elige el precio p_m y produce el total de la demanda a ese precio, $q_m = x(p_m)$.*
3. *Si se produce una entrada, el monopolista no cambia el precio, sino que satisface la demanda residual al precio elegido p_m. Es decir, no hay comportamientos estratégicos.*

No se produce la entrada de competidores.

1.4.1 Sustentabilidad del monopolio basada en costos decrecientes

Si bien la sustentabilidad del monopolio, aparece básicamente como un problema de costos, es más bien un problema que como veremos, tiene que ver con la relación entre costos y demanda.

Supongamos que la curva de costos medios $CM(\cdot)$ es convexa y alcanza un mínimo en q_{min} igual a $CM(q_{min})$. Supongamos entonces los siguientes dos escenarios posibles:

1. *Escenario 1:* La demanda D_1 corta a la curva de costos medios en el punto (q_1, p_1) tal que $q_{min} < q_1$ y $p_{min} < p_1$ siendo $p_{min} = c(q_{min})$ y además $q_1 = x(p_1)$ y $p_1 = CM(q_1)$. El monopolista necesariamente debe elegir esta cantidad y este precio, ya que de elegir un precio inferior $p_2 < p_1$ produciría una cantidad q_2 tal que $x(p_2) = (q_2)$ siendo $CM(q_2) > p_2$ por lo que incurriría en pérdidas igual a $[CM(q_2) - p_2]q_2$. Y si eligiera un precio $p_3 > p_1$ el competidor entraría con precios p_1 y expulsaría al monopolista. Veamos entonces que esta posición no es sostenible por el monopolista. En efecto el competidor podría entrar con un precio $\bar{p}$ tal que $p_{min} < \bar{p} < p_1$ ya que no está obligado a satisfacer la demanda del mercado, por lo tanto entrará produciendo $\bar{q}$ tal que $CM(\bar{q}) < \bar{p}$ obviamente $\bar{q} < x(\bar{p})$. Ver figura (2 (a)). En este escenario el monopolio sólo es posible si existen leyes que lo amparen.

2. *Escenario 2:* Supongamos ahora que la función de demanda $x(p)$ corta a la función de costos medios en su tramo decreciente, es decir en un punto (q_2, p_2) tal que $q_2 < q_{min}$ con $p_2 > p_{min}$, siendo $q_2 = x(p_2)$ y $p_2 = CM(q_2)$. Veremos entonces que únicamente en este caso el monoplio es sotenible. En efecto, el entrante no puede hacer una oferta mayor que q_2 sin entrar en pérdidas, pues el precio que está dispuesto a pagar el mercado para una oferta igual a $q > q_2$ es menor que el correspondiente a $CM(q)$. En este caso estamos en la región donde producir menos que q_2 tiene costos medios mayores, es decir donde existen rendimientos crecientes a escala. Ver figura (2 (a)).

El monopolio es sostenible, sin leyes que lo amparan, solamente, como puede verse en la figura (2 (a)), bajo una situación en la que se produce con costos marginales muy por debajo de los costos medios. Esto hace imposible que una firma pueda producir la cantidad deman-

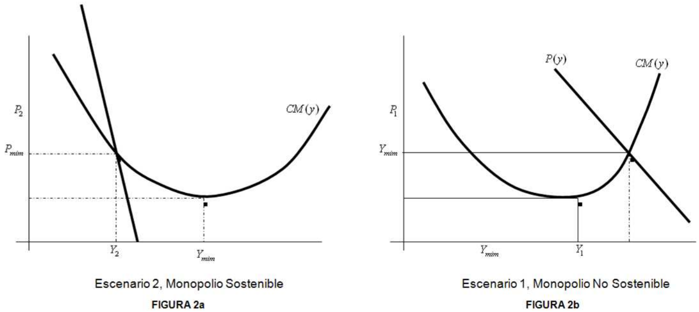


Figura 1.2: Demanda y costos: 2 escenarios

dada de acuerdo a la regla: *precio igual a costo marginal,* pues esto supone pérdidas en el largo plazo y la consecuente salida de la firma del mercado. Sólo una empresa monopolista apoyada en su poder de mercado podrá fijar un precio superior al marginal y si a la vez, este precio se fija por el costo medio, la entrada de competidores queda *naturalmente* excluida. Observe el lector que en esta región los costos medios son decrecientes, ubicándose la cantidad a producir, hacia la izquierda de aquella en la que el costo medio se minimiza, esto es donde costo medio y marginal se igualan.

Obsérvese también, que en este análisis se obtiene un resultado similar al que obtuvimos en la sección anterior, pues también allí ubicamos al monopolista ofertando a un precio p_m mayor al costo medio mínimo (valor igual al precio de competencia perfecta con libre entrada) y una cantidad q_m menor a la que minimiza el costo medio mínimo (cantidad igual a la ofertada en el caso de competencia perfecta). No obstante, bajo las actuales circunstancias, determinadas por la relación demanda-costos, la posibilidad de producción en condiciones de competencia perfecta, sin subsidios, o transferencias, queda excluida, Estas alternativas suponen desajustar otros mercados, en general introducir nuevas ineficiencias.

Si las analizadas hasta ahora fueran la únicas formas posibles, la sustentabilidad de un monopolio sólo podría darse si existen rendimientos crecientes a escala (tal es el enfoque tradicional). Nótese que la sustentabilidad del monopolio, depende de la función de costos, pero también de la forma de la demanda. Una misma empresa puede dejar de ser un monopolio natural si la forma de la demanda cambia, como se muestra en las figuras (2 (a)) y (2 (b)). No obstante, ésta no es la única posibilidad que permite justificar la existencia del monopolio natural. Veremos que en algunos casos esta se justifica, aún con costos crecientes a escala. Analicemos el caso de costos subaditivos.

Definición 1.7. *Se dice que la función de costos $c(q)$ es subaditiva para un volumen de producción dado si*

$$c(q) < \textstyle\sum_j c(q_j)$$

$$q = \textstyle\sum_j q_j.$$

Es decir que, existen costos subaditivos, cuando el costo de producir una cantidad dada mediante una sola firma, es menor que el costo de producir la misma cantidad, pero como producto agregado de varias firmas, ver figura (3).

1.4.2 Una firma es preferible a dos

En esta sección presentaremos un ejemplo en el que se muestra que en determinados casos, es preferible desde el punto de vista del bienestar social, producir con una única firma. Esta posibilidad surge como resultado de costos subaditivos y dentro de determinados niveles de demanda. La situación puede invertirse si la demanda excede los límites considerados. No obstante como ya fue dicho, es posible como muestra este ejemplo, la existencia de monopolios naturales aún en casos de ramas que no presentan costos decrecientes.

Ejemplo 1.8. *Supongamos una tecnología que tiene asociada una curva de costos dada por:*

$$c(q) = a + bq^2, \quad (a, b > 0.)$$

Comparemos los valores de $c(\bar{q})+c(q-\bar{q})$ contra $c(q)$ y determinemos los volúmenes de producción para los cuales es más conveniente producir en una sola empresa que en dos.

$$c(\bar{q}) + c(q - \bar{q}) > c(q). \tag{1.8}$$

El mínimo para $c(\bar{q}) + c(q - \bar{q})$ se obtiene cuando $\bar{q} = \frac{q}{2}$. Esto supone que las dos firmas producen la misma cantidad. Sustituyendo en (1.8) obtenemos que la desigualdad se cumple para valores de q tales que $2c(\frac{q}{2}) < c(q)$ es decir si $q < (2a/b)^{\frac{1}{2}}$. El costo medio mínimo de una sola firma se alcanza para $\bar{q}$ tal que $\frac{d}{dq}\left(\frac{a}{q} + bq\right)_{q=\bar{q}} = -\frac{a}{\bar{q}^2} + b = 0$. Es decir, $\bar{q} = (a/b)^{\frac{1}{2}}$ es decir que si la demanda del bien es una cantidad q, para la que se verifica que $(a/b)^{\frac{1}{2}} < q < (2a/b)^{\frac{1}{2}}$, entonces es preferible en ese caso, operar con una sola firma, no obstante no ser la región $(a/b)^{\frac{1}{2}} \leq q \leq (2a/b)^{\frac{1}{2}}$, una región de costos decrecientes. La existencia de un reducido número de empresas, en este caso es una situación peor desde el bienestar social que la correspondiente a la existencia de una sola empresa monopolista. No obstante, si la demanda aumenta entonces es posible que sea preferible operar con dos empresas, ver figura (3).

Obsérvese que la firma podría operar como monopolio natural, en una región con rendimientos decrecientes a escala, por lo que en determinadas, condiciones puede ser preferible operar con una única empresa.

1.5 Extensión del concepto de monopolio natural

A la luz del ejemplo anterior podemos ahora extender el concepto de monopolio natural, abarcando ahora casos de firmas que operan en re-

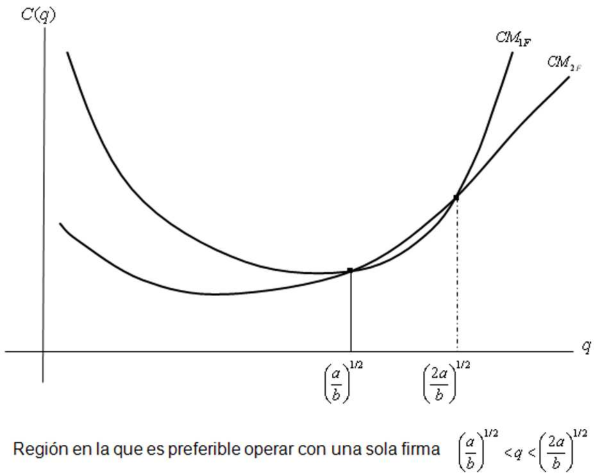


Figura 1.3: ¿Qué es preferible, una o más firmas?

giones de costos crecientes, lo que escapa a la definición clásica. Más aún el concepto de monopolio natural que consideraremos en este trabajo generaliza al concepto clásico.

El concepto de monopolio natural se transforma ahora en algo más flexible, como antes depende tanto de la función de costos como de la demanda que se quiera satisfacer, pero la región de posibilidades de existencia de un monoplio natural se extiende. Es más rica que la definición que se basa únicamente en el concepto de costos decrecientes a escala, bajo este supuesto, monopolios naturales ocurrirían solamente en el caso en que producir a nivel eficiente, suponga beneficios negativos. No hay que dejar de notar que los costos decrecientes sólo pueden existir dentro de determinados límites de la producción. El concepto de monopolio natural es un concepto ahora relativo a los costos en un sentido más amplio que en el caso clásico y a la demanda, y por lo tanto no son los costos decrecientes a escala su única explicación posible. Este enfoque muestra además que la sustitución de la estructura monopolista por una en la que un conjunto relativamente pequeño de empresas conlleva, al introducir costos mayores de producción, pérdida de bienestar social.

Un factor que puede influir también en la permanencia de un monopolio sin trabas legales y por lo tanto como monopolio natural, es el de la existencia de altos costos a la entrada. En estos casos, competir con el monopolio establecido, supone una inversión inicial tan grande que no existen agentes económicos dispuestos a realizarlas, más cuando recuperar los costos iniciales, supone períodos de tiempo muy largos. En este caso el monopolio puede mantenerse como tal, sin competidores, por lapsos muy prolongados de tiempo, por ejemplo hasta que no aparezcan cambios tecnológicos que disminuyan la magnitud de esta inversión inicial. El sector de generación de energía y en algunos casos la telefonía son ejemplos de estos casos. La telefonía fija suponía costos iniciales muy altos, que permitía a empresas nacionales mantenerse como monoplios naturales, las que dejan de ser tales una vez que se desarrolla la telefonía móvil. Las empresas de telefonía móvil que utilizan una tecnología que no implica costos iniciales tan grandes, pueden competir con las firmas establecidas, las que sólo se mantienen como monopolios por la imposición de trabas legales, es decir dejan de ser monopolios naturales.

El estudio de la sustentabilidad y la naturalidad del monopolio se vuelve más complicado si suponemos que la empresa monopolista produce más de un bien en forma monopolística, siendo capaz en consecuencia de determinar el precio de los bienes que produce, sobre los que ejerce su poder de mercado. La entrada de competidores se verá entonces facilitada pues estos no tendrán por qué producir todos los bienes que fabrica la empresa establecida. Ahora el concepto de monopolio natural no puede ser ajeno a la no existencia de subsidios cruzados. Un monopolio que para mantener su condición de tal debe fijar una estructura de precios que impliquen subsidios cruzados no será natural. En este caso, entrarán competidores que ofrecerán el producto cuyo precio subsidia la producción a precios más bajos, de esta forma el monopolista se verá expulsado del mercado de este bien y consecuentemente el monopolio será insostenible. Un factor importante a tener en cuenta en el momento de analizar la sustentabiliad de un monopolio que produce bienes diferentes en el de *economías de alcance.*

Definición 1.9. *Decimos que hay economías de alcance si* $c(x, y) < c(0, y) + c(x, 0)$*, es decir si los costos asociados a la producción conjunta de los bienes* x *e* y *son menores que los obtenidos si se producen en forma separada.*

Este concepto, está estrechamente ligado al de la subaditividad de los costos, pero, en este caso referido a la existencia de firmas que producen bienes diferentes: $c(x) < \sum_j^n c_j(x_j)$, donde n es el número de bienes diferentes que se producen en la rama. El vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ representa las cantidades de cada bien diferente producidas; $c(x)$ es el costo asociado a producir los n bienes diferentes en una sóla firma en cantidades x_j, mientras que, $c_j(x_j)$ es el costo de producir por separado cada bien $j \in \{1, 2, ...n\}$. Obsérvese que el monopolio no será natural de no existir economías de alcance.

Explique la última afirmación.

1.6 Ejercicios

Ejercicio 1.10. *Se dice que se justifica la intervención o reglamentación gubernamental en una industria cuando la curva de costo medio de empresas potenciales tengan una inclinación negativa en la región pertinente a la demanda.*

1. *¿Cuál sería la cantidad de producción y el precio en una industria, en la que el gobierno autoriza sólo a la empresa que prometa el precio más bajo?*

2. *¿Coincidirán estos precios y cantidades con los correspondientes al caso de competencia? Fundamente su respuesta.*

Ejercicio 1.11. *Suponga que se desea producir una cantidad $\bar{q}$ de un determinado producto. Debe elegir entre usar dos firmas o una sola. Suponga que una de ellas tiene una función de costos $c_1(q) = 6q + 3$ y la segunda $c_2(q) = 4q + 4$.*

1. *Muestre que siempre es preferible producir con una sola firma.*

2. *Discuta en función de $\bar{q}$, la pertinencia de usar una u otra.*

Capítulo 2

Precios no homogéneos

El monopolista desea maximizar su función de beneficio. Bajo determinadas circunstancias, le es posible establecer precios en forma diferente a los que resultan de resolver el problema de optimización (1.1). Como sea, todos estos esquemas alternativos están basados en la posibilidad que el monopolista tiene de fijar precios. En tanto que la solución del monopolista no es un óptimo de Pareto, algunos de estos esquemas alternativos pueden significar una mejora para el conjunto de la sociedad, (el monopolista y el resto), eventualmente pueden hacer que la oferta del monopolista sea la de competencia, llevando así al mercado a la eficiencia. Obviamente esto supone un aumento en el bienestar social agregado respecto al producido cuando el monopolista sigue la regla de fijación de precios en forma homogénea. La fijación de precios, a partir de este tipo de esquemas, puede beneficiar a algunos consumidores, tranformándolos de potenciales en reales, aunque en mucho casos, como en el que el monopolista pueda discriminar perfectamente entre los consumidores de su producto, acabe apropiándose del total del excedente del mercado. Es eficiente, aquel monopolista que consigue utilizar todo su poder de mercado para apropiarse de todo el excedente social.

Las técnicas de fijación de precios que discutiremos pueden ser usadas tanto por un regulador interesado en permitir el acceso de bienes a sectores sociales, que no accederían a los mismos de fijarse un único precio, cuanto por una firma monopolista, deseosa de incrementar sus beneficios. La diferencia está en que el regulador buscará maximizar el bienestar del consumidor, mientras que una firma no regulada buscará maximizar su beneficio. Tanto en el caso de ser la empresa pública como en el caso de ser privada, habrá una transferencia directa de riqueza de algunos sectores sociales para la empresa. La diferencia estará en el destinatario, el estado o el empresario privado, de esta transferencia, que se obtendrá muchas veces en forma de membresías, otras a partir de la fijación de precios diferenciados.

Ejemplos:

(a) Pago de una *cuota de ingreso* fija.

(b) Discriminación por precios.

(c) Precios correspondientes a demandas pico-valle.

(d) Fijar precios por el costo marginal más una tasa, $p = c + t_o$.

(e) Ofrecer la opción pagar cuota fija F, o pagar tasa t.

(f) Discriminación por características del consumo de diferentes grupos de consumidores.

2.1 Comentarios a las formas de discriminación

Estas formas de ejercer el poder de mercado, dan lugar en la mayoría de los casos a un aumento de la eficiencia, acompañada de un aumento del beneficio del monopolista (apropiación de excedente social) y al bienestar de una parte de los consumidores. El excedente apropiado por el monopolista, bajo estos esquemas, aumenta, pero a la vez se puede

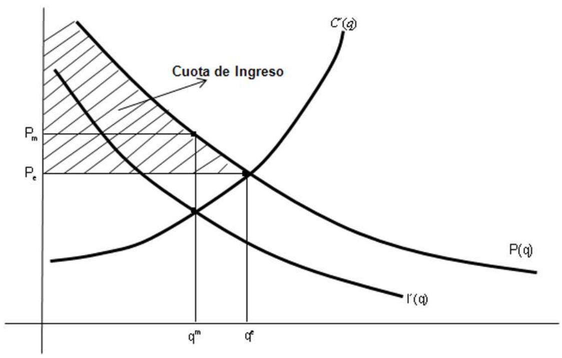


Figura 2.1: Un monopolista eficiente

producir la entrada al mercado de nuevos consumidores, dispuestos a pagar un precio mayor o igual que el competitivo pero menor que el del monopolista. Estos mecanismos, al diferenciar entre los compradores, pueden permitir a potenciales consumidores transformarse en consumidores reales, una vez que suponen para algunos casos o franjas del mercado, la fijación de precios menores que los que un monopolista no discriminador impondría en forma homogénea a la sociedad.

Algunos comentarios primarios a estas alternativas son las siguientes,

- La fijación de una cuota de ingreso fija, F, puede llegar a ser igual a todo el excedente del consumidor, esto daría lugar a fijar el precio unitario del bien, en el valor competitivo. Como en el caso de la discriminación perfecta (al que nos referiremos en la sección siguiente), el monopolista obtendría el excedente total y produciría la cantidad competitiva. En este caso estaríamos ante una situación de Pareto eficiencia, como se muestra en la figura (4).

- La alternativa [(e)] es Pareto superior a las opciones [(a)] y [(d)] por separado y respecto a la fijación de un precio uniforme. Establece un precio no lineal, hasta cierta cantidad x_0 el consumidor elige pagar $p = c + t$, para valores mayores eligirá pagar la cuota y luego $p = c$ pues si $x \geq x_0$: $cx + F \leq (c+t)x$. Los consumidores y el monopolista mejoran respecto a las otras alternativas.

- Existen esquemas más complicados de precios no uniformes. Las tarifas pueden ser múltiples.

- Tarifas que afectan en forma diferente a diferentes servicios. Ejemplo el mantenimiento del aparato instalado y el uso del servicio, como en el caso del servicio telefónico.

- De acuerdo a lo ya señalado, las opciones [(a)] y [(d)] pueden dar lugar a una asignación eficiente, basta para esto que el monopolista fije el precio competitivo, y cobre como tasa de ingreso todo el excedente del consumidor. Como está claro la eficiencia y la justicia social o redistributiva, pueden ser, en principio, criterios diferentes, no obstante estas situaciones en las que el monopolista obtiene beneficios adicionales respecto del monopolista que fija su precio óptimo en forma homogénea, pueden dar lugar a la vez, a una elevación del bienestar de los consumidores, al permitir que consumidores dispuestos a pagar precios más bajos que el que fijaría en forma homogénea un monopolista, accedan al consumo del bien en cuestión.

- La alternativa [(f)] supone precios uniformes en el interior de cada grupo, pero diferentes entre los mismos. Son ejemplos de este tipo de discriminación los precios de pasajes aéreos discriminados en pasajes de primera, de clase ejecutiva y de clase turista. Nótese que, al poder mantener la empresa precios menores (obviamente no menores que el costo marginal) a los que corresponde al precio de monopolio, esta diferenciación puede dar lugar a que un grupo mayor de individuos accedan al bien. Mientras que algunos grupos transferirán al monopolista excedente positivo, otros, caso de consumidores que paguen el precio competitivo, no transfieren excedente. La no transferencia de excedente no debe confundirse con pérdidas para la firma monopolista, pues la misma no deja de cobrar un precio mayor o igual al competitivo, el que supone, precio igual a costo marginal, que a su vez es igual, en el largo plazo, al costo medio.

Discutiremos a continuación, en forma diferenciada por su importancia teórica y práctica, los resultados relativos a una fijación de precios en forma no homogénea. Nos referimos a la imposición de precios diferentes para diferentes grupos sociales. En un extremo de esta posibilidad discriminatoria se encuentra la posibilidad de imponer a cada individuo un precio diferente, ver figura (5), lo que permitiría al monopolista usar todo su poder de mercado y transformarse en eficiente. En el otro extremo solamente existen dos grupos diferenciados y dos precios diferentes para un mismo bien, o dos diferentes mercados para un mismo producto, ver figura (6). La fijación de precios no homogéneos debe implicar la no posibilidad de renegociación posterior entre los individuos de diferentes grupos. Muchas veces, asegurar este no arbitraje, tiene su costo que el monopolista puede no estar dispuesto a pagar.

2.2 Discriminación vía precios

En determinados casos el monopolista puede discriminar entre diferentes consumidores, por gustos, ingresos, edad, ubicación geográfica y fijar precios diferentes de acuerdo a estas características diferentes. Se produce discriminación de precios cuando se vende el mismo bien a consumidores diferentes a distintos precios, y si la diferencia de precios no está justificada por diferencias de costos. En este caso puede venderse a consumidores que tienen una preferencia mayor por el bien a un

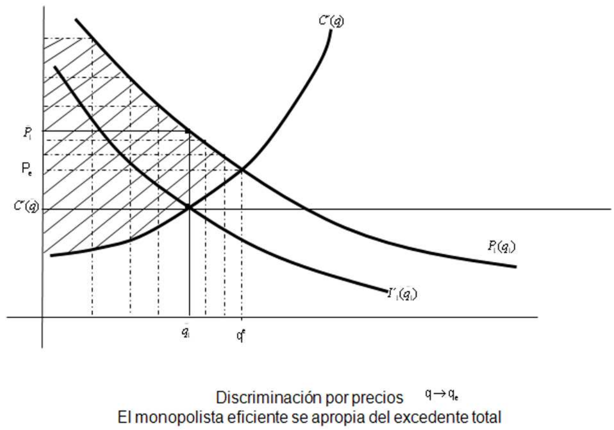


Figura 2.2: Excedente y eficiencia

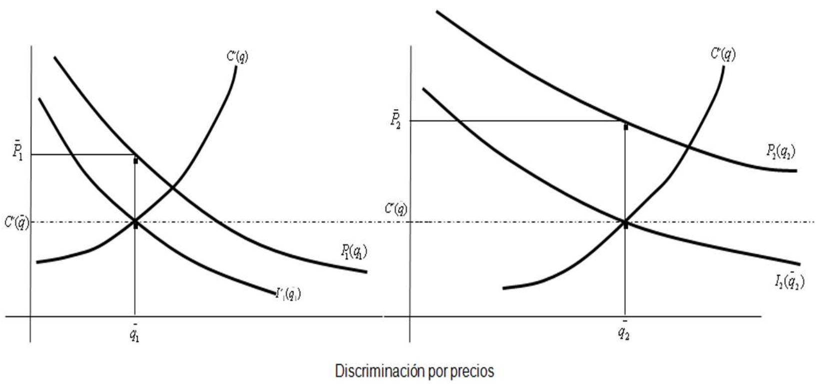


Figura 2.3: Discriminación y eficiencia

precio superior, mientras que a los restantes se venden por el precio marginal. Ejemplos de estos casos son los servicios de transporte o diversión que ofrecen precios diferenciados según la edad del consumidor. Libros de tapas duras o rústicas, buscando diferenciar entre consumidores demostrativos y no. Esquemas similares a éste, son los utilizados para fijar precios en el caso de demandas pico-valle, cobrando por la capacidad instalada a aquellos consumidores de las horas pico. La discriminación absoluta, supone que el monopolista es capaz de descubrir al comprador dispuesto a pagar el precio más alto, al que está dispuesto a pagar de acuerdo a la siguiente evaluación más alta, y así sucesivamente. No obstante esto no siempre es sencillo de hacer. Este tipo de discriminación se denomina de primer grado. En el caso de que el monopolista consiga discriminar con exactitud a todos los consumidores, puede ofertar productos a precios decrecientes hasta el equivalente al costo marginal. Ver figura (6). En este caso todo el excedente del consumidor pasaría al monopolista, lo que implica una asignación Pareto eficiente, en la cual el consumidor cede todo su excedente al monopolista. Obsérvese que si bien se estaría ofertando el producto en la cantidad competitiva, y la oferta correspondería también a la competitiva, todo el excedente sería apropiado por el monopolista. Las repercusiones sobre el bienestar social son en este caso ambiguas. Pues por una parte los consumidores con mayor disposición a pagar por el bien, se verían afectados en su bienestar, son precisamente ellos quienes pagarán más por el bien ahora, que cuando el precio es uniforme, pero por otra parte, consumidores que bajo el esquema de un precio uniforme no accederían al bien, bajo el esquema discriminador pueden acceder a dicho producto. En el caso de ser el bien de primera necesidad, la discriminación afectaría en forma negativa, a los sectores de menor elasticidad, los que son generalmente para este tipo de bienes, los de menores recursos. Los sectores de mayores ingresos tienen generalmente para estos bienes, mayor elasticidad. No obstante el efecto inverso podría obtenerse para casos de bienes superfluos. No obstante, desde el punto de vista de la eficiencia, el monopolista discriminador es el más eficiente, por cuanto se apropia de todo el excedente social. En tanto que el excedente que se reparte socialmente es ahora mayor, y disminuye consecuentemente, el peso muerto (en el límite de la discriminación absoluta este será cero) el bienestar agregado, el de los consumidores más el del monopolista, aumenta.

Algunas alternativas viables se presentan cuando se puede discriminar por grupos. Consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1. *Supongamos que el monopolista puede ubicar en dos mercados diferentes un mismo bien. Asumimos que son mercados aislados, y que el monopolista puede cargar precios diferentes. Llamaremos q_i a la oferta del monopolista en el mercado $i = 1, 2$. El objetivo del monopolista será entonces maximizar su función de beneficios:*

$$\pi(q_1, q_2) = q_1 p_1(q_1) + q_2 p(q_2) - c(q_1 + q_2).$$

Las CPO para este problema son:

$$0 = \frac{\partial \pi(q_1^m, q_2^m)}{\partial q_i} = I_i'(q_i^m) - c_q'(q_1 + q_2), \; i = 1, 2.$$

Consecuentemente se obtiene que $I_1'(q_1^m) = I_2'(q_2^m)$ lo que implica que

$$p_1^m(1 + 1/\eta_1) = p_2^m(1 + 1/\eta_2)$$

De donde se deduce que $p_1^m > p_2^m$ si $\eta_1 > \eta_2$ o teniendo en cuenta que la elasticidad es negativa $|\eta_1| < |\eta_2|$, es decir que un monopolista discriminador elegirá un precio mayor en el mercado con menor elasticidad de la demanda. Ver figura (6).

Ejemplo 2.2. *Los precios pico-valle, son generalmente considerados por la autoridad regulatoria para el caso de las companías eléctricas,* *telefónicas, y de transposrte, en general para casos donde el bien no puede ser almacenado, o intercambiar consumo en momento valle por consumo en momento pico. En estos casos se supone que durante los períodos de baja demanda la capacidad instalada no es totalmente utilizada, por lo que producir una unidad adicional del producto (transportar un pasajero más, o generar una unidad más de energía) no afecta a la capacidad instalada, por lo que esta unidad se cobrará al precio marginal. No obstante en el pico, producir una unidad adicional supone conseguir más capacidad, supongamos que el precio (por unidad de capacidad) de conseguir la capacidad necesaria para producir una unidad adicional sea r.*

El costo de la unidad en ese período será $c + r$. Es decir que los consumidores de la temporada pico serán quienes paguen la inversión en capacidad, los consumidores de temporadas valle pagarán solamente los costos operacionales. Estos precios pico valle, son muchas veces impuestos por la autoridad regulatoria que requiere la información de la firmas reguladas. Un problema adicional es que posible sustitución entre consumo del bien en pico o en valle, por ejemplo ciertas llamadas telefónicas se posponen para la noche.

Un problema más complicado se presenta cuando la totalidad de la capacidad se llega a utilizar en ambos períodos, el problema entonces es el de cómo repartir el pago de la capacidad.

2.3 Monopolio, discriminación y bienestar social

Como ya fue dicho en el capítulo (1), es posible en una rama monopolizada aumentar a la vez el bienestar del consumidor y el del productor, hecho este que caracteriza la ineficiencia paretiana de la producción monopolística. La pérdida de bienestar por parte del consumidor está asociada parcialmente al llamado peso muerto del monopolio (PMM) y parcialmente a la transformación de parte del excedente del consumidor en excedente del productor. Es precisamente la magnitud de este peso muerto el que mide la ineficiencia del monopolio. No obstante aún en casos en que un monopolio discriminador consigue un resultado eficiente, este va acompañado de una pérdida de bienestar por parte de los consumidores, pues una parte o el total del excedente del consumidor se transforma en excedente del productor. El monopolista que consigue apropiarse de todo el excedente es precisamente el eficiente. Se produce entonces la paradójica conclusión de que sólo el monopolio que no es capaz de explotar completamente su situación privilegiada produce por debajo del nivel competitivo.

No obstante, muchas empresas monopolistas aún pudiendo discriminar, no lo hacen. Pues hacerlo, supone realizar controles y los gastos de realizarlos, pueden superar los beneficios que la discriminación implica. Discriminar supone capacidad para entre otras cosas, frenar el arbitraje que puede aparecer por compradores que consiguen el producto en el mercado barato y lo vendan en el caro. Evitarlo puede ser más costoso, que lucrativa la discriminación.

En el caso de competencia perfecta (que se supone es una forma eficiente de producir), el excedente total de la sociedad , producido por el intercambio de bienes, tiene un valor igual a:

$$ET = \int_{\bar{y}}^{y_c} \big(p(y) - c'(y)\big)\, dy, \tag{2.1}$$

De este valor total, el excedente del consumidor es una parte igual a:

$$EC = \int_{\bar{y}}^{y_c} (p(y) - p_c)\, dy, \tag{2.2}$$

siendo $\bar{y}$ la mínima cantidad de producto que la firma competitiva está dispuesta a producir, y_c la cantidad de producto correspondiente al caso de competencia perfecta, p_c el precio unitario de dicho producto en competencia perfecta, y $p(y)$ la función de demanda inversa. Como ya vimos en la sección (2.2), el resto, respecto al excedente total, es el excedente del productor.

El monopolio introduce una doble distorsión en este excedente social. Por un lado en la cantidad producida es menor que la socialmente óptima y a un precio unitario mayor que el de competencia, y por otro en la distribución del excedente social. Por un lado se pierde una parte de este excedente, esto es el peso muerto del monopolio, que mide la ineficiencia de esta forma de producir. Por otro lado, una parte del excedente del consumidor se lo apropia el monopolista.

El peso muerto del monopolista equivale a:

$$PM = \int_{y_m}^{y_c} \big(p(y) - c'(y)\big)\, dy, \tag{2.3}$$

siendo y_m el producto correspondiente al monopolista. Es precisamente este valor PM el que se pierde para la sociedad. Consecuentemente, el excedente total en el caso de monopolio pasa a ser menor que en el caso de competencia perfecta, pues $y_m < y_c$. Sólo alcanza a ser una parte de este último y su valor es:

$$EC_m = \int_{\bar{y}}^{y_m} \big(p(y) - c'(y)\big)\, dy. \tag{2.4}$$

Mientras que a la vez, el monopolista se apropia de una parte del excedente del consumidor La parte apropiada corresponde a:

$$IE = \int_{\bar{y}}^{y_m} (p_m - p_c) dy, \tag{2.5}$$

siendo p_m el precio de monopolio.

Como ya fue dicho, un monopolio eficiente es aquel que consigue apropiarse del total del excedente social (ver 2.1), el que es igual a la suma del excedente del consumidor, el del productor y el peso muerto. Pues en este caso, sea por la posibilidad de discriminación perfecta, o por la posibilidad de imposición de precios en dos etapas, el monopolista está dispuesto a ofertar el producto de competencia. Es precisamente el monopolista que consigue explotar todo su poder de mercado, el que se transforma en eficiente. Esta situación desde el punto de vista del bienestar podría pensarse como ambigua, pues si bien es cierto que el monopolista aumenta su beneficio a costa del conjunto de la sociedad (apropiándose total o parcialmente del excedente del consumidor), hay sectores de la población que pueden verse beneficiados por la discriminación de precios. En definitiva esto supone que cada consumidor paga por el producto lo que está dispuesto a pagar. Esto permite que potenciales consumidores se transformen en verdaderos consumidores al ver la posibilidad de pagar por el producto un precio menor, que el que impone el monopolista que utiliza precios homogéneos. Es probable que la demanda de viajes en tren de los estudiantes se viera reducida si no hubiera discriminación de precios. La paradoja se rompe cuando se piensa en que la producción monopolista es no eficiente desde el punto de vista de Pareto.

Llegado a este punto el problema, más que el de la ineficiencia de la producción (total o parcialmente superado según la discriminación sea total o parcial), pasa a ser el de la equidad, por cuanto el monopolista (o los accionistas de la firma), se apropia del total del excedente creado por el conjunto de la sociedad en el proceso de intercambio de bienes. El problema del regulador pasa a ser entonces como revertir a la sociedad el excedente apropiado por el monopolista, problema que es independiente del tipo de propiedad de la firma (pública o privada). Las discusiones en torno a la necesidad de ganancias extraordinarias para hacer posible la inversión en investigación y tecnología no cae fuera de esta temática. Hay también quien sostiene que sólo bajo condiciones monopolistas es posible ser competitivo en los mercados internacionales.

2.4 Ejercicios

Ejercicio 2.3. *Los bancos generalmente cobran tasas más bajas de interés en préstamos a empresas grandes que a empresas pequeñas. Puede dar usted:*

1. *Una explicación basada en la discriminación de precios atribuible al tamaño de la empresa?*
2. *Otra explicación, basada en la diferencia de costos?*
3. *Suponga que la diferencia en la tasa de interés en préstamos por tamaño de empresa es la misma en ciudades grandes que en pequeños pueblos ¿cuál de las dos explicaciones, sería la más aceptable?*

Ejercicio 2.4. *Suponga una rama de la industria monopolizada por una empresa, y que además la curva inversa de demanda está dada por*

$$p(q) = \begin{cases} 30 - 2q, & 0 \leq 15 \\ 0 & q > 15 \end{cases}$$

Suponga también que la función de costos es $c(q) = 5 + q^2,\ q \leq 0.$

1. *Calcule la máxima cuota de ingreso que el monopolista puede cobrar.*
2. *Indique el precio unitario que el monopolista puede imponer.*
3. *Discuta la posibilidad de eficiencia en este caso y las repercusiones sobre el bienestar comparando con una situación en la que un monopolista fija un precio homogéneo bajo iguales condiciones.*

Ejercicio 2.5. *Suponga que una empresa pública genera energía eléctrica. En las horas normales la empresa es capaz de generar la energía* q_e *suficiente para abastecer al mercado, a partir de una empresa con bajo costo* c_e*, pero por su capacidad de generación está limitada, supongamos*

$q_e < T$ para cierto T fijo. En las horas pico requiere la participación de un generador termoeléctrico, quien suministra la energía faltante, representada por q_p y a mayor costo c_p. Suponga que usted es el planificador central, interesado en maximizar el excedente social, es decir que su objetivo es

$$\max_{q_e, q_p} \int_0^{\bar{q}} p(Q)dQ - c_e(q_e) - c_p(q_p),$$

donde $Q = q_e + q_p$ siendo $c_e(q) < c_p(q)$, $\forall q \geq 0$.

1. *Plantee formalmente el problema del planificador.*

2. *Obtenga las condiciones de primer orden.*

3. *Discuta las soluciones posibles para la generación de energía en las horas pico. Explique por qué discriminar por precios entre horas normales y horas pico tiene sentido desde el punto de vista del planificador benevolente.*

Observe que hay dos soluciones posibles para las horas pico, ambas con ofertas positivas por parte de ambas firmas:

- *Un primer caso, en el que las cantidades ofertadas por ambas firmas serán tales que se verificará la igualdad $c'_e(q_e^*) = c'(q_p^*)$. Es el caso de ambas soluciones interiores con restricciones inactivas.*

- *Caso en que la empresa de costo bajo alcanza su frontera con $q_e^* = T$, y el remanente es cubierto por la termoeléctrica. En este caso la solución verificará $c'_e(q_e^*) \leq c'_p(q_p^*)$. Eventualmente la termoeléctrica podría no operar. El costo marginal de la energía producida en la termoeléctrica puede ser en este caso, estrictamente mayor que el correspondiente a la empresa de bajo costo en el óptimo.*

- *El precio de la unidad de energía es fijado por la oferta con costo marginal mayor, independientemente de donde se produzca.*

Capítulo 3

La regulación del monopolio

La regulación gubernamental del monopolio, puede justificarse a partir de la potencial pérdida de bienestar que la explotación del poder de mercado por parte del monopolio conlleva (la aparición del peso muerto) y/o a partir de consideraciones de equidad en la distribución del excedente social que el intercambio crea. El control estatal puede atenuar el incremento de los precios o bien introducir elementos de competencia en algunos casos, restringiendo así la ineficiencia propia de la producción monopolista, o bien introducir tasaciones o impuestos redistributivos del excedente social.

La determinación de precios óptimos a partir de los costos de la empresa, y en la medida en que sean precios libres de subsidios, dan una medida de cuanto está la sociedad dispuesta a pagar por el bien. No obstante la determinación de precios por costos, en principio no atiende a consideraciones sobre el bienestar social. Esto hace que en muchas ocasiones la intervención del planificador tenga sentido. Es únicamente para el caso de monopolios naturales que debemos analizar las posibles formas de, mediante regulaciones, evitar o al menos disminuir la ineficiencia y la pérdida de bienestar ocasionada por su existencia. En otro caso bastará derogar las leyes que impiden la libre entrada.

La forma aparentemente más sencilla de regular, por parte de un planificador central benefactor, sería la de obligar a las empresas a vender por su costo marginal. Como veremos esta es la única que da lugar a la asignación eficiente. No obstante esta sencilla regla no es aplicable. Pues si el monopolio es natural, presenta economías de escala, el costo medio es mayor que el costo marginal para todos los valores relevantes de producción, por lo tanto obligada a vender al precio marginal incurriría en pérdidas. Luego:

1. Una empresa privada no estaría dispuesta a producir en estas condiciones y
2. si fuera pública se financiaría generando ineficiencias en otros mercados.

Comenzaremos definiendo una forma de medir el bienestar social asociado a la producción de un bien. Esta consiste en valorar este bienestar de acuerdo a lo que la sociedad gana por producir el bien en una cantidad determinada menos el costo de producirlo bajo condiciones de mercado y tecnológicas determinadas.

Sea $x(p)$ la cantidad producida del bien en consideración a precios p y sea $c(x(p))$ el costo asociado a la producción de este bien. Podemos medir el bienestar social asociado a la producción de dicho bien en la cantidad $q' = x(p')$ mediante la función:

$$W(p') = \int_{\underline{p}}^{p'} x(p)dp + p'x(p') - c(x(p')), \tag{3.1}$$

donde $\underline{p}$ es un precio tal, que el bien no se produce para $p < \underline{p}$. Equivalentemente el valor del bienestar social puede obtenerse a partir de la expresión:

$$W(q') = \int_{0}^{q'} [p(x) - c'(x)]dx, \tag{3.2}$$

$p(x)$ representa el valor inverso de la demanda siendo $q' = x(p')$. De esta forma el máximo bienestar social puede alcanzarse bajo la regla precio igual costo marginal. Lo mismo puede probarse si consideramos como utilidad social, una función de utilidad que sea la suma ponderada de las utilidades individuales, $\sum_h \lambda_h u_h(x_h) - c(x)$ siendo x_h el consumo de cada agente cuya utilidad es u_h y tal que $x = \sum_h x_h$. Entonces un regulador deseoso de obtener el máximo bienestar social debería en principio, imponer esta regla al monopolio, la que por otra parte no plantea problemas de sustentabilidad del monopolio, pues ningún competidor entraría vendiendo a precios inferiores al costo marginal. Producir bajo esta regla equivale a alcanzar la eficiencia. Sobre la interpretación económica de los ponderadores λ_h, y su importancia en relación con la eficiencia y el bienestar social, ver la sección (11) de este trabajo, donde el tema es ampliamente discutido.

Dado que esta regla no es posible de imponer en la práctica, pues supone el conocimiento de las utilidades de los agentes económicos, busquemos soluciones alternativas que nos lleven a un incremento en el bienestar social.

3.1 Formas de regulación

A continuación entraremos en el problema de la regulación del monopolio, considerando dos posibilidades,

1. Imposición de límites a la tasa de beneficios.

2. Control de precios.

3. Finalmente la discusión del caso en que se imponen precios no basados en costos .

Supondremos la existencia de un monopolio natural, en el sentido de que no tiene ayuda legal de ningún tipo para mantener su posición dominante. Desde el punto de vista de la eficiencia técnica suponemos que es mejor una sola empresa que más empresas. En el caso en que esto pueda deberse a que el ingreso de nuevas firmas, implica por ejemplo, un incremento considerable en los costos fijos, sin que esto suponga un aumento en el costo marginal, la empresa establecida puede intentar ejercer su poder de monopolio, consciente de que no habrá nuevos ingresos. En el caso de existir, la amenaza de firmas entrantes, la firma establecida, fijaría el precio de su producto por el costo medio, esto desalentaría, como ya fue visto en el primer capítulo, a toda potencial entrante. Una forma de regulación, aparentemente inmediata y sencilla, sería el de imponerle a la firma establecida, precio igual a costo medio, lo que supondría que la empresa estará produciendo sin beneficios extraordinarios. No obstante esta regulación implica, la participación de la firma a regular, la que tiene incentivos a no declarar los verdaderos costos.

Analicemos diferentes técnicas regulatorias, utilizadas para disminuir la ineficiencia propia del monopolio, las que combinan control de precios e imposición de tasas. Analizaremos *impuestos al beneficio, impuestos de cuantías por unidad de producto, impuestos ad valorem, imposición de límites a la tasa de beneficios, y el control directo de los precios de venta*

3.1.1 Impuestos al beneficio

Se impone una tasa t al beneficio monopolista, de esta forma el beneficio pasa de ser $\pi(x)$ a ser $(1-t)\pi(x)$. El nivel óptimo de producto se elige como antes maximizando $\pi(x)$ por lo que no hay cambio en la oferta del monopolista, ni en los precios ni en la demanda por insumos. Es lo que se llama una tasa neutral. No obstante no hay mejora en la eficiencia.

3.1.2 Impuestos de cuantía por unidad de producto

Comencemos con el caso de un impuesto de cuantía t por unidad de producto, el beneficio se expresará entonces como:

$$\pi(x,t) = [p(x) - t]\, x - c(x). \tag{3.3}$$

Las condiciones de máximo son:

$$\begin{aligned} &xp'(x) + p(x) - t - c'(x) = 0 \quad (a) \\ &2p'(x) + xp''(x) - c''(x) < 0 \qquad (b) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sea $x_t = x(t)$ la solución óptima para el caso en que la tasa es t, es decir que:

$$\pi(x(t),t) = max_{x \geq 0} \pi(x,t)$$

Supongamos condiciones en las funciones inversa de demanda y costos que garanticen que $x(t)$ es una función diferenciable con respecto a t. Sustituyendo y derivando con respecto a t en la ecuación (3.4 a) y considerando la ecuación (3.4 b) obtenemos que

$$\dot{x}_t = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2p'(x) + xp''(x) - c''(x)} < 0 \tag{3.5}$$

lo que implica que un impuesto de este tipo restringe aún más la oferta. Esto es natural al significar un aumento en los costos marginales, como se muestra en la figura (7). A la vez que las relaciones

$$\frac{dp(x(t))}{dt} = \frac{dp(x)}{dx}\frac{dx(t)}{dt} > 0$$

muestran un aumento en el nivel de precios.

Derivando la ecuación (3.3) y considerando la ecuación (3.4 a) vemos que hay una pérdida de beneficios igual a $-x(0)$ pues

$$\frac{d\pi}{dt} = -x(t) < 0.$$

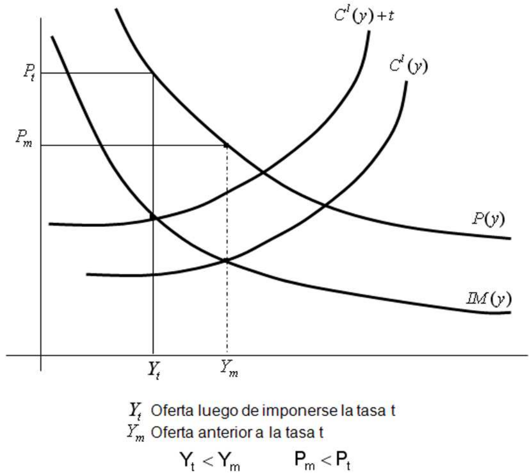


Figura 3.1: Precios y elasticidad

Además el monopolista transfiere al consumidor una pérdida de bienestar mayor que la suya por la imposición de la tasa. Para ver esto sea $p_t = p(x_t)$ el precio pagado por el consumidor por unidad de producto cuando se impone una tasa t y sea $p(x_m)$ el precio (de monopolio) pagado cuando no existe tasa. Obsérvese que

$$p(x_t) - p(x_m) = [c'(x_t) - x_t p'(x_t)] + [c'(x_m) - x_m p'(x_m)] + t. \quad (3.6)$$

Siendo positivos los dos primeros sumandos del lado derecho de la ecuación (3.6) se sigue que $p(x_t) - p(x_m) \geq t$. Luego

$$(p(x_t) - p(x_m)x_t \geq tx_t.$$

Por lo tanto, el consumidor pierde más que lo que paga el monopolista a la autoridad central. Es decir que, al imponerse una tasa al producto, el monopolista se apropia de una parte del excedente correspondiente al consumidor, igual a $(p(x_t) - p(x_m))\, x_t$ que es mayor que lo que él paga por la imposición de la tasa, que es igual a tx_t.

Por otra parte hay un exceso de gravamen, es decir que, se pierde más beneficio de lo que se recauda. Para ver esto definimos:

- π_m beneficio monopolista no gravado, $\pi_m(t)$ beneficio gravado por la tasa t.

- luego: $\pi_m - \pi_m(t) = A + tx(t)$. Siendo $A = [p(x(t))x(t) - c(x(t))] - p(x_m)x_m - c(x_m) > 0$

- se sigue que $\pi_m \geq \pi_m(t) + tx(t)$

Por lo que sería preferible para el monopolista efectuar un pago $\bar{P}$ en una sola vez, $\bar{P} = tx(t)$ a la imposición de una tasa de este tipo. Más aún podría imponérsele un pago P de una sola vez, tal que $\pi_m - \pi_m(t) \geq P \geq tx(t)$, el que no supondría para el monopolista, pérdidas mayores que la correspondientes a la imposición de la tasa t.

Finalmente la imposición de una tasa al producto, incrementa el peso muerto del monopolio en una cantidad igual a la pérdida de excedente del consumidor (no apropiado por el monopolista) más la pérdida de beneficios del productor menos el impuesto total. Valor éste que es igual a

$$\Delta(PM) = \int_{x_t}^{x_m} \big(p(x) - c'(x)\big) - tx_t$$

ver figura (7).

Un impuesto de este tipo podría justificarse en el caso en que $\Delta(PM) \leq 0$, pues correspondería a una redistribución del excedente en beneficio de los consumidores. Naturalmente, las ventajas de la redistribución resultante, dependerán de las sucesivas acciones llevadas adelante por el planificador central.

3.1.3 Impuestos ad valorem

En el segundo ejemplo suponemos que la autoridad regulatoria impone una tasa τ a los beneficios brutos del monopolista. El problema del monopolista es entonces el de resolver el siguiente problema de maximización:

$$\max_{x \leq x_0} (1-\tau)p(x)x - c(x). \tag{3.7}$$

Las condiciones de primer orden serán entonces:

$$(1-\tau)\big(p(x(\tau)) + p'(x(\tau))x(\tau)\big) - c'(x(\tau)) = 0$$

equivalentemente

$$p(x(\tau)) = \frac{c'(x(\tau))}{1-\tau} - p'(x(\tau))x(\tau).$$

Obsérvese que la tasa es trasladada a los precios, lo cual en las condiciones habituales supone un aumento de los mismos. Las condiciones de primer orden implican ahora $I'(x(\tau)) = \frac{c'(x(\tau))}{1-\tau} > c'(x(\tau))$, donde $I(x)$ denota el ingreso total del monopolista, obteniéndose entonces un aumento en la ineficiencia respecto a la que existiría si se produjera una cantidad $x(\tau)$ y no se cobrara tasa, pues en el caso sin tasas se obtiene $I'(x(\tau)) = c'(x(\tau))$.

Como en el caso anterior se obtiene una disminución de la oferta y en los beneficios pues:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{d\tau} &= \tfrac{x(\tau)p'(x(\tau))+p}{(1-\tau)(2p'(x(\tau))+x(\tau)p''(x(\tau)))-c''(x(\tau))} < 0 \quad (a) \\ \tfrac{d\pi}{d\tau} &= -px(\tau) \quad (b) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Existiendo también en este caso, exceso de gravamen pues se pierde más de lo que se recauda. Por esta razón es preferible cobrar un impuesto fijo igual a la diferencia de beneficios que imponer la tasa.

3.1.4 Regulación de la tasa de beneficios

Supongamos que una autoridad reguladora impone una tasa de beneficio máximo por unidad de capital que una empresa monopolista emplea en la producción de un bien x. Supondremos que el bien se produce a partir de dos insumos y_1 que representa la mano de obra empleada e y_2 representa el capital. La tecnología está dada por la función $f: R_+ \times R_+ \rightarrow R$ definida por $f(y_1, y_2) = x$. Impuesta la tasa por la autoridad reguladora el problema del monopolista será:

$$\begin{aligned} &Max_{y_1>0, y_2>0}\; p[f(y)]f(y) - wy_1 - ry_2 \\ &s.a. : \tfrac{p[f(y)]f(y) - wy_1}{y_2} = s \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde w es el salario, $y = (y_1, y_2)$ siendo r el costo del capital en condiciones competitivas. Por s denotamos la tasa máxima de beneficio por unidad de capital impuesta por el regulador. Obviamente $r \leq s < r^m$ donde por r^m representamos la tasa que corresponde al productor monopolista no regulado.

El resultado, como veremos más adelante, de esta imposición, es la sobrecapitalización de la empresa. Lo que implica un aumento en la ineficiencia. La ineficiencia tradicional se mantiene por cuanto lanzará al mercado una cantidad de bienes inferior a la competitiva y por otra parte no eligirá una política tendiente a minimizar costos, sino que se sobrecapitaliza .

El lagrangiano para este problema es:

$$L(y_1, y_2, \lambda) = (1-\lambda)p[f(y)]f(y) - (1-\lambda)wy_1 + ry_2] - \lambda(r-s)y_2.$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)2p[\tfrac{\partial f}{\partial y_1}(y)]f(y) - (1-\lambda)w = 0. \\ &(1-\lambda)2p[\tfrac{\partial f}{\partial y_2}(y)]f(y) - (1-\lambda)r - \lambda(r-s) = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A partir de aquí se obtiene:

$$\frac{f_{y_2}(y)}{f_{y_1}(y)} = \frac{w}{r} + \frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{r-s}{w}, \tag{3.11}$$

donde $f_{y_i}(y) = \frac{\partial f}{\partial y_i}(y),\ i = 1, 2.$

Luego, siendo la restricción activa, se tiene que $\lambda > 0$. Además de las condiciones de segundo orden para un máximo y de la concavidad de f se sigue que $\lambda < 1$. Finalmente, para $s > r$, se obtiene la desigualdad: $\frac{f_{y_2}(y)}{f_{y_1}(y)} < \frac{w}{r}$. Esto dice que, en el caso de limitar de esta forma la tasa de beneficios, los recursos no serán utilizados en forma eficiente, pues esto supone la igualdad entre ambos miembros de la desigualdad anterior. Si bien por una parte se aumenta la cantidad de producto en el mercado, por otra se obtiene ineficiencia por un uso no adecuado de los recursos. El hecho de que $s \to r$ es decir que la tasa fijada por la autoridad central se aproxime a la competitiva, no supone necesariamente una disminución del grado de sobrecapitalización, pues en definitiva esto dependerá de dy_1/ds es decir de como se mueva la contratación de mano de obra,lo que en principio es ambiguo. Para ver esta dependencia basta derivar respecto de s la restricción correspondiente al problema (3.9) lo que implica:

$$y_2(s) = \left[I' f_1'(y_1(s), y_2(s)) - w\right] \frac{dy_1}{ds} + \left[I' f_2'(y_1(s), y_2(s)) - s\right] \frac{dy_2}{ds}$$

La interpretación intuitiva es inmediata. Por cuanto s está fija en la restricción ligada al problema (3.9), el capitalista busca ampliar la base sobre la que puede obtener ganancia, es decir amplia y_2 para para poder ampliar la diferencia $p[f(y)]f(y) - wy_1$ base de su ganancia.

En definitiva la valoración final entre el aumento de la ineficiencia por no minimizar los costos y la mayor cantidad de producto en el mercado dependerá del criterio político seguido.

3.1.5 Regulación vía precios

Supongamos el caso de un monopolio natural, es decir que consigue mantener su posición dominante sin ayuda legal de ningún tipo, pero que, por diferentes factores estructurales, altos costos de entrada por ejemplo, o bien que por la eficiencia técnica sea preferible mantener una única firma, consigue obtener beneficios positivos en el largo plazo, esto es, imponer precios por encima del costo medio. En este caso la regulación es pertinente.

La regulación vía precios consiste en determinar en la oficina reguladora unos precios de venta que se estimen adecuados, de forma que se ajusten a los cambios posibles en los costos. Una forma sencilla de lograr esto es que se obligue a la empresa a no vender por precios mayores a aquellos que impliquen los costos medios en más de una cierta cantidad prefijada. Como veremos es esta una idea sencilla y que no agrava la ineficiencia como en el caso anterior. La utilización de los factores no se ve distorsionada. Dos problemas aparecen en este caso, en primer lugar los costos no son estáticos y estos deben ser declarados por la propia empresa que será regulada y esa declaración es difícilmente comprobable. Segundo, en el caso de precios en partes y en general no lineales hace difícil la imputación de los costos fijos a cada nivel de precios.

El problema a resolver será entonces el de encontrar unos precios tales que resuelvan el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} &Max_{y_1>0,y_2>0}\; p[f(y)]f(y) - wy_1 - ry_2 \\ &s.a. : p[f(y)] - \alpha\tfrac{wy_1+ry_2}{f(y)} \leq 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

siendo $\alpha > 1$ impuesta por la autoridad reguladora central, $y = (y_1, y_2)$ donde y_1 es la demanda por trabajo, e y_2 la demanda por capital de la firma.

Las condiciones de primer orden para este problema son:

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)2pf(y)f_{y_1}(y) - (1-\lambda\alpha)w = 0 \\ &(1-\lambda)2pf(y)f_{y_2}(y) - (1-\lambda\alpha)r = 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

De estas ecuaciones obtenemos $\frac{f_{y_1}}{f_{y_2}} = \frac{w}{r}$, lo que dice que los factores se utilizan en proporciones óptimas.

Consideremos ahora el problema (3.12) pero en función no de los factores, sino del producto

$$\begin{aligned} &Max_{x\geq 0}\; xp(x) - c(x) \\ &s.a. : xp(x) - \alpha c(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Sea β el multipicador de Lagrange correspondiente a este problema. La solución óptima x^* para este problema, debe verificar la siguiente condición (obtenida a partir de las condiciones de primer orden),

$$\frac{x^* p'(x^*) - p(x^*)}{c'(x^*)} = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} \tag{3.15}$$

Mientras que la solución x_m que maximiza el beneficio del monopolista verifica

$$\frac{x_m p'(x_m) - p(x_m)}{c'(x_m)} = 1. \tag{3.16}$$

Siendo $\frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} < 1$ se obtiene que

$$x^* p'(x^*) - p(x^*) - c'(x^*) < x^* p'(x_m) - p(x_m) - c'(x_m) = 0 \tag{3.17}$$

Los supuestos hechos en la sección (1) permiten concluir que $x^* > x_m$ es decir que se obtiene un producto mayor que en el caso no regulado, consecuentemente precios menores lo que sin duda es el objetivo de toda regulación. Esto supone un aumento en el bienestar social.

3.2 Fijación del precio por el costo medio

La fijación del precio por parte de la unidad reguladora, usando la regla de precio igual al costo medio, parece una solución a primera vista sencilla de implementar, en relación al caso anterior bastaría fijar un α tal que diera como resultado un precio igual al costo medio. No obstante, obtener esta solución no es nada trivial, pues se requiere conocer la estructura de costos de la empresa, estos deben ser declarados por la empresa y son difícilmente comprobables por la oficina reguladora.

Por otra parte esta solución para el caso de monopolios naturales es subóptima. Para probar esto, supongamos que se está produciendo una cantidad $\bar{x}$. Se fija un precio p tal que se cubren los costos, esto es $p = CM(\bar{x})$. Sin pérdida de generalidad suponemos que todos los consumidores a precio $p = CM(\bar{x}))$ demandan la misma cantidad $x_h(p)$ Sea $\bar{x} = \sum_h x_h(p)$. Si el monopolista baja su precio en una cantidad igual a $t > 0$ tal que: $CM(\bar{x}) > p - t > c'(x_s)$, siendo x_s la cantidad que maximiza el bienestar social, es decir que para $x_s = \sum_h x_{hs}$, se obtiene que $\sum_h[u_h(x_{hs}) - c(x_{hs})] \geq \sum_h[u_h(x_h) - c(x_h)], \forall\ x_h \geq 0$ por lo que $c'(x_{hs}) = u'(x_{hs})$. Y si a cada consumidor se le cobra una tasa $tx_h(p)$, tanto el monopolista como los consumidores no estarán peor que antes.

Cada consumidor estará mejor que anteriormente. Veamos que efectivamente el consumidor mejora con el nuevo esquema. En efecto, en el caso en que se fijen los precios por el costo medio $p = CM(\bar{x})$, la utilidad neta de cada consumidor será $U_n = u_h(x_h(p)) - px_h(p)$, en el esquema alternativo dicha utilidad neta será $U_a = u_h(x_h(p-t)) - [(p-t)x_h(p-t) + tx_h)]$, donde u_h representa la utilidad de cada uno de los agentes que asumimos estrictamente cóncavas e iguales para todos ellos. Veamos ahora en que condiciones $U_a > U_n$. Esta desigualdad se cumple si y solamente si

$$\frac{u(x_h(p-t) - u(x_h(p))}{x_h(p-t) - x_h(p)} > p - t. \tag{3.18}$$

Luego, existe $x_h(p) \leq \tilde{x} \leq x_h(p-t)$ tal que

$$\frac{u_h(x_h(p-t)) - u_h(x_h(p))}{x_h(p-t) - x_h(p)} = u_h'(\tilde{x}) > u_h'(x_s) = c'(x_s) \geq p - t. \tag{3.19}$$

Basta entonces la concavidad de la función de utilidad, para que la desigualdad (3.18) se cumpla.

- Los consumidores están mejor consumiendo $x_h(p-t)$ y pagando por unidad $(p-t)$ más la tasa $tx_h(p)$, que si consume $x_h(p)$ y paga p por unidad de producto.
- El monopolista estará mejor bajo este esquema. Pues, siendo: $\bar{x}' = \sum_h x_h(p-t)$ y como además se verifica que: $x_h(p-t) \geq x_h(p) \; \forall \; h$ por lo que se llega a la siguiente desigualdad:

$$(p-t)\bar{x}' + t\bar{x} > p\bar{x}. \tag{3.20}$$

Como conclusión se obtiene la siguiente afirmación:

Proposición 3.1. *La regla precio igual costo medio es Pareto inferior, a la aplicación de un precio en dos partes. El monopolista puede quedarse con todo el excedente social mediante la fijación de un precio en dos partes, obteniéndose entonces una producción eficiente. Podrá utilizar para esto el siguiente esquema:*

1. *Establece para cada consumidor la tasa fija, $tx_h(p)$, siendo $p = CM(\bar{x})$.*
2. *El precio por unidad lo fija en un valor igual a $p-t$.*
3. *Bajo este esquema, el beneficio del monopolista será igual a*

$$\pi_m = t\bar{x} + (p-t)x(p-t).$$

4. *Eventualmente puede fijar $t = p - p_s$ siendo p_s el precio de competencia. Consecuentemente $t\bar{x}$ es igual al exceso del consumidor y $x(p-t)$ la oferta competitiva.*

3.3 Precios no basados en costos

Veremos a continuación que los llamados precios de Ramsey son siempre superiores desde el punto de vista del bienestar social a los precios basados en costos, no obstante no tienen por qué ser precios libres de subsidios cruzados. El por qué de esta afirmación radica en que por una parte en este proceso lejos de mirar sólo a a los costos y beneficios del monopolista se maximiza una medida de bienestar social. Por otra parte, la no consideración de las características de los costos, hace que no se agreguen restricciones adicionales al problema de maximización como estaría exigiendo la no existencia de beneficios cruzados. La referencia original es [Ramsey, F.][1]

Consideremos el problema de un monopolista multiproductor. Supongamos que se producen n bienes diferentes, cuyas funciones de demanda están dadas por $q_i = x_i(p_i),\ i = 1, 2, ..., n$ es decir que asumimos que la demanda por el bien $i-$ésimo sólo depende de su propio precio. Notaremos por $q = x(p)$ a los vectores de R^r que representan las cantidades q_i de bienes producidos a precios $p = (p_1, ..., p_n)$.

Consideremos el siguiente problema de maximización del bienestar social, al que representaremos por W, sujeto a la restricción de cubrir los costos:

$$\begin{aligned} &Max\ W(p)_{p\geq\bar{p}} = \textstyle\sum_i \int_{p_i}^{\infty} x_i(p_i)dp_i \\ &s.a. : \pi(p) = \textstyle\sum_i p_i x_i(p_i) - c(x(p)) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Las condiciones de primer orden para este problema son:

$$-x(p_i) - \lambda \left[x_i(p_i) + (p_i - c'(x(p_i)))\frac{dx_i}{dp_j} \right] = 0, i = 1, 2, ..., n. \tag{3.22}$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos:

$$\frac{p_i - c'}{p_i} = \frac{1+\lambda}{\lambda}\ \frac{1}{\epsilon_i},\ i = 1, 2, ..., n. \tag{3.23}$$

Este resultado es aparentemente paradójico, ya que supone que desde el punto de vista del bienestar lo óptimo es fijar precios mayores

[1] Una forma de estar seguros de que no hay subsidios cruzados es el siguiente test: Consideremos todos los subconjuntos T de índices $T \subseteq \{1, 2, ..., n\}$. Supongamos que el monopolista vende a precios $p = (p_T, p_{-T})$ tales que $p_T x_T + p_{-T} x_{-T} - c(x) = \alpha \geq 0$, entonces no habrá subsidios cruzados si: $p_T x_T = c(x_T, 0)\ \forall T$.

para aquellos bienes de menor elasticidad de demanda, la que se mide por ϵ_i. Siendo que generalmente son los bienes de primera necesidad, los que presentan menor elasticidad de demanda. El resultado es sólo, aparentemente paradójico, ya que lo que se está maximizando es el bienestar social agregado y éste se ve menos afectados si aumentan los precios de aquellos bienes de demanda rígida, precisamente porque serán las demandas correspondientes a estos bienes las menos afectadas por cambios de precios.

La interpretación del multiplicador λ es el costo en términos de bienestar de la restricción de beneficios. Obsérvese que la diferencia proporcional entre los precios óptimos para este problema y el precio competitivo aumenta en la medida en que el valor de λ disminuye[2].

3.4 Ejercicios

Ejercicio 3.2. *Estudie para el caso correspondiente a la sección 3.1.3:*

1. *La cantidad del valor del impuesto que el monopolista, traspasa al consumidor.*

2. *Realice el estudio de pérdida de excedente social.*

Ejercicio 3.3. *A partir de las condiciones de primer orden para el problema del monopolista y las condiciones habituales sobre las curvas inversa de demanda y de costos:*

1. Muestre que la pendiente de la curva de costos marginales es siempre mayor que la pendiente del ingreso marginal.

[2]Para cerciorarse de que los precios de Ramsey no son libres de subsidios cruzados, resuelva el problema de maximizar el bienestar social: $Max\ W(p)_{p\geq\bar{p}} = \int_{p_1}^{\infty} x_1(p_1)dp_1 + \int_{p_2}^{\infty} x_2(p_2)dp_2$ con las restricciones que aseguran la no existencia de beneficios cruzados: es decir precios tales que haya cobertura de costos: $p_1x_1 + p_2x_2 - c(x_1, x_2) = \alpha \geq 0$ y verifique la no existencia de subsidios cruzados: $p_1x_1 = c(x_1, 0)$, $p_2x_2 = c(0, x_2)$. Compare las CPO, para este caso y las que obtendría en el equivalente de Ramsey.

2. ¿Qué importancia tiene esta situación para el modelo?

3. Muestre que el monopolista trabaja siempre en una región de elasticidad $\epsilon > -1$.

Ejercicio 3.4. *Suponga que la función de demanda está dada por* $D(p) = 100 - 2p$. *Un monopolista tiene una función de costo igual a* $c(y) = 2y$. *Obtenga el producto óptimo y el precio unitario correspondiente.*

Ejercicio 3.5. *Análogamente al ejercicio anterior para los casos en que:*

1. $D(p) = 10p^{-3}$ y además, $c(y) = 2y$.

2. $D(p) = 100/p$ con $c(y) = y^2$.

Ejercicio 3.6. *Si a un monopolista que opera con* $\epsilon = -3$ *se le impone una tasa por unidad de producto igual a* \$6. *Si la curva de costos es lineal:*

1. ¿En cuánto aumentará su precio?

2. ¿Podría dar una idea de la forma de la curva de demanda para que la elasticidad sea constante?

Ejercicio 3.7. *Suponga que a un monopolista se le impone una tasa* t *sobre el producto, y que hace frente a una función de demanda definida por* $D(p) = 24 - 4p$ *siendo* $c(y) = 1 + 3y$ *la función de costos.*

1. Muestre que el producto óptimo $y_m^*(t)$ decrece con la tasa y el precio $p_m^*(t)$ crece.

2. ¿Qué sucede con los beneficios del monopolista considerados como función de t.?

3. Muestre que hay exceso de gravamen.

4. Discuta el resultado en función del exceso del consumidor.

Ejercicio 3.8. *(*Difícil*) Muestre que en las condiciones generales del modelo la oferta monopolista y los beneficios decrecen con la tasa sobre el producto, mientras que el precio sube.*

- **Ayuda** A partir de las CPO, obtenga entonces $\frac{dy(t)}{dt}$ use las condiciones de segundo orden.

Ejercicio 3.9. *Suponga que la función de costos en la industria es de la forma $c(y) = 2y + 4y^2 + 100$.*

1. Dibuje las curvas de costo medio y costo marginal para la industria.
2. Suponga que el precio de equilibrio corresponde al de corte de ambas curvas. Calcúlelo.
3. Muestre que si la rama está monopolizada entonces el monopolio estará produciendo en la zona donde los costos medios son decrecientes.
4. ¿Qué sucedería con la firma monopolista si el regulador lo obliga a fijar el precio en el costo marginal correspondiente a la cantidad que produce?

Ejercicio 3.10. *Para la función de demanda $y(p) = 10 - 5p$.*

1. Calcule $\epsilon(y)$.
2. ¿Cuál será la región de producción de un monopolio?

Ejercicio 3.11. *Suponga un monopolista con una función de costos lineal: $c(y) = 3y + 2$. Suponga que la elasticidad de la demanda de su producto respecto a su propio precio es igual a $\epsilon = -2$.*

1. Calcule el precio óptimo del monopolista y el correspondiente markup.

2. Suponga que la autoridad regulatoria impone una tasa igual t por unidad de producto:

   (a) Calcule la recaudación de la oficina regulatoria.

   (b) Calcule el precio que pagaría el consumidor. ¿Cuál es la diferencia entre la tasa que paga el monopolista y que éste transfiere al precio?

   (c) Si usted fuera el regulador y resolviera imponer una tasa τ sobre el beneficio, ¿cuál sería el valor de la misma si no quiere perder ingreso?

   (d) Comente los resultados obtenidos comparando una situación y otra. Justifique su decisión.

Ejercicio 3.12. *Suponga un monopolista que hace frente a una función inversa de demanda igual a $p(y) = a - by$ y una función de costos definida por $c(y) = \alpha y^2 + \beta y + F$.*

1. Suponga que el monopolista es perfectamente discriminador. ¿Cuál sería el producto que enviaría al mercado y cual el excedente del consumidor apropiado por el monopolista?

2. Suponga que el monopolista impone un precio en dos etapas, una tarifa de ingreso p_1, y un precio unitario p_2. Calcule los valores correspondientes, e indique cuál es la cantidad de excedente del consumidor que el monopolista se apropia en este caso.

Ejercicio 3.13. *Suponga un monopolista discrimina entre dos grupos de consumidores de su producto. Suponga el el grupo 1 tiene una función de demanda $d_1(p) = 6 - \frac{1}{3}p$, mientras que para el segundo grupo ésta* *presenta la forma* $d_2(p) = 10 - \frac{1}{5}p$. *La función de costos está definida por* $c(y) = y^2 + 2y + 2$.

1. Calcule los precios y las elasticidades correspondientes al producto en uno y otro mercado.

2. Calcule las elasticidades relativas.

3. Suponga que el monopolista no consiga discriminar, y enfrenta una demanda $d(p) = d_1(p) + d_2(p)$. Calcule el beneficio del monopolista y compárelo con el obtenido anteriormente. ¿De dónde se obtiene la diferencia?

Ejercicio 3.14. *(*Difícil*) Suponga que en una rama monopolizada de la industria las funciones de costos e inversa de la demanda son lineales.*

1. Obtenga la recaudación fiscal correspondiente a una tasa t sobre el producto.

2. Calcule la tasa $\tau(t)$ sobre el beneficio que permite la misma recaudación.

3. Muestre como varía esta función con t.

Ejercicio 3.15. *Suponga que usted es la autoridad central y puede imponer una tasa u otorgar un subsidio sobre el producto de un monopolista. ¿Qué tasa o subsidio otorgaría para obtener el nivel de producto de competencia?*

Tómese su tiempo y piense antes de responder.

Ejercicio 3.16. *Muestre que es socialmente preferible imponer al monopolista un pago de una sola vez igual a* $\pi_m - \pi_m(t)$ *que imponer una tasa* t *al producto, donde* π_m *corresponde al beneficio del monopolista no gravado y* $\pi_m(t) = p(x_t)x_t - c(x_t)$ *es el beneficio del capitalista gravado.*

Ejercicio 3.17. *Considere el mercado de camionetas, suponga que la demanda de las mujeres por camionetas grandes y agresivas es de la forma* $y_m = a - mp$ *mientras que la de los hombres es* $y_h = a - hp$ *siendo* $0 < m < h$. *Suponga que el costo de producción por unidad es igual a* c.

1. Calcule la oferta y el precio de competencia.

2. Suponga que la rama está monopolizada, pero que está prohibido discriminar. Calcule entonces la oferta y el precio de monopolio.

3. Suponga ahora que es posible discriminar. Calcule la oferta y el precio en cada mercado (el de los hombres y el de las mujeres).

   (a) ¿Bajo qué condiciones hombres y mujeres consumen cantidades positivas del bien?

   (b) ¿Quién consume más unidades, los hombres o las mujeres?

   (c) ¿En qué mercado el monopolista fija el precio mayor, en qué mercado el beneficio del monopolista es mayor?

4. Analice las diferentes situaciones y compárelas desde el punto de vista de los beneficios totales del productor, desde el punto de vista del bienestar social agregado y desde el punto de vista de los consumidores.

Capítulo 4

El enfoque de la teoría de juegos

Analizaremos en esta sección, en particular, el caso de ramas de la producción en las que actúan pocas firmas, y pueden ejercer poder de mercado, es decir fijar precios y cantidades a producir en función de sus propios intereses. Discutiremos, en general, el comportamiento estratégico de los diferentes integrantes de la sociedad. Empresarios, consumidores y un planificador central serán los protagonistas, en una economía donde existen firmas capaces de ejercer poder de mercado en forma sostenible a pesar de no ser monopolios naturales y a pesar de la no existencia de trabas legales al ingreso de nuevos competidores. Entendemos por comportamiento estratégico de un agente económico, aquel en el que buscando sus mejores oportunidades, toma en cuenta el comportamiento posible de los potenciales competidores y las repercusiones de éste, sobre los resultados posibles de sus propias estrategias. El objetivo del planificador central será, cuando intervenga, el de diseñar un mecanismo idóneo que predisponga a los agentes económicos a elegir entre sus posibles estrategias, aquellas que lleven a maximizar el bienestar social. Tomará en cuenta para esto la estructura de mercado en el que interviene como un agente exógeno y las características de los agentes que en él actúan. Podrá elegir entre participar o no, en el juego, en caso de elegir participar, su objetivo será el de maximizar el bienestar social.

En la primera sección de este capítulo analizaremos las consecuencias de la acción de un planificador, en el caso en que, ante la existencia de una rama del mercado monopolizada, decide participar, produciendo un bien sustituto al producido en la rama monopolizado y ofertándolo al precio competitivo.

A diferencia del mercado monopolista, el mercado oligopolista supone la existencia de más de una firma con poder de mercado, y que por lo tanto, a diferencia del caso en el que existe competencia perfecta, los precios no serán considerados por las firmas oligopolistas parámetros, por el contrario ellas elegirán precios o cantidades a ofertar, pero en cada caso tendrán en cuenta el comportamiento posible de las otras empresas. Es decir, tomarán decisiones estratégicas. En la mayoría de las ramas de la industria existe una mezcla de comportamientos monopólicos y competitivos. Un claro ejemplo es la industria automotriz. Ciertamente cada firma tiene el monopolio sobre la marca, pero diferentes firmas producen artículos que si bien no tienen exactamente las mismas características son substitutos cercanos. Los economistas refieren este fenómeno como diferenciación del producto. Es decir es beneficioso competir en la rama con un producto diferente pero similar, sobre los que cada firma tiene poder de monopolio. Las referencias bibliográficas a este tema son amplias. El original y seminal trabajo [Cournot, A] es una referencia ineludible, muchas de las presentaciones posteriores del tema resultan variantes más o menos inteligentes de este trabajo. No obstante debe mencionarse la excelente presentación del tema en [Fudenberg, D.; Tirole, J.] cuya relación con el cuerpo de la moderna teoría de juegos es discutida en diferentes capítulos del mencionado trabajo. Casi todos los textos de organización industrial presentan este enfoque, en particular [Shy, O.]. No discutiremos mayormente este tema pues es ampliamente conocido. Intentaremos hacer una presentación resumida tal que muestre los tres enfoques clásicamente discutidos: El de A. A.Cournot [Cournot, A] el de J.L.F. Bertrand [Bertrand, J.] y el de H.F. von Stackelberg, [Stackelberg, H.F.], dejando parte de la temática como ejercicios para el lector.

Comenzaremos esta discusión con una pregunta cuya formulación, si bien es elemental y responderla parece una necesidad inmediata, no siempre es presentada, y a pesar de lo trivial de su respuesta, muchas veces no parece clara. Se trata de una rama en la que existe un monopolio, y como forma de mejorar la ineficiencia de la rama, el planificador central decide entrar en el mercado con un producto similar. La pregunta es la siguiente:

A los efectos de mejorar la eficiencia de la rama y el reparto del excedente ¿debe entrar y actuar como una firma competitiva o compitiendo en forma oligopolística?

4.1 Competencia o regulación?

La pregunta clave de esta sección, es acerca de si la introducción de una firma, actuando en forma competitiva, es o no, una política adecuada, cuando el estado intenta disminuir la ineficiencia en una rama de la producción monopolizada. Ya vimos en la sección (3) que si un regulador central pretende imponer precios competitivos a ramas monopolizadas, puede obtener ineficiencias en el caso en que la empresa monopolista sea pública, o directamente la no producción del bien cuando la empresa es privada, lo cual puede suponer una pérdida importante de bienestar social. En este caso veremos la pertinencia o no de que el regulador elija el precio competitivo para un producto que lanzará al mercado como substituto para un producto que es producido por una empresa monopolista.

Supongamos a continuación que el regulador decide, a los efectos de competir con un producto cuya producción se realiza en condiciones de monopolio, producir un bien similar (sustituto) ofreciéndolo a precios competitivos. El regulador busca maximizar el bienestar social. La pregunta es si esta estrategia es o no una mejor respuesta a la acción monopolista.

Supongamos que la sociedad produce n bienes de acuerdo a una tecnología $F(x) = 0$. La asignación eficiente $\bar{x}$ es aquella que maximiza la utilidad del consumidor y que verifica la restricción tecnológica, es decir se trata de encontrar un valor $\bar{x} : F(\bar{x}) = 0$ y tal que verifique que, $U(\bar{x}) \geq U(x), \ \forall \ x : F(x) = 0$.

Las condiciones de primer orden para este problema, asumiendo que el máximo sea interior a la restricción implican que para el valor óptimo debe cumplirse que:

$$\frac{d}{dx_j}[U(x) - \lambda F(x)] = 0, \ \forall j = 1, 2, ..., n. \tag{4.1}$$

Donde $\frac{d}{dx_j}$ representa la derivada con respecto a la variable x_j y λ el correspondiente multiplicador del Lagrange.

Supongamos que por algún motivo la producción del $n-$ésimo bien no se realiza en condiciones competitivas. En este caso entonces la condición de primer orden correspondiente a este bien no se verifica, podemos suponer que existe entonces $\alpha \neq \lambda$ tal que:

$$\frac{d}{dx_n}[U(x) - \alpha F(x)] = 0, \ \alpha \neq \lambda. \tag{4.2}$$

El problema de maximización del agente será entonces ahora el de encontrar un óptimo de segundo orden para el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} & max_x \ U(x), \\ & s.a : F(x) = 0 \\ & \tfrac{d}{dx_n}[U(x) - \alpha F(x)] = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Lo cual conlleva las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dx_j}[U(x) - \lambda F(x)] = 0,\ \forall j = 1, 2, ..., (n-1); \\ &\tfrac{d}{dx_n}[U(x) - \alpha F(x)] = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Supongamos que el sector público quiere revertir esta situación de monopolio. Para esto decide producir un bien cercano y_n a x_n y lo lanza al mercado con el precio competitivo. Veamos que el comportamiento competitivo no maximiza el bienestar social.

Para simplificar los cálculos, pensemos en una economía que produce un único bien, al que representamos por x, y cuya producción se realiza bajo condiciones de monopolio. El sector público decide competir con el monopolio existente produciendo el bien sustituto y. Supongamos que las funciones inversas de demanda son $p_x(x, y)$ para el bien x y $p_2(x, y)$ para el bien y.

Maximizar el bienestar social implica maximizar el excedente del consumidor menos los costos de producción. Es decir se trata de resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{máx}_{x\geq 0, y\geq 0} \left\{ \textstyle\int_0^x p_1(u,v)du + \int_0^y p_2(u,v)dv - c_1(x) - c_2(y) \right\} \\ &s.a. : F(x, y) = 0, \\ &U_x(x, y) - \alpha F_x(x, y) = 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde c_1 representa la función de costos para producir el bien x, mientras que c_2, representa la correspondiente función de costos para producir y. Debe tenerse en cuenta que la cantidad consumida del bien público y la del privado estarán ahora relacionadas, sustituimos entonces $x = x(y)$ en el problema de maximizar definido en (4.5). La maximización supone entonces que

$$p_2 - c_2' = -[p_1 - c_1']\frac{dx}{dy} \tag{4.6}$$

Observe que el comportamiento maximizador supone ofrecer el bien y a un precio p_1 mayor que c_1' es decir un comportamiento no competitivo, pues en las condiciones del problema $p_2 > c_2'$

Por lo tanto la respuesta competitiva cuando todo lo demás no es competitivo está lejos de ser eficiente desde el punto de vista de la maximización del bienestar.

Por lo tanto exigir un comportamiento competitivo, con independencia de las características del mercado no tiene justificación desde el punto de vista del bienestar social. Seguir esta regla equivale a pasar por alto la segunda restricción en el problema (4.5).

Se concluye que una asignación de recursos, basada en condiciones que suponen la eficiencia, en un mercado que continúa siendo ineficiente, puede dar lugar a una asignación de recursos Pareto inferior, a otra que suponga violaciones más extensivas a las condiciones de eficiencia. La intuición detrás de esto es que, la distorsión ocasionada por violaciones de las condiciones que suponen eficiencia, puede ser atenuada con distorsiones ocasionadas por otras violaciones a las mismas condiciones de eficiencia. Ver [Lipsey, R. Lankaster, K.].

4.2 Precios en ramas oligopolizadas.

Analizaremos en esta sección el comportamiento de las empresas en un mercado oligopolizado, es decir en un mercado en el que existe un número pequeño de empresas que determinan los precios. Pero de forma tal que, en el momento de decidir, cada firma analizará las posibles elecciones de la otras empresas, las cuales a su vez, también actúan estratégicamente, es decir, actúan considerando las repercusiones de las acciones de las demás, sobre los resultados de sus propias acciones. La existencia de ramas del mercado oligopolizadas es un fenómeno cada vez más común, de ahí la importancia del tema. No obstante nos limitaremos aquí a unas breves consideraciones de la temática por estar esta ampliamente tratado en diferentes textos de microeconomía, como por ejemplo, [Varian, H.] o [Mas-Colell, A. Whinston, M. Green J.].

Comenzaremos con un enfoque tradicional, a partir de un caso en el que n empresas, cuyos costos están representados por funciones reales y convexas, con dominio en los reales positivos, $c_j : R_+ \to R, J = 1, 2, ..., n$, hacen frente a una función inversa de demanda $p(Q)$, siendo $Q = \sum_{j=i}^{n} q_j$ el producto agregado de las n firmas. Modelaremos el comportamiento de las empresas como un juego en forma normal.

El conjunto de acciones posibles A_j (estrategias puras o decisiones estratégicas) de la empresa j está dado por la cantidad del producto que puede elegir producir: $\underline{q}_j \leq q_j \leq \bar{q}_j$. Cada empresa elige una vez y en forma independiente de las otras. Diremos que la elección q_j^* es una mejor respuesta a q_{-j} y lo representaremos como $q_j^* = R_j(q_{-j})$, si el beneficio que obtiene la empresa j al elegir esta cantidad, verifica la desigualdad:

$$\pi_j(q_j^*, q_{-j}) = q_j^* p(Q') - c_j(q_j^*) \geq \pi_j(q_j, q_{-j}) = q_j p(Q) - c_j(q_j) \ \forall \ q_j \in A_j, \tag{4.7}$$

Es decir, que el beneficio obtenido por la firma j al elegir q_j^*, es el máximo posible, dado que las otras firmas eligen $q_{-j} = (q_1, ...q_{j-1}, q_{j+1}, ...q_n)$, donde cada q_i representa la elección de la respectiva empresa $i \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, siendo $Q' = \sum_{i \neq j} q_i + q_j^*$.

Consecuentemente, asumiendo que $q_j^* \neq 0$, se verifica la siguiente igualdad:

$$p(Q') + q_j^* p'(Q') \left[1 + \sum_{i \neq j} \frac{dq_i}{dq_j}(q_j^*, q_j) \right] - c_j'(q_j^*) = 0 \tag{4.8}$$

El término $\frac{dq_i}{dq_j}(q)$ representa la llamada *variación conjetural* indica la modificación que sufrirá la cantidad elegida por la empresa $i-$ésima, al modificar la $j-$ésima su producción. Es llamada conjetural precisamente porque no hay forma de obtenerla más que en base a la experiencia y a las estadísticas. Hace referencia a la conjetura que hace un productor acerca de la modificación en la oferta, que las otras firmas realizarán, como reacción a los cambios en la oferta por él realizados. La hipótesis simplificadora más conocida, consiste en considerar nula la variación conjetural, es decir cada productor piensa que las otras empresas no cambian su propia elección por modificaciones en la cantidad por él elegida.

Un equilibrio de Nash-Cournot es una elección estratégica $q^* = (q_1^*, ..., q_n^*)$ tal que q_i^* resuelve para cada $i = 1, 2, ..., n$ la ecuación (4.8) dado la elección q_{-i}^* de las demás. A estas cantidades corresponde el precio $p^* = p(Q^*)$.

En condiciones muy generales puede demostrarse la existencia de este equilibrio.

Alternativamente podemos considerar el caso en que una empresa actúa como líder y las demás como seguidoras, (este es el planteo originalmente hecho por H.F. Von Stackelberg). Esto supone que por algún motivo la empresa considerada líder elige la cantidad a producir sin tomar en consideración la cantidad que las otras empresas en el mercado ofertarán. La situación no es simétrica pues las demás empresas esperarán la elección de la líder antes de hacer su oferta. En este caso el juego puede plantearse en forma extensiva (esto es, mediante un grafo conexo sin ciclos y enraizado). En el primer nodo (o raiz) de este grafo, elegirá la empresa líder entre sus acciones factibles, la que tomará en cuenta la reacción de las firmas seguidoras a su elección, la que será determinante. A continuación elegirán las demás, sabiendo el nodo en el que están, eligirán una reacción a cada acción de la líder, es decir $q_j = R_j(q_l)$ para cada firma j seguidora, siendo l la firma líder. En términos de la variación conjetural, esto puede plantearse diciendo que mientras la empresa líder, toma en cuenta la variación conjetural, es decir considerará que las demás firmas (las seguidoras), tomarán en cuenta su elección (en tanto que firma líder en el mercado), antes de hacer sus propias ofertas. Lo que matemáticamente se expresa a través de la desigualdad: $dq_j/dq_l \neq 0$, $\forall j$, siendo l la firma líder. Las restantes firmas maximizarán considerando como fija la cantidad elegida por la firma líder, por lo que $dq_l/dq_j = 0$, $\forall j \neq l$, esto representa el hecho de que la contribución de las seguidoras a la oferta, es marginal, y no modifica la elección de la líder. Consideremos un ejemplo con dos firmas, la empresa 1 es la l íder y la dos la seguidora. Sea $q_2 = R_2(q_1)$ la mejor respuesta de la firma 2.

En este caso los precios se fijarán a partir de la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &p(Q) + q_1 p'(Q)[1 + \tfrac{dq_2}{dq_1}] - c_1'(q_1) = 0 \quad && (a) \\ &p(Q) + q_2 p'(Q) - c_2'(q_2) = 0 && (b) \\ &Q = q_1 + q_2(q_1) && (c) \end{aligned} \tag{4.9}$$

que permite obtener cantidades óptimas, luego como en el caso anterior, se determinará el precio y los beneficios correspondientes.

Considerando el caso particular en que los costos de ambas firmas son iguales[1] y lineales, es decir que: $c_1(q) = c_2(q) = cq$, restando las ecuaciones (4.9 (a) y (b)) se tiene que:

$$p(Q^s) + p'(Q^s)\frac{Q^s}{2} + \frac{q_1^s p'(Q^s)}{2}\frac{dq_2}{dq_1} = c$$

lo que muestra que

$$p^c < p^s < p^{nc} < p^m.$$

Puede verse también que, $q_1^s > q_2^s$ luego los beneficios correspondientes a la líder son mayores que los correspondientes a la seguidora. De esta

[1] En este caso la líder se diferencia de la seguidora, por ejemplo en la capacidad instalada

forma en un juego de Satckelberg, cada firma preferirá ser líder desde que la otra sea seguidora.

El equilibrio de Stackelberg puede considerarse como un equilibrio de Nash en un juego extensivo, donde en la primera etapa la líder elige y luego lo hace la seguidora en función de esta elección.

4.3 Colusiones

Como es conocido, existen equilibrios en los que las firmas de un mercado oligopolístico consiguen resultados Pareto superiores que el correspondiente al equilibrio de Nash-Cournot. Como referencia bibliográfica básica citamos [Varian, H.]. La situación mejor desde este punto de vista es aquella en que las firmas existentes pasan a producir como una única firma. Decimos que la firmas coluden, el tema será tratado en la sección siguiente con más generalidad.

En este caso la función a maximizar será:

$$\begin{aligned} &\pi(q_1, ..., q_n) = p(Q)Q - \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i(q_i), \quad i = 1, ..., n; \\ &s.a: \quad q_i \geq 0, \ \forall\, i = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Donde $Q = q_1 + ... + q_n$ siendo $q_i,\ i = 1, ..., n$; la producción de la $i-$ésima firma, con n el número total de firmas. Las condiciones de primer orden necesarias para la solución del problema de maximización de beneficios de la firma unificada, son

$$\begin{aligned} &p'^c(Q^c)Q^c + p(Q^c) + c_i'(q_i^c) \leq 0 \quad i = 1, ...n, \\ &q_i^c \tfrac{\partial \pi_i(q^c)}{\partial q_i} = 0,\ i = 1, ...n. \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde por $q^c = (q_1^c, ..., q_n^c)$ representamos la producción correspondiente al equilibrio de colusión. La firmas se preocupan por maximizar la cantidad total a producir Q, pudiendo suceder que en muchos casos sea conveniente que alguna firma con costos muy altos no produzca. Es decir que la solución hace entonces efectiva alguna restricción. En ese caso se tendrá $q_j^c = 0$. La producción total será menor que la correspondiente al caso del equilibrio de Nash-Cournot es decir $Q^c < Q^{nc}$, los precios superiores $p^c > p^{nc}$ y los beneficios correspondientes también superiores. No obstante, *hay incentivos para que las firmas tomen decisiones de producción diferentes* a las correspondientes a esta situación, (en términos de la teoría de juegos, diríamos que se trata de una situación análoga al dilema del prisionero). Esto es debido a que si las otras se mantienen en la situación $q_i^c \quad \forall i \neq j$ entonces la producción de reacción de la $j-$ésima firma, será $q_j^* = R_j(q_{-j}^c) > q_j^c$ y el beneficio correspondiente para dicha firma será mayor que en el caso de mantenerse en la producción q_j^c, (siempre, claro está, que las otras mantengan el nivel de producción $q_i^* \quad \forall i \neq j$.) Es decir $\pi_j(q_j^*, q_{-j}^c) > \pi_j(q_j^c, q_{-j}^c)$. Donde como habitualmente, por q_{-j} representamos el vector de producción de las $n-1$ firmas que no son la $j-$ésima. Ver ejercicio (4.2).

4.4 Ejemplo

Asumimos que la función inversa de la demanda es diferenciable, con $p'(q) < 0$ y tal que $p(0) > c$. Donde c representa un costo unitario fijo e igual para las dos firmas, $j, k = 1, 2$, que intervienen en el ejemplo.

Para encontrar el equilibrio de Nash-Cournot, la firma j supone $\bar{q}_k$ fijo y resuelve:

$$Max_{q_j \geq 0} p(q_j + \bar{q}_k) - cq_j, J = 1, 2. \tag{4.12}$$

Las condiciones de primer orden para este problema son:

$$p'(q_j + \bar{q}_k)q_j + P(q_j + \bar{q}_k) - c = 0, \ ;\text{con } q_j > 0, \ j = 1, 2. \tag{4.13}$$

Sea $b_j(q_k)$ la función mejor respuesta de la firma j. La solución de Nash-Cournot, $q^* = (q_1^*, q_2^*)$ será la solución de las ecuaciones: $q_j^* = b_j(q_k^*)$.

A partir de las condiciones supuestas para el ejemplo, puede verse que las condiciones de primer orden deben verificarse con igualdad. Sumando estas ecuaciones obtenemos que la solución debe verificar la igualdad:

$$p'(q_j + q_i)\left(\frac{q_j + \bar{q}_k}{2}\right) + p'(q_j + \bar{q}_k) = c. \tag{4.14}$$

Algunas conclusiones:

1. **Afirmación:** Puede verse que la solución de Nash-Cournot en las condiciones anteriores verifica ser tal que el precio es mayor que el competitivo, pero menor que el de monopolio.

2. Para un número de firmas $J \geq 2$ se obtiene el resultado:

$$p(Q_j^*)\frac{Q_j^*}{J} + p(Q_j^*) = c, \tag{4.15}$$

siendo Q_j^* el producto agregado de las J firmas. Obsérvese que cuando $J \to \infty$ se obtiene la solución competitiva.

Demostración de la afirmación: Suponga que la cantidad de monopolio q^m verifica que $q^m \geq (q_1^* + q_2^*)$. En este caso el beneficio de ambas firmas mejorará, si la $j-$ésima firma elige: $\bar{q}_j = q_m - q_k^*$ pues en conjunto las firmas estarían obteniendo el beneficio de monopolio que es el máximo posible, luego la solución de equilibrio sería $q^* = (\frac{q^m}{2}, \frac{q^m}{2})$. Obteniéndose entonces que $p'(q^m)\frac{q^m}{2} + p(q_m) = c$, lo que es absurdo. Finalmente la única solución posible es $q^m < (q_1^* + q_2^*)$.

4.5 Dificultades de esta explicación

Este mecanismo de formación de precios ha sido criticado por considerarse poco realista. En él las empresas compiten vía cantidades, eligen la cantidad que enviarán al mercado y a partir de allí los precios. El mecanismo parece ser exactamente al revés, la velocidad de ajuste de precios es mayor que el de cantidades, por lo que primero se ajustarán éstos y luego aquellas. No obstante, el modelo permite sacar una serie de conclusiones importantes sobre la formación de coaliciones,las que en definitiva terminan eligiendo el equilibrio de Nash Cournot. El modelo alternativo al de ajuste por cantidades, es el de competencias vía precios de Bertrand. Este mecanismo presenta la particularidad de ser más realista en el sentido indicado anteriormente. Su resultado es que siendo homogéneo el producto ofertado por los oligopolistas se obtiene el precio competitivo. Este resultado no es sorprendente, por cuanto es claramente posible obtener a partir de la competencia de un número reducido de empresas un resultado competitivo. Por otra parte enfocado desde el punto de vista de la teoría de juegos supone que se obtiene el mejor resultado posible desde el punto de vista del bienestar, partiendo de comportamientos racionales. Existen casos de mercados oligopolizados en el que las firmas no llegan a acuerdo de colusión y terminan ofertando sus productos a precios cercanos a los competitivos. No obstante es claro que no es una situación común aquella en la que los oligopolistas se comporten como empresas competitivas. Ver ejercicio (4.4).

La situación poco satisfactoria en la que se encuentra la teoría de juegos a partir de estos modelos, puede superarse (de acuerdo a la sugerencia de F.Y. Edgeworth) considerando que las empresas no son homogéneas en capacidades. En el momento de su instalación deben elegir su capacidad de producción y recién después podrán competir vía precios. Esto permite hacer un modelo en dos etapas, en la primera se compite por cantidades, en la segunda por precios. Por otra parte si suponemos que la capacidad de cada empresa es limitada, podemos pensar que no es suficiente para que cada empresa por separado sea capaz de producir la cantidad competitiva. En este caso ciertamente no venderá su producto de acuerdo al precio competitivo, pues de hacerlo incurriría en pérdidas. De ahí que en el momento de competir por precios deban tener en cuenta la capacidad elegida en la primera etapa. Es posible suponer que en el momento de elegir capacidades se compita por cantidades a la Cournot,y en la segunda etapa, una vez instaladas las firmas con capacidades diferentes, aún compitiendo vía precios lleguen a resultados diferentes al competitivo.

4.6 Ejercicios

Ejercicio 4.1. *Para explicar las prácticas monopolistas de algunas industrias que aparentemente no gozan de costos decrecientes, los economistas desarrollaron la teoría de la colusión. Explique por qué la colusión es favorable para las empresas oligopólicas. Suponga que cada empresa por separado maximiza su ingreso ¿por qué el equilibrio competitivo falla al maximizar las utilidades de todas las empresas en conjunto?*

Ayuda: Considere las curvas de costos totales de las empresas por separado $CA(y) = \sum_i C_i(y_i)$ siendo $y = \sum_i y_i$ la curva de demanda inversa $P(y)$, obtenga el punto y_c que verifica $\frac{dCA}{dy}(y) = P(y)$. Obtenga luego las correspondientes condiciones en el caso en que las firmas coludan y actúen como una única firma monopolista.

Ejercicio 4.2. *(Difícil) Suponga que en una rama de la producción hay establecidas solamente dos firmas, la firma 1 y la firma 2, con costos diferentes, $c_i(y)$, $i = 1, 2$. Sea $y = y_1 + y_2$ la oferta total del producto, siendo y_1 e y_2 la oferta de las firmas 1 y 2 respectivamente, que hacen frente a una función inversa de demanda dada por $p(y)$.*

1. *Obtenga las condiciones de primer orden, del problema de Cournot.*
2. *Plantee el problema de maximización si ambas firmas coluden.*
3. *Muestre que en este caso puede suceder que se decida producir solamente con una firma. Explique esta solución.*

Ayuda: *la maximización se realiza bajo las restricciones* $y_1 \geq 0, i = 1, 2$. *Plantee las condiciones de Khun-Tucker.*

4. *Discuta el caso de colusión con costos lineales, es decir* $c_i(y_i) = a_i y_i + b_i$, *siendo* a_i *y* b_i *constantes positivas;* $i = 1, 2$.

5. *Muestre que en el caso de colusión, si* $y_1 > 0$ *e* $y_2 > 0$, *deben verificarse además de las condiciones de primer orden, con igualdad, la condición de costos marginales iguales, es decir que* $c_1'(y_1) = c_2'(y_2)$.

6. *Muestre que el equilibrio de Nash-Cournot no es óptimo de Pareto, en el sentido de que ambas firmas pueden mejorar sus beneficios.*

7. *Dibuje en el plano* (y_1, y_2) *las curvas de iso-beneficios de las firmas en caso de competencia a la Cournot. Muestre que los beneficios de la firma 1 para* y_1 *fija disminuyen cuando aumenta la producción* y_2 *de la firma 2. Análogamente para la firma 2.*

8. *Identifique la región de mejora paretiana en el gráfico anterior. Muestre que ambas firmas pueden alcanzar óptimos de Pareto, que mejoran al equilibrio de Nash-Cournot. Identifique este camino en el gráfico anterior.*

9. *Muestre que el equilibrio de colusión no es estable.*

10. *Explique a la luz de la teoría de juegos repetidos cómo puede mantenerse.*

11. *Para el caso* $p(y) = 100 - y, \quad c_1(y_1) = 3y_1^2 \quad c_2(y_2) = 2y_2^2 + 4y$ *obtenga las funciones de reacción y represéntalas en el plano* (y_1, y_2).

12. *Muestre que el equilibrio de Nash-Cournot es en este caso, estable.*

13. *Obtenga los resultados de todos los itemes anteriores.*

14. *Calcule los beneficios en el caso de competencia a la Cournot, y en el caso de colusión.*

15. *Compare los resultados obtenidos con la solución para el caso de competencia perfecta.*

Ejercicio 4.3. Competencia a la Stackelberg *Suponga un mercado con dos firmas, una la firma 1 es líder y otra la firma 2 es la seguidora. La firma líder elige la cantidad y_1 de producto que enviará al mercado. La seguidora elige la cantidad de producto que enviará al mercado pero tomando en cuenta la elección de la firma 1. Sea y la cantidad total de producto en el mercado, es decir $y_1 + y_2 = y$. Asumiendo que los costos de la empresas son $c_1(y_1)$ para la líder y $c_2(y_2)$ para la seguidora, y $p(y)$ la función de demanda inversa.*

1. *Plantee el problema de maximización de la firma seguidora.*

2. *Plantee el problema de maximización para la firma líder. Tenga en cuenta que $y_2 = f(y_1)$.*

3. *Suponga $p(y) = a-by$. Con costos $c_1(y) = a_1$ y $c_2(y) = a_2y$. Donde a, b, c_1, c_2 son constantes positivas convenientemente elegidas.*

4. *Compare el resultado obtenido con el correspondiente resultado si la competencia fuera a la Cournot.*

Ejercicio 4.4. Competencia a la Bertrand *Considere una rama oligopolizada compitiendo por precios, con n firmas que enfrentan costos de producción respectivos, $c_i(y)$, $i = 1, ..., n$ y una función de demanda $D(p)$ compitiendo por precios.*

1. *Muestre que la firma con costo marginal más bajo, en el caso en que sea capaz de producir por un precio menor al costo marginal*

de su competidora más cercana, termina apoderándose de todo el mercado ofertando a un precio p por debajo del costo marginal de la siguiente con menor costo marginal y no menor al suyo propio.

2. *Suponga un mercado con una firma líder y varias seguidoras. Sea $L(p)$ el sector del mercado para el que la firma líder produce, mientras que $Y_f(p) = D(p) - L(p)$ representa el mercado abarcado por las seguidoras. Plantee el modelo de competencia, en el caso en que la líder anticipe correctamente la acción de las seguidoras, es decir en que conozca $Y_f(p)$.*

4.7 Juegos repetidos y formación de coalisiones.

Todas las soluciones vistas hasta ahora son soluciones no cooperativas. Ninguna de ellas maximiza los beneficios conjuntos, con excepción de la monopolista, la que sólo se logra si las firmas acuerdan, de alguna manera, entre ellas la forma de repartirse el mercado y los beneficios correspondientes. Esto sólo puede conseguirse en el caso en que las firmas se fusionen, formen cartel o hagan algún acuerdo, el que muchas veces no puede ser explícito, pues las leyes antimonopolistas de algunos países prohiben este tipo de acuerdo. Alternativamente aparece la posibilidad de que el juego se repita infinitamente, o que no se le vea fin a las posibles repeticiones, y entonces por posibles premios y temor a castigos eternos al comportamiento seguido por cada firma, se alcance la solución cooperativa. La posibilidad de castigo por desviaciones individuales, presiona a mantener un comportamiento que cooperativamente y en el largo plazo resulta mejor, aunque individualmente sea preferible desviarse en cada etapa. La posibilidad de castigo en la siguiente etapa, por un mal comportamiento en el presente, impide la inminente desviación. Ciertamente, para que esta amenaza sea creíble, el fin del juego no tiene que estar a la vista. Los castigos a quien se desvía, muchas veces suponen también pérdidas, al menos circunstanciales, para quien castiga. La posibilidad de castigar dependerá entonces también, del poder de quien lo efectúa, y de las posibilidades de recuperación, las que muchas veces están asociadas a la valoración que se tiene del futuro del castigado y el castigador. El castigo no tendrá efecto, si quien se desvía tiene por el futuro escasas preferencias, en este caso el castigo futuro aunque sea permanente, importará menos que las ganancias actuales.

Los acuerdos entre oligopolistas pueden tener diversas formas:

- Coalisiones con acuerdos explícitos o tácitos (los más frecuentes, pues generalmente existen leyes antimonopolistas) para repartirse el mercado, o los beneficios conjuntos, o imposición de precios.
- Fusiones, varias empresas se convierten en una.
- Colusiones tácitas a partir de incentivos endógenos no explicitados, sin necesidad de fusiones explícitas.

La inestabilidad, es propia de los acuerdos tácitos pues individualmente, cada firma prefiere salirse del acuerdo. La formación de colusiones presentan para su realización los siguientes problemas y necesidades para ser estables:

- Disponibilidad de información de las empresas que forman el cartel.
- Detección de transgresores.
- Evitar la entrada de nuevos competidores.
- Prohibiciones gubernamentales de colusiones explícitas.
- Posibilidades de castigar a la empresa que se desvía. Generalmente hacerlo implica pérdidas económicas también para quien castiga.

No obstante las colusiones tácitas, pueden lograrse con juegos que se repitan una infinidad de veces o cuyo horizonte sea incierto. La incertidumbre sobre el momento en que se detiene el juego y la consecuente posibilidad de castigo a quien no siga una determinada conducta, posibilitan la aparición de colusiones implícitas que consiguen el comportamiento monopólico, bajo la amenaza del castigo a la traición. Obsérvese que si varias firmas ofertan una cantidad tal que en conjunto igualen a la oferta monopólica, conseguirán precios monopólicos y los consecuente beneficios que se repartirán con provecho. Si alguna de ellas decide enviar al mercado una cantidad mayor de producto a menor precio, logrará beneficios elevados y el consecuente dominio del mercado. Esto hace pensar que en principio la solución cooperativa es inalcanzable si no median acuerdos explícitos y castigos a quienes los violen. Por otra parte en presencia de asimetrías, la empresa más débil no siempre es capaz de castigar un desvío de la más fuerte sin incurrir ella misma en grandes pérdidas, lo que puede hacer imposible el castigo, sólo presente como amenaza no creíble.

En la siguiente sección un ejemplo nos permitirá aclarar los puntos recientemente discutidos.

4.7.1 El dilema del prisionero repetido

En ciertas ocasiones la cooperación aparece como resultado de un comportamiento racional en el marco de un juego no cooperativo. Las amenazas creíbles y los beneficios esperados en el futuro, hacen posible este resultado. Consideremos el siguiente juego en forma normal: Cada jugador puede elegir entre una de dos estrategias, lanzar al mercado la oferta correspondiente a la mitad de la de monopolio x^m, o bien la correspondiente al equilibrio de Curnot x^c Los retornos correspondientes están expresados en la siguiente matriz: $\pi^m > \pi^\epsilon > \pi^m/2 > \pi^c$ siendo

π^m el beneficio de monopolio, y π^c el beneficio de Cournot.

$$A = \begin{bmatrix} (\pi^m/2, \pi^m/2) & (0, \pi^\epsilon) \\ \\ (\pi^\epsilon, 0) & (\pi^c, \pi^c) \end{bmatrix}$$

Supongamos que el juego se repite infinitamente.

El valor actualizado correspondiente a la estrategia (x_t^m, x_t^m) para todo $t = 1, 2, ...$ para cada uno de los agentes será:

$$V_i(x^m, x^m) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \frac{\pi^m}{2} = \frac{\pi^m}{2(1-\delta)}, \ i = 1, 2. \tag{4.16}$$

El jugador i juega x^m si j hace lo mismo, en otro caso cambia para x^c para siempre.

Si en el período $t = T$ el agente j decide cambiar de estrategia el retorno será: $V_j = \sum_{t=1}^{T-1} \delta^t \frac{\pi^m}{2} + \delta^T \pi^\epsilon + \sum_{t=T+1}^{\infty} \delta^t \frac{\pi^m}{2} =$

$$= \frac{\pi^m}{2} \frac{1-\delta^T}{(1-\delta)} + \delta^T \pi^\epsilon + \frac{\delta^{(T+1)}}{(1-\delta)} \frac{\pi^m}{2}. \tag{4.17}$$

Obsérvese que $V_j(x^m, x^m) > V_j \quad \forall \delta > \frac{\pi^m/2 - \pi^\epsilon}{\pi^c - \pi^\epsilon}$. Por lo que si el jugador j está interesado en el futuro preferirá jugar siempre x^m. La repetición y la posibilidad del castigo permite que se obtenga la solución cooperativa o de monopolio, pero a la vez abre la posibilidad a la aparición de infinitos nuevos equilibrios. Tal es el contenido de los llamados *folk theorems*, ver por ejemplo [Fudenberg, D.; Tirole, J.].

El resultado cooperativo no se puede alcanzar si el juego tiene una cantidad finita de períodos y el momento de su finalización es conocido por ambos jugadores. En el último período ambos prefieren traicionar, lo que será tomado en cuenta por cada jugador, esto lleva a que consecuentemente la estrategia elegida sea a lo largo de todo el juego la correspondiente al equilibrio de Cournot, traicionar siempre.

Debe tenerse en cuenta que castigar al traidor también implica un perjuicio para quien castiga. Por lo que la posibilidad de este castigo está relacionada con las características de cada firma. Si bien se mencionó una estrategia que castiga en forma eterna a quien se desvía de la solución cooperativa, no es necesaria una respuesta tan drástica para obtener la solución cooperativa, en este caso la monopólica. La amenaza del castigo, aunque no sea eterno, puede ser suficiente para obtener la referida solución. El tema es de interés de muchos investigadores en la actualidad, y puede encontrarse un tratamiento amplio y cuidadoso en por ejemplo [Fudenberg, D.; Tirole, J.], o [Osborne, M.; Rubinstein, J.].

4.8 Barreras a la entrada

En ciertas actividades productivas la existencia de barreras a la entrada son de carácter natural o legal. Entre las primeras encontramos las dificultades para la movilidad geográfica del personal, restricciones al acceso a determinados insumos, o la imposibilidad de una empresa para obtener recursos financieros cuando el costo del uso del capital, resulta superior al rendimiento del proyecto productivo, entre las segundas figuran las trabas legislativas creadas con el objetivo de favorecer a determinados monopolios. En este caso la discusión que importa es la factibilidad de terminar con las barreras o la conveniencia o no, de mantenerlas.

Discutiremos en este capítulo la existencia de barreras a la entrada, creadas por la acción estratégica de la o las firmas establecidas con el objetivo de evitar la entrada de firmas potencialmente competidoras, de forma tal de mantener su poder de mercado, expresado a través de la existencia de precios superiores al marginal o al medio y los consecuentes beneficios extraordinarios.

Haremos el análisis de este tema considerando un juego extensivo entre dos empresas, una instalada, representada por la notación I y otra que amenaza con entrar a la que denominaremos E. Comenzamos con un juego sencillo, mientras que E debe decidir entre entrar e o no entrar *noe*, I debe decidir como responder a una estrada de E, es decir deberá elegir entre dos acciones posibles, luchar l o aceptar (nol) la entrada y compartir el mercado.

Suponemos que si E decide no entrar, los retornos serán, los beneficios correspondientes al monopolista π^m para E y 0 para I. Mientras que si E decide entrar entonces, I deberá decidir, entre luchar l por mantener su situación de privilegio o compartir con E el mercado, lo que corresponde a la elección *nol*.. En el primer caso, los retornos para E e I respectivamente serán (π^L, π^l), siendo $\pi_l < 0$. En el caso en que decida compartir los retornos serán (π^d, π^d) respectivamente, siendo $\pi^m > \pi^d > 0 > \pi^l$. Un primer análisis del juego muestra que E prefiere *noe* ante la amenaza de que a su vez E juegue l. Más aún $(noe; l)$ es un equilibrio de Nash. De esta forma la amenaza de conflicto detiene la entrada de I. Pero observando con un poco más de detenimiento, si efectivamente el entrante, E decide usar su estrategia e (entrar) entonces la elección l por parte de I (la firma establecida) no mejora nada y más bien empeora su propia situación. Ver figura (8). El entrante entonces sabe que esto sucederá, por lo que termina eligiendo e mientra que I a su vez eligirá *nol*, más aún se puede ver que el par estratégico (e, nol) es un equilibrio de Nash. De esta forma E no cree en la amenaza de E por lo que la barrera a la entrada es no creíble, y termina no funcionando como tal. Incluso en el caso en que el juego se repita una cantidad finita de veces, la inducción hacia atrás muestra el mismo resultado cada vez, pues en la última etapa el juego es como antes, y luego yendo hacia atrás, en cada una de las etapas anteriores el juego se repite como antes obteniendo entonces, el mismo resultado. Notemos también que aún en el caso de un juego que se repita una cantidad infinita de veces , la solución (e, nol) en cada etapa, conforma un equilibrio de Nash del juego repetido, aunque en este caso, existen además otros equilibrios de Nash que implican que la firma establecida elija luchar en algunas etapas,

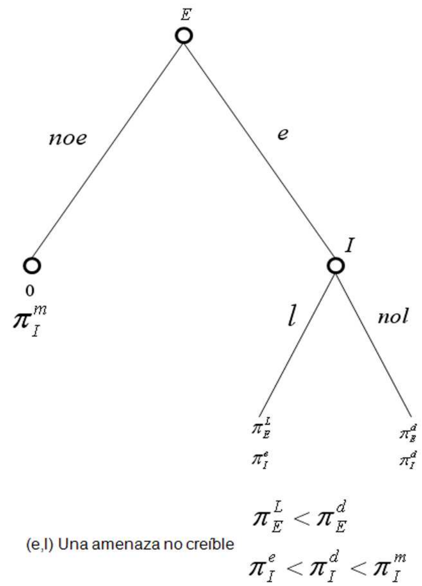


Figura 4.1: Palabras, palabras

aún a riesgo de pérdidas circunstanciales, para evitar la entrada de la competidora y así mayores pérdidas.

No obstante ser el equilibrio de Nash, (e, nol) (la entrante entra y la competidora no lucha), claro, y el único posible para los jugadores racionales involucrados en un juego como el anteriormente representado, no es cierto que todo competidor potencial entra y el establecido se acomoda buenamente. El secreto está en que las amenazas no creíbles, pueden ser transformadas en creíbles.

¿Cómo se transforma entonces una amenaza no creíble en una creíble? es el motivo de atención de la siguiente sección.

4.8.1 Una amenaza no creíble se transforma en una creíble

Como ya fue dicho, un resultado diferente puede obtenerse cuando el juego se repite infinitamente, o bien equivalentemente, en el caso de que los jugadores no sepan cuando el juego termina, lo que hace que los jugadores no conozcan cual será la última etapa. En este caso la posibilidad de castigo en alguna (o algunas) etapa puede llevar al equilibrio en el que el entrante no entra, y la firma establecida lucha. La firma establecida puede recuperar, en etapas sucesivas, las pérdidas momentáneas, ocasionadas por la campaña en contra de la entrante, por transformar la amenaza no creíble en creíble. Esta decisión dependerá por lo tanto, de la valoración de la firma establecida de las ganancias futuras. Pero desafortunadamente no es posible preveer el resultado, pues si el juego se repite infinitamente, existen infinitos equilibrios de Nash con diferentes posibles elecciones en diferentes etapas, este es precisamente, el contenido de los llamados *folk theorems*, ver [Fudenberg, D., B. Holmstrom, P.; Milgrom].

Existen alternativas para transformar una amenaza no creíble en creíble aún en el caso de juegos con finitas etapas. Consideremos el caso en que la empresa establecida decida hacer una inversión grande (o amenace con hacerla), que sólo recuperará si mantiene su posición dominante. Analicemos el siguiente juego en dos etapas. En la primera etapa la firma establecida decidirá invertir o no en capital una cantidad k del que además no se puede deshacer fácilmente o no puede utilizar en otras actividades. En la segunda etapa se juega el juego anterior, con diferentes retornos según haya sido la elección de E en la primera etapa. Es importante que la inversión si así lo decide hacer I sea no retornable o no transferible, pues en otro caso E puede pensar que si entra, entonces I se deshace de su inversión vendiendo en el mercado de segunda mano o lo utiliza en otra cosa. Si estas posibiliddes no existen veremos el siguiente ejemplo como la amenza de inversión hecha por E transforma en una amenaza creíble, la posibilidad de luchar si la entrante entra.

Ejemplo 4.5. La inversión como barrera a la entrada *El juego, ahora modificado con respecto al anterior, supone una elección anterior* *por parte de la firma establecida entre la realización o no de una inversión irreversible de valor k. Luego de cada posible elección el juego sigue como antes, pero con retornos diferentes si I elige invertir o no. La firma establecida elige en el nodo inicial entre invertir inv, o no invertir ninv. A continuación, en cada caso, E deberá elegir entre e o noe. Si I optó por ninv en la primera etapa, el juego es a partir de acá el mismo que antes con los mismos retornos y resultados. Pero si I eligió inv y si a su vez E elige e, igual que anteriormente I deberá elegir entre l y nol. Pero los resultados de esta elección serán ahora diferentes respecto a los anteriores. Los retornos respectivos para I y E serán en el caso de elegir l, es decir luchar, $(\pi_I'^l, \pi_E'^l)$. Mientras que si elige nol serán $(\pi_I'^d - k, \pi_E'^d)$. Es decir que el retorno para I asociado al perfil $(inv, l; e)$ será $R_I(inv, l; e) = \pi_I'^l$ análogamente para E, $R_E(inv, l; e) = \pi_E\prime l$. En el caso en que I decide nol los retornos asociados al perfil estratégico $(inv, nol; e)$, estarán definidos por el vector $(\pi_I'^d - K, \pi_E'^d)$. Es decir que $R_I(inv, nol; e) = \pi_I'^d - k$, mientras que $R_I(inv, nol; e) = \pi_E'^d$. Pero si E decide finalmente noe tendremos entonces los retornos siguientes: $R_I(inv, nol; noe) = R_I(inv, l; noe) = \pi_I^m - k$ y $R_E(inv, nol; noe) = R_e(inv, l; noe) = 0$*

Obsérvese que si $\pi_I'^l - k < \pi_I'^l < 0$ entonces habiendo entrado E, la mejor alternativa para I es luchar. En este caso E preferirá no entrar, pues obtendrá entonces un beneficio 0 que es mayor que $\pi_I'^l$ que es el que obtendría en el otro caso. Como además suponemos que $\pi_I^m - K > \pi_I'^d > 0$ entonces I preferirá invertir en la primera etapa, esto supone que la inversión en capital por parte de I eleva sus beneficios. El equilibrio de Nash (perfecto en subjuegos) para este juego será entonces $(i, l; noe)$, es decir que en sus repectivos nodos I jugará invertir y luego luchar, mientras que E eligirá no entrar. Al mantenerse en el mercado como monopolista, I recuperará las pérdidas que supone la inversión K. Más aún, siendo esta inversión productiva, como fue mencionado,

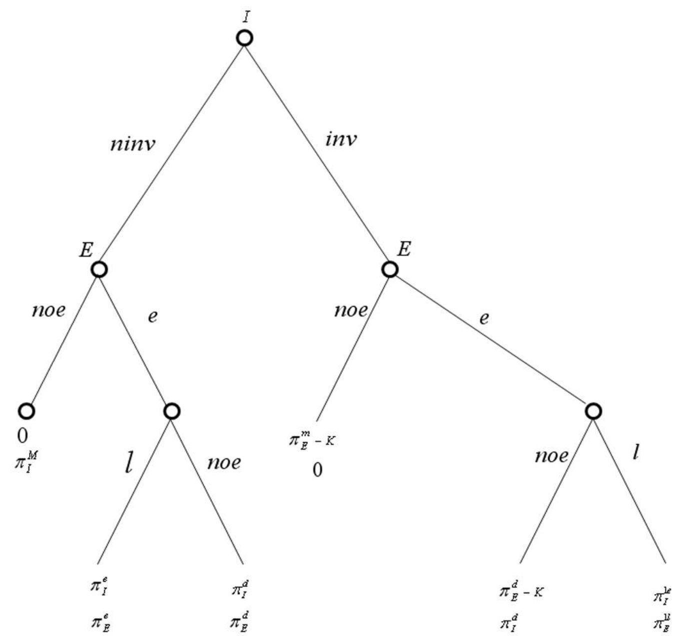


Figura 4.2: ¿Simples palabras o.. algo más?

obtendrá beneficios incrementales en el largo plazo.

Nota 4.6. *El resultado puede modificarse en el caso en que E dude de si efectivamente I, hará la inversión o no. El grado de esta duda dependerá de los costos y beneficios asociados a la inversión a realizar. En este caso puede aparecer un nuevo equilibrio en estrategias mixtas, tema que no está dentro del alcance de este texto. Por otra parte debe destacarse también, que la amenaza puede repetirse en etapas posteriores, por parte de la misma firma o por otras, esto supondría, que para hacer creíble la amenaza, I deberá hacer efectiva su amenaza necesariamente en alguna etapa posterior, pues de otra forma perderá reputación y alguna entrante efectivamente entrará. Para un estudio de los problemas de reputación en juegos extensivos, véase por ejemplo [Van Damme, E.].*

- Ahora sí, la amenaza es creíble.

4.9 Ejercicios

Ejercicio 4.7. *Considere una rama monopolizada por la firma I amenazada por una potencial entrante E. Suponga que a los efectos de transformar la amenaza no creíble de luchar si E entra, la firma establecida I amenaza con hacer una inversión en equipamiento adicional de costo igual a K. La firma E no sabe si realmente I hará o no efectiva la inversión publicitada. Piensa que con cierta probabilidad p_K hará efectiva dicha inversión. Sabe también que si efectivamente la inversión se hace, entonces si entra, la amenaza de luchar se transformará en realidad con el cual los beneficios por entrar serán negativos e igual a $-\pi$ para ambas firmas, siendo que si no entra, los beneficios de E serán cero y los de I los correspondientes al monopolista π_m. En cambio si E entra y la amenaza no se cumple ella recibirá $\pi_m/2$ y la firma establecida recibirá $\pi_m/2$ si no hizo la inversión o $\pi_m/2 - K < 0$ si la hizo.*

1. *Describa el juego en forma extensiva y en forma normal para ambos casos.*

2. *Muestre el valor de p_K umbral a partir del cual la firma E no entra.*

Capítulo 5

Apéndice: Número óptimo de firmas

Discutiremos la posibilidad de que el comportamiento competitivo se alcance con un número relativamente pequeño de firmas en una rama oligopolizada.

Suponemos un juego en dos etapas, en la primera etapa las firmas deben invertir una cantidad $K > 0$ en costos fijos. Las firmas que deciden invertir competirán en una segunda etapa a la Cournot.

- *Etapa 1:* Todas las firmas potenciales deciden si entran o no. Entrar significa invertir K.
- *Etapa 2:* Todas las firmas que entraron compiten a la Cournot.

Consideremos un conjunto de firmas iguales, y representamos por π_J los beneficios de cada una de ellas cuando hay J firmas en el mercado. Existe un equilibrio con J^* firmas en el mercado si;

$$\pi_{J^*} \geq K, \ \ and \ \ \pi_{J^*+1} < K.$$

Típicamente π_J decrece con J, y $\pi_J \to 0, \ si \ J \to \infty$. Entonces existe un único entero $\bar{J}$ tal que $\pi_J \geq K$ para todo $J \leq \bar{J}$ y $\pi_J < K$, para todo $J > \bar{J}$.

Ejemplo 5.1. *Para el caso de J firmas iguales, con $p(q) = a-bq,\ c(q) = cq, b \geq 0, c > 0$ la solución de Cournot es:*

$$q_j = \left(\frac{a-c}{b}\right)\left(\frac{1}{J+1}\right) \ \ y \ \ \pi_J = \left(\frac{a-c}{J+1}\right)^2\left(\frac{1}{b}\right)$$

Nótese que a medida que K decrece el número de firmas en el mercado aumenta. Lo mismo sucede si la demanda aumenta para todo precio, pues esto supone una disminución de b.

Resolviendo $\bar{J} : \pi_{\bar{J}} = K$ obtenemos el número de firmas cuyo producto total alcanza el nivel competitivo, este es el entero no menor, más próximo a $\bar{J}$ que resuelve:

$$(\bar{J}+1) = \frac{(a-c)^2}{bK}, \tag{5.1}$$

es decir que $\bar{J} = \frac{(a-c)}{\sqrt{bK}} - 1$.

Analicemos ahora el número óptimo de firmas en el mercado desde el punto de vista del bienestar social. El beneficio de cada firma será $\pi_J = p(Jq_J)q_j - c(q_J)$, suponemos J firmas en el mercado, todas ellas idénticas produciendo la misma cantidad q_J, asumimos $c(0) = 0$.

Midamos ahora el bienestar social mediante la fórmula marshaliana:

$$W(J) = \int_0^{q_J} p(s)ds - Jc(q_J) - JK. \tag{5.2}$$

El número de firmas $\tilde{J}$ socialmente óptimo es aquel para el que $W'(\tilde{J}) = 0$.

Para el ejercicio del ejemplo, este número es el entero mayor o igual más proximo a $\tilde{J}$ tal que

$$(\tilde{J}+1)^3 = \frac{(a-c)^2}{bK} \tag{5.3}$$

Evidentemente este número no coincide con el obtenido en (5.1).

De esta forma si el número óptimo de firmas desde el punto de vista social esta dado por $\tilde{J}$ el mercado admite $\bar{J}$ firmas en competencia oligopolista, donde $\bar{J}$ resuelve:

$$(\bar{J}+1)^2 = (\tilde{J}+1)^3, \tag{5.4}$$

es decir: $\bar{J} = (\tilde{J}+1)^{\frac{3}{2}} - 1$. Cuando $\tilde{J} = 2$ entonces entran hasta $\bar{J} = 4$ firmas, si $\tilde{J} = 3$ entonces $\bar{J} = 7$.

Nota 5.2. *En general se puede decir que si las condiciones*

A1) $Jq_J \geq J'q_{J'}$ *cada vez que* $J > J'$,

A2) $q_J \leq q_{J'}$ *cada vez que* $J > J'$,

A3) $p(Jq_J) - c'(q_J) \geq 0, \ \forall J$.

se verifican y si $p'(\cdot) < 0$ *y si* $c''(\cdot) \geq 0$ *entonces el número de firmas entrantes es al menos* $j^0 - 1$ *cuando el óptimo social es* J^0 *ver [Mas-Colell, A. Whinston, M. Green J.].*

Capítulo 6

Asimetría en la información y bienestar

La información juega en las actividades sociales y económicas actuales un rol principal. Disponer de ella en forma privilegiada, da a su poseedor, posibilidades de obtener beneficios extraordinarios. Poseerla tiene su costo, así como lo tiene para quien no la posee, el precaverse de daños potenciales que pueden ser consecuencia precisamente de esta carencia de información. La diferencia en el conocimiento de información relevante, por parte de los distintos agentes económicos es un factor de peso en el momento de tomar decisiones, tales como: firmar contratos, tomar empleados o comprar un bien cualquiera. Esta diferencia se traslada a los agentes económicos, los que actúan en conocimiento de sus carencias y ventajas. La asimetría en la posesión de información supone como veremos en este capítulo, pérdida de bienestar social e ineficiencia paretiana en la distribución de los recursos, precisamente, esta pérdida mide el costo de la información (o de la desinformación).

Las decisiones estratégicas que la firmas con poder de mercado pueden realizar, afectan a los precios y a las cantidades de los bienes por ellas producidos. Los niveles de producción y precios óptimos en ramas oligopolizadas son decisiones tomadas por las empresas que persiguen objetivos propios. Así mismo, las decisiones estratégicas de los agentes económicos que poseen información privilegiada, suponen costos mayores respecto a los costos de los mismos bienes bajo condiciones de información perfecta por parte de todos los agentes. Estos costos elevados están ocasionados por la necesidad de, por ejemplo, supervisión del cumplimiento de contratos, por parte de la parte menos informada, control de la calidad del producto entregado por los proveedores, cumplimiento de plazos, etc. todo lo que termina en última instancia, afectando al bienestar social o a la eficiencia de la producción. Cómo repercuten esta decisiones en el bienestar de los consumidores y el instrumental de que dispone la teoría económica para medirlo, es el objetivo central de este capítulo.

Por lo tanto, suponer diferencias en la posesión de información, o suponer a todos los agentes idénticamente informados, tiene consecuencias importantes para el desarrollo posterior de la teoría económica. Por ejemplo, la hipótesis del comportamiento maximizador de beneficios, por parte de la firma supone un gerente (agente) y un propietario (principal) con idénticos objetivos. Esto supone que gerentes y propietarios tienen total información sobre los objetivos propios de cada parte. Está claro que si los intereses del propietario y del gerente coinciden, el comportamiento maximizador de beneficios resulta inevitable.

En efecto, consideremos una firma de propiedad de los consumidores, a los que hacemos corresponder el índice $i = 1, ..., n$. A cada consumidor corresponde una participación θ_i de forma tal que $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$. En este caso el problema del consumidor se plantea de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
& Max_{x_i \geq 0} u_i(x_i) \\
& s.a.\ px_i \leq w_i + \theta_i p.y
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Siendo el productor (el propietario o el principal) a la vez consumidor, la maximización de su función de utilidad u_i y la maximización de los beneficios de la empresa, definidos por $\max_y \{py : y \in Y\}$, siendo Y la región de tecnología, corren en el mismo sentido. Pues maximizar los beneficios de la firma, supone aumentar la región presupuestaria y consecuentemente incrementar el valor máximo posible de la utilidad de los consumidores. Los objetivos de los agentes económicos son en este modelo públicamente conocidos, y la maximización del beneficio supone un objetivo común. En general, si mantenemos el supuesto de firmas tomadoras de precios, el comportamiento racional de los productores es el de instruir a sus gerentes en maximizar los beneficios de las firmas, los gerentes asumirían como propio este objetivo, en tanto que de no hacerlo la firma quedará fuera del mercado.

No obstante, generalmente los propietarios y los gerentes no tienen iguales intereses, ni disponen de la misma información. Los objetivos de un gerente pueden no ser los mismos que los de la firma y generalmente es el gerente quien dispone de la información sobre la real situación de la firma, en particular de los beneficios extraordinarios que pueden lograrse en mercados no competitivos. Estas asimetrías redundan en general en pérdida de bienestar social, el propietario deberá tomar determinado tipo de medidas para estar informado sobre los verdaderos intereses de sus gerentes. La información tiene su costo y obtenerla requiere sacrificar una parte del excedente social que se crea como resultado del intercambio social de bienes. Para ver la importacia del tema consideremos los siguientes ejemplos:

- Cuando contratan trabajadores (agentes), los propietarios de las firmas suelen tener menos información que los propios trabajadores sobre sus propias habilidades e intereses.

- En un mercado de autos usados (mercado de limones) los vendedores suelen tener más información sobre el auto que los compradores portenciales.

- Las compañías de seguros, tienen menos información que los asegurados sobre el comportamiento de estos.

Estas asimetrías hacen que se pierda eficiencia, consecuentemente bienestar en términos de excedente social. Así por ejemplo las asimetrías en la información hacen que los compradores de autos usados siempre estén dispuestos a pagar precios bajos, aún por autos que pueden estar en buenas condiciones. Llevado a sus extremos esto conduce a que mercados, como el de autos usados, desaparezcan, ver el seminal trabajo de [Milgron, P.]. La pregunta central de la economía de la información es ¿cómo puede aproximarse, un mercado que opere con alguna de las características mencionadas, a la eficiencia?

La economía de la información se propone estudiar situaciones en las que existe asimetría en la información disponible por los agentes económicos. No todos disponen de toda la información, ya sea referido a lo que los demás están haciendo, o saben, o en relación a las oportunidades de transacciones óptimas. Por ejemplo gerentes muy protegidos por contratos laborales pueden estar dispuestos a asumir riesgos más altos que los considerados convenientes, manteniendo desinformados a los propietarios quienes podrían no estar dispuestos asumirlos, o en otro caso mantener una actitud excesivamente conservadora, aún cuando fuera conveniente asumir un cierto nivel de riesgo. Estas actitudes pueden ser fomentados o desalentados por los contratos firmados entre gerentes y propietarios.

Entre las áreas de investigación que tratan del problema de la asimetría de la información se destacan: la teoría del perjuicio moral, de la selección adversa, búsqueda óptima, y la teoría de expectativas racionales.

En el caso de la teoría del perjuicio moral, el problema consiste en que una parte de los agentes toman decisiones que afectan a los retornos de los demás, sin que estos sean capaces de monitorear totalmente estas decisiones. La solución para este problema consiste en elaborar un programa de incentivos, pautado en un contrato, en el que será establecido el pago del agente por el principal, una vez que sean observados determinados resultados, los que se consideran como señales del esfuerzo del primero, en el sentido de incrementar los beneficios de la empresa que dirige. La dificultad para elaborar estos contratos, radica en que muchas veces estas señales no dependen exclusivamante de la acción del agente,pudiendo verse influenciados por estados particulares de la naturaleza.

El problema central de la teoría se transformará entonces en el encontrar el mecanismo capaz de diseñar un contrato óptimo en el sentido de que beneficios y riesgos sean distribuidos de forma tal que el agente tenga incentivos para elegir aquellas acciones que maximicen las utilidades de uno y otro. La existencia de este contrato es ampliamente discutido en la literatura especializada moderna.

Existe abundante literatura referida al tema, son referencias clásicas, y de gran vigencia [Holmstron, B.], [Grossman,S.J. and Hart, O.D.]. No obstante hasta la aparición del enciclopédico texto de microeconomía de [Mas-Colell, A. Whinston, M. Green J.], los temas eran tratados en la literatura especializada. Una discusión resumida de la temática, escrita en español puede encontrarse en [Accinelli, E.; Navarro, M.].

6.1 Acciones escondidas (perjuicio moral)

Imagínese una situación en que el propietario de una firma (en general, un principal) desea contratar a un gerente (en general, un agente) para un proyecto cuya duración se extenderá por un período determinado. Las ganancias del proyecto están afectadas, al menos en parte, por las decisiones y acciones del gerente. Si tales acciones fueran observables, el problema de contratación entre el propietario y el gerente se limitaría a establecer en el contrato las acciones puntuales que el gerente debería llevar a cabo y la compensación que le sería otorgada acorde con el cumplimiento de las pautas establecidas. Nótese que se requiere que las acciones del gerente sean observables no solamente por el propietario, sino también por cualquier corte a cuya jurisdicción se someta el cumplimiento del contrato. Cuando las acciones del gerente no son observables, en el contrato no pueden estipularse las decisiones y acciones que debe realizar, porque, sencillamente, no hay una manera efectiva de verificar si el gerente ha cumplido con tales obligaciones. Bajo esta circunstancia, el propietario tiene la opción de diseñar un esquema de compensación de manera de que le proporcione al gerente un incentivo indirecto a tomar las decisiones y acciones correctas, es decir, aquellas que contribuyan a la maximización de los beneficios de la firma. La idea fundamental de este esquema de compensación es que el gerente actúe de la misma manera en que lo haría si su conducta fuera observable. En este apartado se estudia el problema del diseño de un contrato de este tipo.

Para ser más específicos: sea π las ganancias o beneficios observables del proyecto; sea e la acción alternativa del gerente, y E denota el conjunto de acciones posibles. Interpretaremos e como una medida del esfuerzo gerencial. En el caso más simple que es estudiado en la literatura económica, e es una medida unidimensional de cuán duro trabaja un gerente. E es un número de acciones posibles, por lo que $E \subset R$.

No obstante, de manera más general, el esfuerzo gerencial puede tener varias dimensiones como por ejemplo cuán duro y diligentemente trabaja un gerente para reducir los costos, cuánto tiempo ocupa en atender a los clientes, etc. De este modo, e también puede verse como un vector, en el cual cada uno de sus elementos indican una medida del esfuerzo gerencial en una actividad distinta. En este caso $E \subset R^m$ para algún m entero positivo.[1] En esta discusión, e se considerará como el

[1] De hecho, muchas interpretaciones generales son posibles. Por ejemplo, se podrían

esfuerzo alternativo del gerente (es decir a qué actividad o actividades decide darle mayor importancia) o nivel de esfuerzo.

Debido a que el esfuerzo gerencial e, no es observable por el propietario, se debe considerar que no es perfectamente deducible de la observación de π. Beneficios altos no siempre implicarían un esfuerzo realizado por el gerente en este sentido, podrían ser causados por ejemplo por un estado de la naturaleza en cuya definición el esfuerzo del gerente no tiene nada que ver. Por lo tanto, para que el modelo sea más realista y de mayor interés, se asumirá que aunque las ganancias del proyecto son afectadas por e, no están totalmente determinadas por este nivel de esfuerzo gerencial. En particular, se considera que las ganancias de la firma toman valores en $[\underline{\pi}, \bar{\pi}]$ y que están relacionadas estocásticamente a e de la manera descrita por la función de densidad $f(\pi|e) > 0$ para todo $e \in E$ y definida para π en el intervalo, $[\pi, \bar{\pi}]$. Es decir, que el esfuerzo realizado por el gerente tendrá su relación con el beneficio obtenido a través de la definición de la función de probabilidad. De forma tal, que la probabilidad de obtener beneficios altos, aumente con el nivel de esfuerzo del gerente.

En esta discusión nuestra atención se restringirá al caso en el que el gerente tiene sólo dos alternativas posibles de esfuerzo, realizar un nivel de esfuerzo alto, al que representaremos por e_H, o bien, realizar un nivel de esfuerzo bajo, e_L. (Ver el apéndice A para el caso en el que el gerente puede optar entre un conjunto amplio de niveles de esfuerzo). Asumimos que e_H el nivel alto de esfuerzo, lleva a niveles altos de ganancias con mayor probabilidad que el esfuerzo bajo e_L, pero a su vez implementar un esfuerzo alto supone mayores costos y dificultades para el gerente. Este hecho significa que hay un conflicto entre el interés del propietario y el interés del gerente.

---

incluir aspectos como las decisiones relacionadas con la clase y naturaleza de los insumos que adquiere la empresa, o las estrategias que se implementarán.

De manera más específica, se asume que la distribución de π condicional en e_H es estocástica de primer orden y domina a la distribución condicional en e_L; esto es, las funciones de distribución $F(\pi|e_L)$ y $F(\pi|e_H)$ satisfacen $F(\pi|e_L) \leq F(\pi|e_H)$ para todo $\pi \in [\ \underline{\pi}, \bar{\pi}]$ con estricta desigualdad en algún conjunto abierto $\Pi \subset [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$. Esto implica que el nivel de ganancias esperadas cuando el gerente escoge e_H es mayor que cuando escoge e_L :

$$\int_{\underline{\pi}}^{\bar{\pi}} \pi f(\pi|e_H) d\pi > \int_{\underline{\pi}}^{\bar{\pi}} \pi f(\pi|e_L) d\pi. \tag{6.2}$$

El gerente es un maximizador de la utilidad esperada con una función de utilidad Bernoulli $u(w, e)$ sobre su sueldo (o ingreso del gerente) w y su nivel de esfuerzo e. Esta función satisface $u_w(w, e){>}0$ y $u_{ww}(w, e) \leq 0$ en todo (w, e) y $u(w, e_H){<}u(w, e_L)$ en todo w[2]. Esto es, el gerente:

1. Prefiere un mayor ingreso a uno menor.

2. Es débilmente adverso al riesgo sobre la aleatoriedad del ingreso (es decir prefiere un nivel de ingreso seguro igual al valor esperado, que apostar a su mejor oportunidad).

3. Le disgusta un alto nivel de esfuerzo[3].

En los párrafos siguientes nos enfocaremos en un caso especial de esta función de utilidad que ha despertado gran interés en la literatura especializada:

$$u(w, e) = v(w) - g(e). \tag{6.3}$$

[2] Recuerde la notación en que u_w denota la derivada parcial de u con respecto a w.

[3] Nótese que en el caso del esfuerzo multidimensional, no se requiere que H tenga un mayor nivel de esfuerzo en cada dimensión; lo importante para este análisis es que el esfuerzo realizado por el gerente lleve a un mayor nivel de ganancias y conlleve una mayor desutilidad gerencial que e_L.

Para este análisis asumimos que $v'(w) > 0$, $v''(w) \leq 0$, así como que $g(e_H) > g(e_L)$.

El propietario recibe las ganancias del proyecto menos cualquier gasto realizado en el sueldo o compensación del gerente. Se asume que el propietario es neutral al riesgo (de la firma) y, por lo tanto, su objetivo es maximizar su retorno esperado de la inversión realizada. La idea detrás de esta suposición simplificada es que el propietario de la firma puede sostener un portafolio completamente diversificado lo que le permite disminuir su propio riesgo como inversionista, lo que lo hace neutral al riesgo que enfrenta la firma.

6.2 Contratos óptimos y esfuerzos observables.

Resulta útil empezar nuestro análisis estudiando el contrato óptimo cuando el esfuerzo es observable. Supóngase que el propietario le ofrece al gerente un contrato que puede aceptar o rechazar. El contrato especifica el esfuerzo del gerente $e \in \{e_L, e_H\}$ y su compensación pagada como una función de las ganancias observadas de la firma, $w(\pi)$. Se asume que un mercado competitivo para los gerentes significa que el propietario proporciona un nivel de utilidad esperada para los gerentes de al menos $\bar{u}$, la llamada utilidad de reserva, corresponde al menor valor de la utilidad por el cual el gerente estaría dispuesto a participar en el proyecto. Si el gerente rechaza el contrato ofrecido significa que el nivel de utilidad esperada proporcionado por el propietario en el contrato es menor a $\bar{u}$ y, por lo tanto, el gerente recibe un pago igual a 0.

De igual manera, asumimos que el propietario encuentra que vale la pena contratar al gerente y que, por lo tanto, le ofrece algo que él aceptará, el mínimo valor que hace que el agente participe es llamado valor de reserva. De este modo, el contrato óptimo para el propietario resuelve el siguiente problema (por simplicidad suprimiremos los límites inferior y superior de integración $\bar{\pi}$ y $\bar{\pi}$):

$$\begin{aligned} &\text{máx}_{e\in\{e_L,e_H\},w(\pi)} \int(\pi - w(\pi))f(\pi|e)d\pi \\ &\text{s. a:}\quad \int v(w(\pi))f(\pi|e)d\pi - g(e) \geqslant \bar{u}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

siendo $\bar{u}$ el valor de reserva del gerente. Resulta conveniente visualizar este problema en dos etapas:

1. ¿Cuál es el mejor esquema de compensación $w(e)$ que se le ofrecería al gerente para cada elección del nivel de esfuerzo e, que pudiera ser especificado en el contrato?

2. ¿A la luz de este contrato, ¿Cuál es la mejor elección de e?

Dado que el contrato especifica el nivel de esfuerzo e, escoger $w(\pi)$ el salario del gerente de acuerdo al beneficio, de forma tal de maximizar

$$\int(\pi - w(\pi))f(\pi|e)d\pi = \left(\int \pi f(\pi|e)d\pi\right) - \left(\int(w(\pi)f(\pi|e)d\pi\right) \tag{6.5}$$

es equivalente al problema dual de minimizar el valor esperado de los costos de compensación que enfrenta el propietario $\int w(\pi)f(\pi|e)d\pi$. Por lo que el problema dual correspondiente a la ecuación (6.5) nos indica que el esquema de compensación óptimo resuelve en este caso:

$$\begin{aligned} &\text{mín}_{w(\pi)} \int w(\pi)f(\pi|e)d\pi \\ &\text{s.a:}\quad \int v(w(\pi))f(\pi|e)d\pi - g(e) \geq \bar{u}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

La restricción en (6.6) obliga a una solución a este problema, de otra manera el propietario podría disminuir el sueldo del gerente y aún así conseguir que aceptase el contrato.

Sea γ el multiplicador sobre esta restricción, en la solución al problema (6.6) el sueldo del gerente $w(\pi)$ en cada nivel de $\pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$ tiene que satisfacer la condición de primer orden:

$$\begin{aligned} &-f(\pi|e) + \gamma v\prime(w(\pi))f(\pi|e) = 0 \\ &\Rightarrow \tfrac{1}{v\prime(w(\pi))} = \gamma. \end{aligned} \tag{6.7}$$

La condición de primer orden para $w(\pi)$ corresponde a tomar la primera derivada con respecto al sueldo del gerente en cada nivel de π separadamente.

Si el gerente es estrictamente adverso al riesgo (de manera que $v\prime(w)$ es estrictamente decreciente en w), la ecuación (6.7) indica que el esquema de compensación óptimo es aquel para el que el salario $w(\pi)$ es constante; esto es, que el propietario debe pagar un sueldo fijo al gerente. Este hallazgo es un resultado de repartición del riesgo: dado que el contrato consigna explícitamente el nivel de esfuerzo gerencial escogido y dado que no hay problema para establecer incentivos, el carácter neutral al riesgo del propietario permite asegurar y proteger completamente a un gerente adverso al riesgo contra cualquier peligro o riesgo de disminución (volatilidad) en sus propios ingresos. Por lo tanto, dado que e se específica en el contrato, el propietario ofrece al gerente un pago de sueldo fijo w_e^* tal que el gerente recibe exactamente su nivel de utilidad reservada:

$$v(w_e^*) - g(e) = \bar{u} \tag{6.8}$$

Nótese que ya que $g(e_H)>g(e_L)$, el sueldo del gerente será más alto si el contrato establece un nivel de esfuerzo e_H que uno e_L.

Por otro lado, cuando el gerente es neutral al riesgo, digamos con $v(w) = w$, la condición de primer orden (eq:dnepo) se satisface, necesariamente, con cualquier función de compensación. En este caso, debido a que no hay necesidad de asegurar o proteger al gerente del riesgo de disminución de sus propios ingresos, un esquema de pago de sueldo fijo es, simplemente, uno de muchos esquemas de compensación óptimos posibles. Cualquier función de compensación $w(\pi)$ que le proporciona al gerente un pago de salario esperado igual a $\bar{u}+g(e)$ el nivel proveniente de la condición (6.8) cuando $v(w)=w$ es también óptima.

Consideremos ahora la elección óptima de e. El propietario busca optimizar el nivel de esfuerzo $e \in \{e_L, e_H\}$ que maximiza sus ganancias esperadas menos los pagos de sueldos del gerente,

$$\int \pi f(\pi|e)d\pi - v^{-1}(\bar{u}+g(e)) \tag{6.9}$$

El primer término en (6.9) representa las ganancias brutas cuando el gerente realiza un esfuerzo e; el segundo término representa los sueldos que deben pagarse para compensar al gerente por este esfuerzo realizado (proveniente de la condición (6.8)). Tanto e_H como e_L pueden ser óptimos dependiendo de las ganancias esperadas de e_H sobre e_L comparado con el costo monetario del incremento de la desutilidad que el mayor esfuerzo le causa al gerente. Esto se resume en:

Proposición 6.1. *En el modelo agente-principal con esfuerzo gerencial observable, un contrato óptimo específica e^* que maximiza*

$$\left[\int \pi f(\pi|e)d\pi - v^{-1}(\bar{u}+g(e))\right]$$

y como pago para el gerente un sueldo fijo $w^* = v^{-1}(\bar{u}+g(e))$. Este es únicamente el contrato óptimo si se verifica la condición $v"(w) < 0$ en todo w.

6.3 Contratos óptimos y esfuerzos no observables

El contrato óptimo descrito en la proposición (6.1) permite observar dos resultados:

1. Especifica el esfuerzo eficiente que el gerente debe realizar.

2. Asegura o protege al gerente contra el riesgo de disminución de su propio ingreso.

No obstante, cuando el esfuerzo del gerente no es observable estos dos resultados no llegan a ser compatibles y entran en conflicto porque la única forma de que el gerente trabaje más duro y con mayor diligencia es que su pago esté relacionado con la consecución de mayores ganancias, que como ya se estableció son aleatorias ya que están relacionadas estocásticamente con el esfuerzo e. Cuando estos resultados están en conflicto, la no observabilidad del esfuerzo lleva a ineficiencias.

Para resaltar este aspecto, estudiaremos primero el caso cuando el gerente es neutral al riesgo. En este caso se mostrará que cuando la preocupación correspondiente al riesgo es nula, el propietario puede obtener el mismo resultado que cuando el esfuerzo es observable. Posteriormente, estudiaremos el contrato óptimo en el caso de que el gerente sea adverso al riesgo. En este caso, el mejor contrato posible (que involucra el nivel alto de esfuerzo, que es el esfuerzo óptimo o primero mejor (first-best), del contrato de información completa) implica una pérdida de bienestar con respecto al obtenido en el contrato óptimo cuando el esfuerzo es observable (información completa), ello es porque la toma eficiente de riesgo por parte del gerente entra en conflicto con el nivel eficiente de incentivo.

6.3.1 Caso 1: Un gerente neutral al riesgo.

Supóngase que $v(w) = w$. Aplicando la proposición 6.1, el nivel de esfuerzo óptimo e^* cuando el esfuerzo es observable resuelve:

$$\max_{e \in \{e_L, e_H\}} \int \pi f(\pi|e) d\pi - g(e) - \bar{u} \tag{6.10}$$

La ganancia del propietario en este caso es el valor de la expresión (6.10) y el gerente recibe una utilidad esperada de exactamente $\bar{u}$.

Ahora considérese el pago al propietario cuando el esfuerzo del gerente es no observable. En la siguiente proposición se establece que en este caso el propietario puede alcanzar el mismo pago que cuando dispone de información completa, sólo bajo ciertas condiciones.

Proposición 6.2. *En el modelo agente-principal con esfuerzo gerencial no observable y un gerente neutral al riesgo, un contrato óptimo genera el mismo esfuerzo escogido y las mismas utilidades esperadas para el gerente y para el propietario que cuando el esfuerzo es observable.*

Demostración: Vamos a mostrar que hay un contrato que el propietario puede ofrecerle al gerente que le brinda al propietario el mismo pago que recibe bajo información completa. Este contrato, por lo tanto, tiene que ser un contrato óptimo para el propietario, porque éste nunca puede recibir más cuando el esfuerzo es no observable que cuando lo es, ya que cuando el esfuerzo es observable, el propietario es libre de ofrecer cualquier contrato al gerente, incluyendo el contrato óptimo bajo condiciones de no observabilidad, y simplemente dejar la elección de realizar un esfuerzo mayor al gerente.
Supóngase que el propietario le ofrece al gerente un programa de compensación de la forma $w(\delta) = \delta - \alpha$, donde α es una constante. Este programa de compensación puede interpretarse como: *"vendiéndole el proyecto de la empresa al gerente"*, pues se le da a éste el retorno completo de las ganancias δ menos el pago fijo α que es el retorno o pago al propietario. El valor α adquiere para el gerente el significado del pago que tiene que hacer por la compra del proyecto al propietario. Si el gerente acepta este contrato, él escoge el esfuerzo e que maximiza su utilidad esperada,

$$\int w(\pi) f(\pi|e) d\pi - g(e) = \int \pi f(\pi|e) d\pi - \alpha - g(e) \qquad (6.11)$$

Comparando (6.11) con (6.10) se obtiene que e^* maximiza también (6.11). De este modo, cuando el esfuerzo es no observable y el gerente es neutral al riesgo, un contrato con estas características (que le pague al gerente $\pi - \alpha$) lo induce al nivel de esfuerzo de información completa e^* o esfuerzo óptimo, conocido en la literatura como *primero-mejor*[4]. El gerente está dispuesto a aceptar este contrato ya que le proporciona una utilidad esperada de al menos $\bar{u}$, esto es porque:

$$\int \pi f(\pi|e)d\pi - \alpha - g(e) \geqslant \bar{u} \tag{6.12}$$

Sea α^* el nivel de α en el que (6.12) se verifica con igualdad. Nótese que el pago del propietario si el esquema de compensación es $w(\pi) = \pi - \alpha^*$ es exactamente α^* y el pago del gerente es toda la masa de ganancias π menos el pago fijo α^*. Despejando α de (6.12) se tiene:

$$\alpha^* = \int \pi f(\pi|e^*)d\pi - \alpha - g(e^*) - \bar{u} \tag{6.13}$$

De aquí se observa que (6.13) es equivalente a (6.10) y que, por lo tanto, con un esquema de compensación de $w(\pi) = \pi - \alpha^*$, tanto el propietario como el gerente obtienen exactamente el mismo pago que cuando el esfuerzo es observable.

La idea básica detrás de la proposición (6.2) es que si el gerente es neutral al riesgo, el problema de compartir el riesgo desaparece, lo que lleva a establecer incentivos eficientes ya que el gerente recibe el retorno marginal completo de su esfuerzo sin que tenga que realizar el sacrificio que en otro caso le implicaría aceptar mayores niveles de preocupación y riesgo.

6.3.2 Caso 2: Un gerente adverso al riesgo.

Cuando el gerente es estrictamente adverso al riesgo y existe incertidumbre sobre su nivel de ingreso, el análisis es más complicado. Los incentivos ahora para un esfuerzo alto pueden proporcionarse solamente

[4]traducción textual de la expresión inglesa *first-best*

al costo de que el gerente acepte o tome riesgos. Para caracterizar el contrato óptimo bajo estas circunstancias, consideraremos el diseño del contrato en dos etapas: primero, caracterizaremos el esquema de incentivos óptimo para cada nivel de esfuerzo que el propietario desearía que el gerente realizara; segundo, consideraremos el nivel de esfuerzo que el propietario debe inducir con la compensación establecida en el contrato.

El esquema de incentivos para implementar un nivel específico de esfuerzo e minimiza el pago esperado del sueldo del gerente que realiza el propietario (que como vimos es el dual del problema de maximización del retorno para el propietario) sujeto a dos restricciones. Como en los casos anteriores, el gerente tiene que recibir una utilidad esperada de al menos $\bar{u}$si él acepta el contrato, ésta es la primera restricción. Sin embargo, cuando el esfuerzo del gerente no es observable el propietario enfrenta una segunda restricción: el gerente tiene realmente que desear escoger el nivel de esfuerzo e con ese esquema de incentivos.

Formalmente, el esquema de incentivos óptimo para implementar e tiene que resolver el siguiente problema:

$$
\begin{array}{ll}
\min_{w(\pi)} \int w(\pi) f(\pi|e) d\pi & (a) \\
\text{s.a:} \quad i) \int v(w(\pi)) f(\pi|e) d\pi - g(e) \geqslant \bar{u} & (b) \\
\qquad ii)\ e \text{ resuelve } \max_{\tilde{e}} \int v(w(\pi)) f(\pi|\tilde{e}) d\pi - g(\tilde{e}) & (c)
\end{array}
\tag{6.14}
$$

La restricción *(ii)* es conocida como la restricción que incentiva, ya que asegura que bajo el esquema de compensación $w(\pi)$ el esfuerzo óptimo escogido por el gerente sea e.

¿Cómo debe implementar el propietario optimizador cada uno de los dos niveles posibles de e? Consideremos cada una de ellas.

Implementación de e_L. Supongamos, primero, que el propietario desea implementar un nivel de esfuerzo e_L. En este caso, el propietario optimizador ofrece al gerente el pago de un sueldo fijo $w_e^* = v^{-1}(\bar{u} +$

$g(e_L))$, el mismo pago que ofrecería si en el contrato especificara el nivel de esfuerzo e_L cuando e es observable. Nótese que con esta compensación el gerente escoge e_L: Su sueldo no es afectado por su esfuerzo (porque es fijo), y así que escoge el nivel de esfuerzo que implica menos dificultad e_L. De este modo, el gerente gana exactamente $\bar{u}$. Por lo tanto, este contrato implementa el nivel de esfuerzo e_L al mismo costo de cuando el esfuerzo es observable. Pero, tal como se probó en la demostración de la proposición (6.2), el propietario nunca puede obtener un resultado mejor cuando el esfuerzo no es observable que cuando es observable (formalmente, en el problema 6.14 el propietario encara la restricción adicional *(ii)* en relación al problema (6.4)) en que sólo enfrenta la restricción *(i)*); así que ésta tiene que ser una solución al problema (6.14).

Implementación de e_H. El caso más interesante es cuando el propietario decide inducir el nivel de esfuerzo e_H. En este caso la restricción *(ii)* del problema (6.14) puede ser escrita como:

$$\int v(w(\pi))f(\pi|e_H)d\pi - g(e_H) = \int v(w(\pi))f(\pi|e_L)d\pi - g(e_L). \quad (6.15)$$

Sean $\gamma = 0$ y $\mu = 0$ los multiplicadores de las restricciones (i) y (ii), respectivamente, $w(\pi)$ tiene que satisfacer la siguiente condición de Kuhn-Tucker de primer orden en cada valor $\pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$:

$$-f(\pi|e_H) + \gamma(w\prime(\pi))f(\pi|e_H) + +\mu\left[f(\pi|e_H) - f(\pi|e_L)\right]v\prime(w(\pi)) = 0 \quad (6.16)$$

o bien:

$$\frac{1}{v\prime(w(\pi))} = \gamma + \mu\left[1 - \frac{f(\pi e_L)}{f(\pi e_H)}\right] \quad (6.17)$$

Estableceremos primeramente que para cualquier solución al problema (6.14), donde $e = e_H$, γ y μ son estrictamente positivos[5].

Lema 6.3. *En cualquier solución a la ecuación (6.17) con* $e = e_H$ *, se cumple* $\gamma > 0$ *y* $\mu > 0$*.*

Demostración: Por reducción al absurdo supóngase que $\gamma = 0$. Debido a que $F(\pi|e_H)$ es estocástica de primer orden y domina a $F(\pi|e_L)$, tiene que existir un conjunto abierto de niveles de ganancias $\tilde{\Pi} \subset [\pi, \bar{\pi}]$ tal que $[f(\pi|e_L)/f(\pi|e_H)]$>1 en todo $\pi \in \tilde{\Pi}$. Si $\gamma = 0$, la condición (6.17) implica que $v\prime(w(\pi)) \leqslant 0$ en cualquier π (recuérdese que $\mu = 0$), lo cual es imposible. Por lo tanto, $\gamma > 0$.

Por el otro lado, si $\mu = 0$ en la solución del problema (6.14) entonces, por la condición de primer orden ((6.14)), el programa de compensación óptima otorga un pago de sueldo fijo al gerente para cada ganancia realizada. Pero por el punto anterior, sabemos que esto lleva al gerente a escoger un nivel de esfuerzo e_L en vez de e_H, violando la restricción (ii_H) del problema (6.14). Por lo tanto, $\mu > 0$. •

El lema (6.3) nos dice que ambas restricciones del problema (6.14) están implicadas cuando $e = e_H$ [6]. Además, dado el lema (6.3) la condición (6.17) puede ser usada para obtener una idea útil de la forma del

[5]Aunque el problema (6.14) puede no parecer un problema de programación convexa, una simple transformación muestra que las condiciones de primer orden (6.14) son simultáneamente condiciones necesarias y suficientes para la solución. Para observar esto, reformulemos (6.14) como un problema de elección del nivel de utilidad del gerente para cada resultado de ganancia π, lo que se expresa como $\bar{v}(\pi)$. Sea $\varphi(\cdot) = v^{-1}(\cdot)$, la función objetivo es $\varphi(\bar{v}(\pi))f(\pi|e_H)d\pi$, la cual es convexa en $\bar{v}(\pi)$, y las restricciones son todas lineales en $\bar{v}(\pi)$. Así las condiciones de primer orden de Kuhn-Tucker son necesarias y suficientes para obtener un máximo del problema (6.14) reformulado. La condición de primer orden de este problema reformulado es: $\varphi\prime(\bar{v}(\pi))f(\pi|e_H) + \gamma f(\pi|e_H) + \mu[f(\pi|e_H) - f(\pi|e_L)] = 0$ para todo $\pi \in [\pi, \bar{\pi}]$. Definiendo $w(\pi)$ por $\bar{v}(w(\pi)) = \bar{v}(\pi)$ y considerando que $\varphi'(\bar{v}(w(\pi))) = 1/v'(w(\pi))$, lo que da la ecuación (6.15)

[6]Un argumento más directo para la restricción (i) es: Supóngase que $w(\pi)$ es una solución al problema (6.14) en el que la restricción (i) no está implicada. Considérese un cambio en la función de compensación que disminuye el sueldo pagado a cada nivel de π de manera que el resultado que disminuye la utilidad del gerente es igual en

programa de compensación óptimo. Consideremos, por ejemplo, el pago de un sueldo fijo $\hat{w}$ tal que $\left(\frac{1}{v'(\hat{w})}\right) = \gamma$. De acuerdo a la condición (6.17) se tiene:

$$w(\pi) \quad > \quad \hat{w} \ \text{ si } \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)} < 1$$

y

$$w(\pi) \quad < \quad \hat{w} \ \text{ si } \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)} > 1$$

Esta relación es bastante intuitiva. El esquema de compensación óptimo paga más que $\hat{w}$ para resultados que son estadísticamente relativamente más probables de ocurrir bajo e_H que cuando e_L es escogido. En el sentido de tener una razón (ratio) de probabilidad $[f(\pi|e_L)/f(\pi|e_H)] < 1$. De manera similar $\hat{w}$ ofrece una compensación menor para resultados que son estadísticamente relativamente más probables cuando se escoge e_L. Debe enfatizarse, sin embargo, que mientras esta condición evoca una interpretación estadística, no hay aquí una verdadera inferencia estadística; el propietario conoce previamente cuál nivel de esfuerzo será escogido dado el esquema de compensación que él ofrece, ya que lo induce. Esto significa que al estructurar la compensación de esta manera, se provee al gerente de un incentivo para escoger e_H en vez de e_L. Este punto lleva a una implicancia que pudiera parecer en principio un tanto sorprendente: en un esquema de incentivos óptimo, la compensación no es necesariamente monótonamente creciente en ganancias. Como resulta claro al examinar la condición de primer orden ((6.17)),

todo π, esto es, a una nueva función de compensación $\hat{w}(\pi)$ con $[v(w(\pi)) - v(\hat{w}(\pi))] = \Delta v > 0$ en todo $\pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$. Este cambio no afecta la satisfacción de la restricción que incentiva (ii_H) ya que si el gerente estaba dispuesto a escoger e_H cuando enfrentaba una función de compensación $w(\pi)$, él hará también está elección con $\hat{w}(\pi)$. Es más, como la restricción (i) no está implicada, el gerente aceptará este nuevo contrato si Δv es suficientemente pequeño. Finalmente, los pagos de sueldo esperados para el propietario serán menores que bajo $w(\pi)$. Esto es una contradicción.

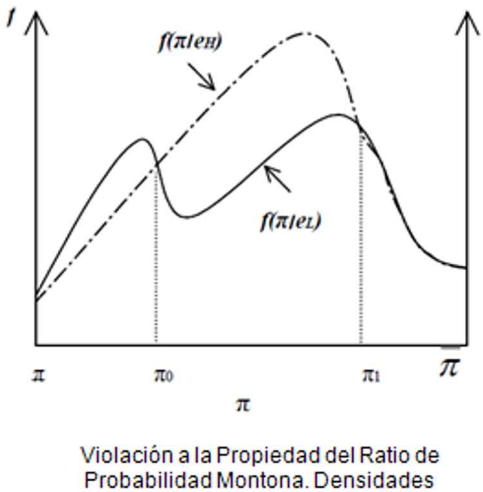


Figura 6.1:

para que el esquema de compensación óptimo resulte monótonamente creciente en ganancias, es necesario que la razón de probabilidad

$$[f(\pi|e_L)/f(\pi|e_H)]$$

sea decreciente en π; esto es que al incrementarse π, la probabilidad de obtener un nivel de ganancias π si el esfuerzo es e_H relativo a la probabilidad de obtenerlo si el esfuerzo es e_L tiene que incrementarse. Esta propiedad conocida como la *propiedad de la razón de probabilidad monótona* (o propiedad de monotonía en el ratio de probabilidades, ver [Milgron, P.], no está implicada por la dominación estocástica de primer orden.

Las figuras 10 y 11 describen, por ejemplo, un caso en el que la distribución de π condicional en e_H domina estocásticamente a la distribución de π condicional en e_L pero la Propiedad de la razón de probabilidad monótona no se sostiene.

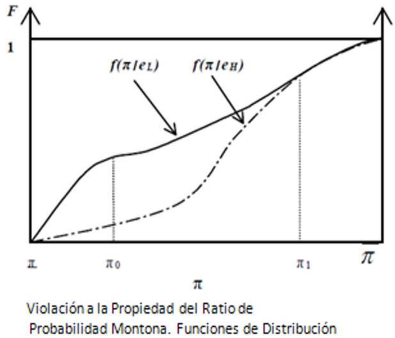
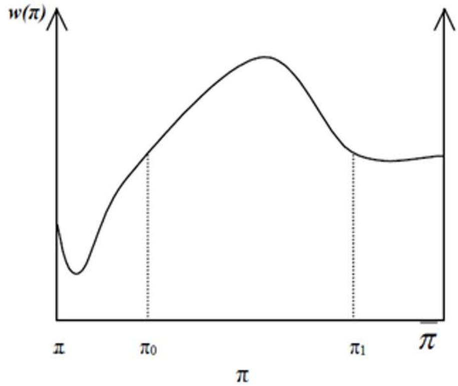


Figura 6.2:

En este ejemplo, el incremento del esfuerzo permite convertir realizaciones de bajas ganancias en intermedias, pero no tiene efecto alguno en la probabilidad de conseguir ganancias muy altas. La condición ((6.17)) nos dice que en este caso debe tenerse un alto y mayor nivel de sueldos para niveles intermedios de ganancias que para ganancias muy altas, porque la probabilidad de niveles intermedios de ganancias es sensible al incremento del esfuerzo. La función de compensación óptima, para este ejemplo, se muestra en la figura 12.

La condición ((6.14)) implica también que el contrato óptimo probablemente no toma una forma simple (e.g. lineal). La forma óptima de la función de compensación $w(\delta)$ es la de una función del contenido informacional de varios niveles de ganancias (a través de la razón o ratio de probabilidad) y es poco probable que esta función varíe con δ de una manera simple en la mayoría de los problemas.

Finalmente, adviértase que dada la variabilidad que óptimamente se introduce en la compensación del gerente, el valor esperado del pago del sueldo del gerente tiene que ser estrictamente mayor que el sueldo fijo pagado en el caso de que el esfuerzo sea observable, $w^*_{e_H} = v^{-1}(\bar{u} + g(e_H))$. Intuitivamente, debido a que el gerente tiene que asegurar un nivel de utilidad esperada de $\bar{u}$, el propietario lo tiene que



Violación a la Propiedad del Ratio de
Probabilidad Montona.
Esquema de Sueldo óptimo o Función de Compensación óptima

Figura 6.3:

compensar con un pago de sueldo promedio mayor para cualquier riesgo que él asuma. Para expresar este punto formalmente, nótese que ya que $E\left[v(w(\pi))/e_H\right] = \bar{u} + g(e_H)$ y que $v < 0$, la desigualdad de Jensen nos dice que $v\left(E\left[w(\pi)/e_H\right]\right) > \bar{u} + g(e_H)$. Pero sabemos que $v(w^*_{e_H}) = \bar{u} + g(e_H)$, por lo que se tiene $E\left[w(\pi)|e_H\right] > w^*_{e_H}$. El resultado de todo esto es que la no observabilidad le incrementa al propietario los costos esperados de compensación al implementar el nivel de esfuerzo e_L es exactamente el mismo que se paga cuando el esfuerzo es observable; mientras que el pago de sueldo esperado cuando el propietario implementa e_H bajo esfuerzo no observable es estrictamente mayor que el pago en el caso de esfuerzo observable. Así, en este modelo la no observabilidad incrementa el costo de implementar e_H y no cambia el costo de implementar e_L. La principal implicación de este hecho es que la no observabilidad del esfuerzo puede llevar a implementar ineficientemente un bajo nivel de esfuerzo. Si e_L fuera el nivel de esfuerzo óptimo cuando el esfuerzo es observable entonces también debería serlo cuando es no observable. En este caso, la no observabilidad no causa pérdidas. En cambio, cuando e_H es el nivel de esfuerzo óptimo cuando el esfuerzo es observable, dos cosas pueden pasar:

1. Puede resultar óptimo implementar e_H usando un esquema de incentivos que permita al gerente enfrentar el riesgo;

2. Los costos de soportar el riesgo (*risk-bearing costs*) podrían ser tan altos que llevarían al dueño a decidir que es mejor implementar simplemente e_L.

En cualquiera de los dos casos, la no observabilidad causa una pérdida de bienestar al propietario, la utilidad esperada del gerente es $\bar{u}$ en cualquier caso[7]. Estas observaciones se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 6.4. *En el modelo agente-principal con esfuerzo gerencial no observable, un gerente adverso al riesgo y dos posibles niveles de esfuerzo a escoger, e_H y e_L , el esquema de compensación óptimo para implementar e_H, satisface la condición (6.17). Esto le brinda al gerente una utilidad esperada de $\bar{u}$ e involucra un pago de sueldo esperado mayor que el requerido cuando el esfuerzo es observable. El esquema de compensación óptimo para implementar e_L involucra el mismo pago de sueldo fijo que se realiza óptimamente cuando el nivel de esfuerzo es observable. Cada vez que el nivel de esfuerzo óptimo sea e_H, la no*

[7] Adviértase, sin embargo, que aunque la no observabilidad conduce a una pérdida de bienestar, el resultado, en este caso, es un óptimo de Pareto restringido. Para analizar esto, nótese que el propietario maximiza sus ganancias sujeto a que el nivel de utilidad esperada del gerente no es menor a $\bar{u}$ y sujeto a dos restricciones derivadas de su incapacidad de observar el nivel de esfuerzo gerencial escogido. Como resultado, ninguna asignación de Pareto puede ser alcanzada por una autoridad central que no observa el nivel de esfuerzo escogido por el gerente. Para que una intervención en el mercado por parte de esta autoridad central produzca una mejora en el sentido de Pareto, tiene que haber externalidades entre los contratos firmados por las diferentes parejas de individuos.

observabilidad conlleva una pérdida de bienestar social respecto del caso en que el esfuerzo es observable.

El hecho de que la no observalidad conduzca, en este modelo, únicamente a distorsiones que disminuyen el nivel de esfuerzo gerencial es una característica especial de la especificación de dos niveles de esfuerzo. Con muchos esfuerzos alternativos posibles, la no observabilidad puede alterar, de todas formas, el nivel de esfuerzo gerencial inducido en el contrato óptimo, cambiando el nivel de esfuerzo bajo información completa, pero la dirección del cambio puede ser tanto ascendente como descendente.

Nota 6.5. Información y bienestar. *Desde el punto de vista de la eficiencia, comparar las condiciones de primer orden (6.7) del problema del contrato óptimo en el caso de que el esfuerzo sea observable, con las correspondientes condiciones para el caso no observable, en particular la condición (6.17), muestra que la asignación óptima bajo condiciones de asimetrías de la información, lleva a una asignación subóptima. Esto se deduce inmediatamente del hecho de que el multiplicador μ es estrictamente positivo, ver lema (6.3). Por este motivo, se suele designar a las asignaciones de recursos de este tipo de óptimo de segundo grado, o segundo mejor (second-best), es decir, es lo mejor que se puede hacer dadas las condiciones existentes. De esta forma queda claro que la existencia de asimetrías en la información lleva a pérdidas de bienestar, como se dijo al inicio de esta sección, la información tiene su costo.*

Varias extensiones de este análisis básico han sido estudiadas en la literatura. Por ejemplo, [Holmstron, B.], [Nalebuff, B. & J. Stiglitz] y [Grenn, J.; N. Stokey] examinan casos en el que se contratan a varios gerentes y consideran el uso de una evaluación relativa del rendimiento en tales escenarios; Bernheim & Whinston (1986), por otra parte, amplían el modelo en la otra dirección, examinando escenarios en el que un mismo agente es contratado simultáneamente por varios propietarios diferentes (principales); [Dye,R.] considera casos en el que el esfuerzo puede ser observado a través de vigilancia costosa. Autores como, [Rogerson, W. (85a)], [Allen, F.] [Holmstron, B.; Milgrom (87)] y como tambiíen [Fudenberg, D., B. Holmstrom, P.; Milgrom], examinan situaciones en las que la relación Agente-Principal se repite por varios periodos, con un énfasis particular en las ampliaciones en las que los contratos de lago plazo son más efectivos para resolver los problemas de esta relación que los de corto plazo del tipo de los estudiados en este apartado. (En la literatura económica hay muchos trabajos más que amplían el tema del Conflicto Agente-Principal). Muchos de estos estudios se enfocan al caso en el que el esfuerzo es unidimensional; [Holmstron, B.; Milgrom (91)], sin embargo, discuten algunos aspectos interesantes del caso más realista de esfuerzo multidimensional.

En [Holmstron, B.; Milgrom (87)] se hace otra interesante extensión de este tema. Preocupados por la simplicidad de los esquemas de compensación del mundo real en comparación con los contratos óptimos derivados de modelos como el estudiado en este trabajo, estos autores investigaron un modelo en el que las ganancias se acumulan incrementándose a través del tiempo y el gerente es capaz de ajustar su esfuerzo durante la duración del proyecto en respuesta a realizaciones tempranas de ganancias. En esta investigación se identificaron condiciones bajo las cuales el propietario puede restringirse a sí mismo, sin tener pérdidas, al uso de esquemas de compensación que son funciones lineales de la ganancia total del proyecto. La optimalidad de los esquemas de compensación lineales surge debido a la necesidad de ofrecer un programa de incentivos que sea “fuerte y robusto” en el sentido de que continúe proveyendo incentivos sin considerar cuán tan temprano se haya producido la realización de ganancias. Este análisis ilustra una idea más general, la de que la complicada naturaleza del problema de incentivos puede realmente llevar a formas más simples de contratos óptimos.

6.4 Información oculta

En esta sección, trasladaremos nuestro análisis al escenario en el que la información asimétrica postcontractual toma la forma de información oculta. Nuevamente tenemos un propietario que desea contratar a un gerente para que administre un proyecto con duración de un periodo. Ahora, sin embargo, el nivel de esfuerzo del gerente, denotado por e, es completamente observable. Lo que no es observable después de la firma del contrato es el grado de relación que los esfuerzos del gerente tienen con los resultados obtenidos. Las utilidades de la firma no sólo dependen del grado de esfuerzo del gerente, sino de otros factores cuya realización beneficiosa puede o no estar relacionada con un alto grado de esfuerzo realizado por el gerente. Altos beneficios pueden estar relacionados con estados favorables la naturaleza, en cuya realización el gerente puede tener poco o nada que ver. Una fuente importante de asimetría entre gerentes y propietarios radica precisamente en el hecho de que el gerente de una empresa frecuentemente conoce más acerca de las ganancias potenciales de varias de sus acciones de lo que conoce el propietario.

Formularemos a continuación el modelo Agente-Principal con información oculta. Supongamos que el esfuerzo puede medirse con una variable unidimensional $e \in [0, \infty)$. Las ganancias brutas (excluyendo cualquier pago de sueldos al gerente) son una sencilla función determinística del esfuerzo $\pi(e)$, con $\pi(0) = 0$, $\pi'(e) > 0$ y $\pi''(e) < 0 \;\; \forall\, e$.

El gerente es un maximizador de su función de utilidad esperada, cuya función de utilidad de Bernoulli sobre salarios y esfuerzo, $u\,(w, e, \theta)$, depende de un estado de la naturaleza θ que se presenta posterior a la firma del contrato y que sólo es visto por el gerente. Asumimos que $\theta \in R$ y nos enfocamos en una forma especial de la función $u\,(w, e, \theta)$que es ampliamente utilizada en la literatura:

$$u\left(w,e,\theta\right)=v\left(w-g\left(e,\theta\right)\right)$$

La función $g\left(e,\theta\right)$ mide la desutilidad del esfuerzo en unidades monetarias. Asumimos que $g\left(0,\theta\right)=0\ \forall\ \theta$ y que los subíndices utilizados a continuación denotan derivadas parciales, la función $g\left(e,\theta\right)$ tiene las siguientes propiedades:

$$g_e(e,\theta)\begin{cases} >0 & \text{para } e>0 \\ =0 & \text{para } e=0 \end{cases} \tag{6.18}$$

$$g_{ee}(e,\theta)\begin{cases} >0 & \text{para } e>0. \\ =0 & \text{para } e=0 \end{cases} \tag{6.19}$$

$$g_\theta(e,\theta)<0\ \forall\ e. \tag{6.20}$$

$$g_{\theta\theta}(e,\theta)\begin{cases} <0 & \text{para } e>0 \\ =0 & \text{para } e=0. \end{cases} \tag{6.21}$$

Así, el gerente es adverso a incrementos en el esfuerzo, y esta aversión es más grande que el mayor nivel de esfuerzo que se tenga. En suma, valores más altos de θ son estados de la naturaleza más productivos en el sentido de que tanto la desutilidad total del esfuerzo del gerente, $g\left(e,\theta\right)$, y la desutilidad marginal del esfuerzo del gerente, en cualquier nivel de esfuerzo que se tenga, $g_e\left(e,\theta\right)$, son menores cuando θ es mayor. Asumimos también que el gerente es estrictamente adverso al riesgo con $v"(\cdot)<0$.[8] El nivel de utilidad de reserva del gerente es el nivel de utilidad esperada que tiene que recibir si no aceptara firmar el contrato que le ofrece el propietario, y se denota con $\bar{u}$. Nótese

[8]Como en el caso con acciones escondidas, la no observabilidad no causa pérdidas de bienestar en el caso de neutralidad al riesgo del gerente. Como en ese caso, un contrato de "liquidación" (*sellout*) que enfrenta al gerente con el retorno marginal completo de sus acciones puede generar un resultado óptimo primero mejor (*first-best*).

que estas suposiciones acerca de $g(e, \theta)$implican que las curvas de indiferencia del gerente tienen la propiedad de cruzamiento sencillo (ver [Mas-Colell, A. Whinston, M. Green J.]), nos enfocaremos al caso simple de que θ pueda tomar solamente uno de dos valores, θ_H y θ_L con $\theta_H > \theta_L$ y $Prob(\theta_H) = \lambda \in (0, 1)$.

El contrato tiene que lograr dos objetivos cuando se tiene θ.

1. El propietario es neutral al riesgo y debe proteger al gerente contra fluctuaciones (riesgo de volatilidad) de su propio ingreso;

2. Aunque aquí no se tiene el problema de incentivar al gerente a realizar un mayor esfuerzo (porque en el contrato puede establecerse explícitamente el nivel de esfuerzo requerido), un contrato que maximice el excedente disponible en la relación (y, por lo tanto, el pago del propietario) tiene que hacer sensible el nivel de esfuerzo gerencial a la desutilidad incurrida por el gerente, esto es, al estado θ.

Para fijar estas ideas, ilustraremos primero cómo se consiguen estos objetivos cuando θ es observable para posteriormente analizar la problemática que surge cuando θes observable sólo por el gerente.

6.4.1 El estado θ es observable.

Si θ es observable, el contrato puede especificar directamente el nivel de esfuerzo y la remuneración contingente del gerente para cada realización de θ (nótese que estas variables determinan los resultados económicos para las dos partes). Así un contrato con información completa consiste de dos pares salario-esfuerzo: $(w_H, e_H) \in R \times R_+$ para el estado θ_H y $(w_L, e_L) \in R \times R_+$ para el estado θ_L. El propietario escoge óptimamente aquellos pares que resuelven el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{máx}_{\substack{w_L, e_L = 0 \\ w_H, e_H = 0}} \lambda \left[\pi\left(e_H\right) - w_H\right] + (1-\lambda)\left[\pi\left(e_L\right) - w_L\right] \\ &\text{s.a: } \lambda v\left(w_H - g\left(e_H, \theta_H\right)\right) + (1-\lambda)\, v\left(w_L - g\left(e_L, \theta_L\right)\right) \geq \bar{u} \end{aligned} \tag{6.22}$$

En cualquier solución $[(w_L^*, e_L^*), (w_H^*, e_H^*)]$ para el problema (6.22), la restricción de utilidad reservada tiene que estar implicada; de otra manera, el propietario podría disminuir el nivel de sueldos ofrecidos y, de todos modos, conseguir que el gerente acepte el contrato. En suma, sea $\gamma = 0$ que denota al multiplicador correspondiente a esta restricción, la solución tiene que satisfacer las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} &-\lambda + \gamma\lambda v'\left(w_H^* - g\left(e_H^*, \theta_H\right)\right) = 0, && (a) \\ &-(1-\lambda) + \gamma(1-\lambda)\, v\prime\left(w_L^* - g\left(e_L^*, \theta_L\right)\right) = 0, && (b) \\ &\lambda\pi\prime\left(e_H^*\right) - \gamma\lambda v\prime\left(w_H^* - g\left(e_H^*, \theta_H\right)\right) g_e\left(e_H^*, \theta_H\right) \leq 0, && (c) \\ &(1-\lambda)\,\pi\prime\left(e_L^*\right) - \gamma(1-\lambda)\, v\prime\left(w_L^* - g\left(e_L^*, \theta_L\right)\right) g_e\left(e_L^*, \theta_L\right) \leq 0. && (d) \end{aligned} \tag{6.23}$$

Las restricciones (c) y (d) serán de igualdad para el caso en que $e_H^* > 0$ y $e_L^* > 0$ respectivamente. Estas condiciones indican la manera en que son incorporados los dos objetivos del contrato óptimo, tanto el de proteger y asegurar al gerente a la volatilidad de su propio ingreso, como el de hacer el esfuerzo gerencial sensible al estado de la naturaleza θ. Primero, reordenando y combinando las condiciones (b) y (c), vemos que:

$$v'\left(w_H^* - g\left(e_H^*, \theta_H\right)\right) = v'\left(w_L^* - g\left(e_L^*, \theta_L\right)\right) \tag{6.24}$$

Así que, la utilidad marginal del ingreso el gerente se iguala a través de los distintos estados. Esta es la condición usual para que la parte neutral al riesgo asegure óptimamente al individuo adverso al riesgo. La condición implica que:

$$w_H^* - g\left(e_H^*, \theta_H\right) = w_L^* - g\left(e_L^*, \theta_L\right), \tag{6.25}$$

lo que implícitamente es:

$$v\left(w_H^* - g\left(e_H^*, \theta H\right)\right) = v\left(w_L^* - g\left(e_L^*, \theta L\right)\right), \tag{6.26}$$

esto significa que la utilidad del gerente se iguala a través de los dos estados. Dada la restricción de utilidad reservada en el problema (6.22), el gerente tiene, por o tanto, un nivel de utilidad de $\bar{u}$ en cada estado.

Ahora, considérense lo niveles de esfuerzo óptimo en cada estado. Ya que $g_e(0, \theta) = 0$ y $\pi\prime(0) > 0$, las condiciones de primer orden (c) y (d) tienen que sostenerse con igualdad y e_i^*>0, para $i = 1, 2$. Combinando las condiciones (a) con (c) y la condición (b) con (d), vemos que el nivel de esfuerzo óptimo para el estado θ_i, e_i^*, satisface:

$$\pi\prime\left(e_i^*\right) = g_e\left(e_i^*, \theta i\right), \text{ para } i = L, H. \tag{6.27}$$

Esta condición indica que el nivel de esfuerzo óptimo en el estado θ_i equipara el beneficio marginal del esfuerzo en términos de las ganancias incrementadas con la desutilidad del costo marginal.
El par (w_i^*, e_i^*) se ilustra en la figura 13 (nótese que el eje vertical corresponde al salario y el eje horizontal al nivel de esfuerzo). Como se muestra, el gerente está mejor si nos movemos en dirección noroeste (NO), con salarios más altos y menos esfuerzo; mientras que el propietario está mejor al movernos en dirección sureste (SE), con salarios más bajos y un mayor nivel de esfuerzo. Debido a que el gerente recibe un nivel de utilidad de $\bar{u}$ en el estado θ_i, el propietario busca el punto más redituable sobre la curva de indiferencia del gerente para el estado θ_i con un nivel de utilidad $\bar{u}$. Este es un punto de tangencia entre la

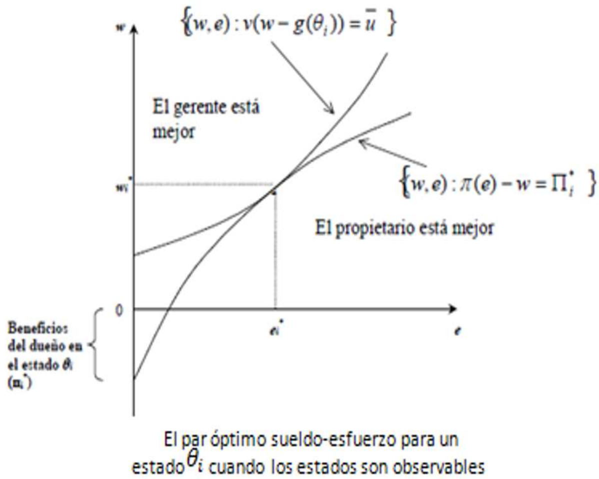


Figura 6.4:

curva de indiferencia del gerente y una de las curvas de isoganancia del propietario. En este punto, el beneficio marginal al esfuerzo adicional en términos de la ganancia incrementada es exactamente igual al costo marginal soportado por el gerente.

El nivel de ganancia del propietario en el estado θ_i es $\Pi_i^* = \pi\left(e_i^*\right) - v - 1\left(\bar{u}\right) - g\left(e_i^*, \theta_i\right)$. Como se muestra en la figura 12, esta ganancia es exactamente igual a la distancia del origen al punto donde la curva de isoganancia del propietario (w_i^*, e_i^*) corta al eje vertical (ya que $\pi(0) = 0$, si el pago salario en este punto sobre el eje vertical es $\hat{w} < 0$, la ganancia del dueño en (w_i^*, e_i^*) es exactamente de - $\hat{w}$).

A partir de la condición (6.11) se observa que $g_{e\theta}\left(e, \theta\right) < 0, \pi"\left(e\right) < 0$ y $g_{ee}\left(e, \theta\right) > 0$, lo que implica que $e*_H > e*_L$.

La figura 14 describe el contrato óptimo $[(w_H^*, e_H^*), (w_i^*, e_i^*)]$.

Estas observaciones se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 6.6. *En el modelo agente-principal con una variable de estado observable θ, el contrato óptimo involucra un nivel de esfuerzo*

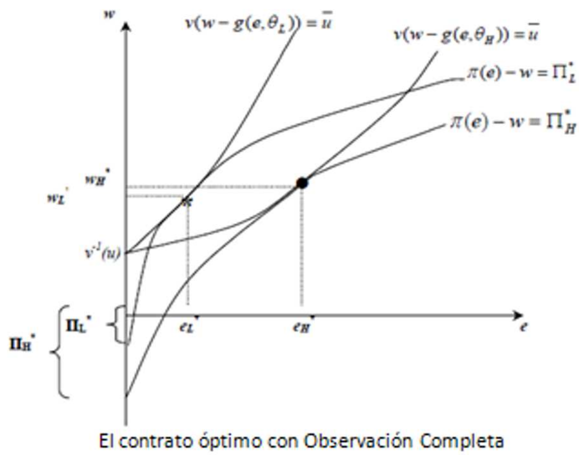


Figura 6.5:

e_i^* en el estado θ_i tal que se cumpla que $\pi\prime(e_i^*) = g_e(e_i^*, \theta_i)$ y asegure completamente al gerente contra la volatilidad de sus ingresos, situando su salario en cada estado θ_i al nivel w_i^* tal que $v(w_i^*) - g(e_i^*, \theta_i) = \bar{u}$.

Así, con un gerente estrictamente adverso al riesgo, el contrato óptimo (first -best) está caracterizado por dos aspectos básicos:

1. *El propietario protege completamente contra el riesgo de volatilidad de sus propios ingresos,*

2. *Se exige al gerente a trabajar al punto en el que el beneficio marginal del esfuerzo iguala exactamente a su costo marginal. Debido a que el costo marginal del esfuerzo es menor en el estado θ_H que en el estado θ_L, el contrato propicia un esfuerzo mayor en el estado θ_H.*

6.4.2 El estado θ es observable solamente por el gerente.

El deseo de proteger a un gerente adverso al riesgo y el de propiciar un nivel de esfuerzo apropiado entran en conflicto cuando se presentan asimetrías de información. Supongamos, por ejemplo, que el propietario

le ofrece a un gerente adverso al riesgo el contrato representado en la figura 13 y cuenta con que el gerente revelará el estado que se presente voluntariamente. Si esto es así, el propietario tendrá problemas. Como resulta evidente (ver figura 13), en el estado θ_H el gerente prefiere el punto (w_L^*, e_L^*) al punto (w_H^*, e_H^*). En consecuencia, en el estado θ_H el gerente le mentirá al propietario, afirmando que realmente está en el estado θ_L. Como también es evidente en la Gráfica esta tergiversación o deformación de la realidad disminuye las ganancias del propietario.
Dado este problema, ¿cuál es el contrato óptimo que el propietario debe ofrecer al gerente? Para responder a esta pregunta, es necesario empezar por identificar el conjunto de contratos posibles que el propietario puede ofrecer. Pueden imaginarse muchas diferentes formas que los contratos de este tipo pueden adoptar. Por ejemplo, el propietario podría ofrecer un contrato que refleje una función de compensación $w(\pi)$ que le paga al gerente en función de la ganancia realizada y que deja a su discreción la elección del nivel de esfuerzo a realizar en cada estado. Alternativamente, el propietario podría ofrecer un programa de compensación $w(\pi)$ restringido, en algún grado, a los posibles esfuerzos escogidos por el gerente. Otra posibilidad es que el propietario podría compensarlo conforme a una función del nivel de esfuerzo observable escogido por el gerente que pudiera nuevamente estar sujeta a una restricción sobre las elecciones de esfuerzos permisibles. Finalmente, arreglos más complicados pueden ser imaginados. Por ejemplo, puede exigírsele al gerente anunciar en cual estado de la naturaleza se encuentra y posteriormente al anuncio quedar en libertad de escoger su nivel de esfuerzo para ese estado. Será compensado con una función $w\left(\pi|\hat{\theta}\right)$que depende de su anuncio $\hat{\theta}$.

Aunque encontrar un contrato óptimo entre todas estas posibilidades puede parecer una tarea desalentadora, un importante resultado de la teoría microeconómica, conocido como el Principio de Revelación, simplifica mucho el análisis de este tipo de problemas contractuales[9]:

Proposición 6.7. (El Principio de Revelación) *Denótese el conjunto de posibles estados de la naturaleza con Θ. En búsqueda de un contrato óptimo, el propietario puede restringirse a sí mismo, sin pérdida para él, a contratos de la forma siguiente:*

(i) Después de que se presenta el estado θ, al gerente se le exige que anuncie cuál estado se ha presentado.

(ii) El contrato especifica un resultado $[w(\hat{\theta}), e(\hat{\theta})]$ para cada posible anuncio de $\hat{\theta} \in \Theta$.

(iii) En cada estado $\theta \in \Theta$, el gerente encuentra óptimo reportar el estado verdadero.

Un contrato que le pide al gerente anunciar el estado θ y asocia resultados con los varios anuncios posibles es conocido como un mecanismo de revelación. El Principio de Revelación nos dice que el propietario puede restringirse así mismo a utilizar un mecanismo de revelación para el que el gerente siempre responda con la verdad. Los mecanismos de revelación con esta propiedad de veracidad se conocen como mecanismos de revelación de incentivo compatible (o verdadero).
El Principio de Revelación se aplica en una gran cantidad de problemas de incentivos. La idea básica de este Principio es relativamente directa. Imaginemos, por ejemplo, que el propietario ofrece un contrato con un programa de compensación $w(\pi)$ que deja la elección del nivel de esfuerzo al gerente. Sean los niveles resultantes en los estados θ_L y θ_H, e_L y e_H, respectivamente. Puede mostrarse ahora que hay un mecanismo de revelación verdadero que genera exactamente el mismo resultado

[9]Dos de las primeras discusiones del Principio de Revelación fueron la de Myerson (1979) y la de Dasgupta, Hammond & Maskin (1979)

que el establecido en el contrato. Supongamos en particular que el propietario utiliza un mecanismo de revelación que asigna un resultado $[w(\pi(e_L)), e_L]$ si el gerente anuncia que el estado es θ_L, y un resultado $[w(\pi(e_H)), e_H]$ si el gerente anuncia que el estado es θ_H. Consideremos los incentivos del gerente para decir la verdad cuando enfrenta este mecanismo de revelación. Supongamos, primero, que el estado es θ_L. Bajo el contrato inicial con el esquema de compensación $w(\pi)$, el gerente podría haber alcanzado un resultado $[w(\pi(e_H)), e_H]$ en el estado θ_L al escoger un nivel de esfuerzo e_H. Ya que el gerente escoge el nivel de esfuerzo e_L en lugar de $e_{H,}$ se tiene que en el estado θ_L el resultado $[w(\pi(e_L)), e_L]$ es al menos tan bueno para el gerente que el sin pérdidas para él, a implementar mecanismos de revelación verdaderos[10].
Para simplificar la caracterización del contrato óptimo, a partir de este punto restringiremos a un caso específico y resultado $[w(\pi(e_H)), e_H]$. Así, bajo el mecanismo de revelación propuesto, el gerente encontrará que decir la verdad es una respuesta óptima cuando el estado es θ_L. Un argumento similar se aplica para el estado θ_H. Por lo tanto, este mecanismo de revelación resulta en anuncios verídicos por parte del gerente y produce exactamente el mismo resultado que el contrato inicial. De hecho, un argumento similar puede utilizarse para cualquier contrato inicial y así el propietario puede restringir su atención, extremo de la aversión al riesgo gerencial: aversión al riesgo infinita. En particular, tomamos la utilidad esperada del gerente como la utilidad menor de los dos estados. Así, para que el gerente acepte el contrato ofrecido por el propietario, el gerente debe recibir una utilidad de al menos $\bar{u}$ en cada estado. Tal como se estableció con anterioridad, la repartición eficiente del riesgo

[10]Una restricción que hemos impuesto con propósitos didácticos es limitar los resultados especificados posteriores al anuncio del gerente a que sean no estocásticos (de hecho, mucha de la literatura económica lo hace de igual manera). La aleatorización puede ser deseable algunas veces en estos escenarios debido a que puede ayudar a satisfacer las restricciones de compatibilidad de incentivos que se introducirán en la sección (6.2). Véase un ejemplo en Maskin & Riley (1984a)

requiere que un gerente infinitamente adverso al riesgo, tenga un nivel de utilidad de al menos $\bar{u}$ en cada estado. Si por ejemplo, su utilidad es $\bar{u}$ en un estado y $u\prime > \bar{u}$ en el otro, entonces el pago de sueldo esperado por el propietario es mayor que el necesario para darle al gerente una utilidad esperada de $\bar{u}$.

6.5 Ejercicios

Por considerar los ejercicios de esta sección con alguna dificultad mayor que la correspondiente a los de otras secciones, agregamos para guía del lector, algunos comentarios a los mismos.

Ejercicio 6.8. *Considere el modelo de riesgo moral con dos niveles de esfuerzo, donde la función de utilidad del agente es $u(w, e)$. Debemos considerar obligatoria la restricción de la utilidad reservada bajo el esquema de un contrato óptimo?*

La respuesta es sí, y la explicación se encuentra en la nota al pie número 10: "Un argumento más directo" para la restricción (i) es: Supóngase que $w(\pi)$ es una solución al problema (53) en el que la restricción (i) no está implicada. Considérese un cambio en la función de compensación que disminuye el sueldo pagado a cada nivel de π de manera que el resultado que disminuye la utilidad del gerente es igual en todo π, esto es, a una nueva función de compensación $\hat{w}(\pi)$ con $[v(w(\pi)) - v(\hat{w}(\pi))] = \Delta v > 0$ en todo $\pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$. Este cambio no afecta la satisfacción de la restricción que incentiva (ii_H) ya que si el gerente estaba dispuesto a escoger e_H cuando enfrentaba una función de compensación $w(\pi)$, él hará también está elección con $\hat{w}(\pi)$. Es más, como la restricción (i) no está implicada, el gerente aceptará este nuevo contrato si Δv es suficientemente pequeño. Finalmente, los pagos de sueldo esperados para el propietario serán menores que bajo $w(\pi)$. Esto es una contradicción."

Ejercicio 6.9. *Derive las condiciones de primer orden que caracterizan el esquema de compensación óptima para el modelo de riesgo moral con dos niveles de esfuerzo cuando el principal es estrictamente adverso al riesgo.*

Ahora, el problema no puede ser llevado a su dual o minimización, dado que el principal es adverso al riesgo sobre $\pi - w(\pi)$. Por lo tanto, sea $u(\cdot)$ la función de utilidad del principal. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\text{máx}_{w(\pi)} \int u(\pi - w(\pi)) f(\pi|e_H) d\pi \\
&\text{s.a:} \quad \bar{u} - \int v(w(\pi)) f(\pi|e_H) d\pi + g(e_H) \leq 0, \qquad (i) \\
&\quad \int v(w(\pi)) f(\pi|e_L) d\pi - \int v(w(\pi)) f(\pi|e_H) d\pi + \\
&\quad + g(e_H) + g(e_L) \leq 0. \qquad (ii)
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Donde (i) es la restricciòn de participación y (ii) es la restricción incentivo (asumiendo que e_H es la acción deseada). Sean γ y μ los multiplicadores de Kuhn-Tucker para (i) y (ii), respectivamente. La CPO de Kuhn-Tucker es:

$$\begin{aligned}
&-u\prime(\pi - w(\pi)) f(\pi|e_H) + \gamma v\prime(w(\pi)) f(\pi|e_H) - \\
&-\mu \left[f(\pi|e_L) - f(\pi|e_H) \right] v\prime(w(\pi)) = 0
\end{aligned} \tag{6.29}$$

o equivalentemente es:

$$\frac{u\prime(\pi - w(\pi))}{v\prime(w(\pi))} = \gamma + \mu \left[1 - \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)} \right]. \tag{6.30}$$

Ejercicio 6.10. *Analice la extensión del modelo de información oculta de la sección 10.4 con un número arbitrario pero finito de estados.*

Capítulo 7

El bienestar del consumidor

En esta parte del libro nos referiremos a las diversas formas de medir el bienestar de los consumidores, los conceptos básicos serán los de: preferencias, utilidades, demanda y gasto. Supondremos agentes racionales, maximizadores de sus funciones de utilidad o preferencias con información perfecta. Veremos cómo la variación en los precios afecta al bienestar individual así como formas para medir el impacto de esta variación en el bienestar individual. Finalmente veremos un camino posible para medir el bienestar social o agregado.

Supondremos que los agentes poseen preferencias racionales, que determinan la función de demanda individual $x(p, w)$, como función de los precios p de mercado y su riqueza inicial w. Consecuentemente, existirá la función indirecta de utilidad, $v(p, w)$ cuyo valor es la expresión en dinero del bienestar alcanzado por el agente que satisface su demanda de bienes. En definitiva los cambios en los precios serán buenos (o malos) para los agentes si el valor de la utilidad indirecta alcanzada con los nuevos precios p_1 en mayor (menor) que el alcanzado con los precios anteriores p_0, se dicir $v(p^1, w) - v(p^0, w) > 0(< 0)$.

Empezaremos definiendo la función indirecta de utilidad, y la función gasto, veremos luego las relaciones entre ellas y la demanda hicksiana, para luego analizar los cambios en el bienestar social a partir de variaciones en los precios.

Recordamos que el problema fundamental del consumidor (tomador de precios), consiste en maximizar su utilidad en su restricción presupuestaria. Problema este que se simboliza como:

$$\begin{aligned} &\max_{x\geq 0} u(x) \\ &s.a: \quad px \leq w, \end{aligned} \tag{7.1}$$

Si en la economía existen l bienes diferentes, x y w representarán cestas con l bienes diferentes, a los que indicaremos por un índice $i \in \{1, ..., l\}$. El nivel de riqueza del agente que está maximizando lo representamos por w. Es decir que x será un vector en R^l_+, y w un real no negativo. La coordenada $i-$ésima de x indica la cantidad de unidades del bien $i = 1, ..., n$ (la que nunca será negativa), que integran dicha cesta de consumo. Cada bien presente en el mercado tiene su precio unitario, al que representamos por $p_i \in R_+$, por lo que un sistema de precios será un vector p de l coordenadas no negativas (esto se representa por la notación $p \in R^l_+$), cada una de las cuales representa el precio unitario del correspondiente bien. La notación $x \geq 0$ debe considerarse como la representación de un vector de coordenadas no negativas. Consecuentemente px representa el producto interno del vector p por el vector x, ambos en R^l_+. Luego, el número no negativo $px = \sum_{i=1}^{l} p_i x_i$, representa el valor de la cesta x. Finalmente, recordemos que la restricción presupuestaria del agente, es el subconjunto de R^l_+ compuesto por aquellos bienes que le son accesibles dado su ingreso, el que es medido por w. El problema (7.1) representa entonces, la maximización de la función de utilidad, sujeto a la restricción presupuestaria. Este subconjunto se describe entonces como:

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in R^l_+ : px \leq w \right\}.$$

La solución de este problema es precisamente la demanda del consumidor, que en el caso de ser la utilidad una función estrictamente cóncava, y p un vector de precios estrictamente positivos, existe y es única, la representaremos por $x(p, w)$. Si además la función de utilidad u, es una función derivable dos veces y con derivadas continuas, el teorema de la función implícita (aplicado al sistema de ecuaciones correspondiente a las condiciones de primer orden que la definen), asegura que es una función continua y derivable, de los precios y de las dotaciones iniciales. Bajo supuestos más amplio la demanda es una correspondencia o función multiforme. Asumimos que el lector está familiarizado con la temática, por lo que no redundaremos en esta temática, en caso de necesitarlo encontrará amplia información en [Accinelli, E. (09)].

7.1 La función de utilidad indirecta

Denotaremos por R^l_{++} al interior del cono positivo de R^l, es decir al conjunto de los vectores de R^l con coordenadas estrictamente positivas. Este cono es precisamente R^l_+.

Para cada $(p, w) \in R^l_{++} \times R_+$ denotaremos como $v(p, w)$ el valor de la utilidad evaluada en la demanda: $v(p, w) = u(x(p, w))$ donde $u : R^l_+ \to R$ es la función de utilidad y $x : R^l_{++} \times R_+ \to R^l_+$ es la función de demanda walrasiana. La función definida como $v(p, w)$ es llamada utilidad indirecta. Recordamos que se dice localmente no saciable a un consumidor,o a su preferencia, si ésta es tal que verifica que, en todo entorno de cualquier cesta de bienes, existe otra que es estrictamente preferible.

Teorema 7.1. *Sea $u : R^l_+ \to R$ una función de utilidad continua que representa a una preferencia localmente no saciable $\succeq$ definida en el espacio de consumo $X = R^l_+$. Sea $(p, w) >> 0$. La correspondiente función de utilidad indirecta $v : R^l_{++} \times R_+ \to R$, verifica las siguientes* *propiedades:*

1. *Homogénea de grado cero.*
2. *Estrictamente creciente en* w *y no decreciente en* p_h *para cada* h.
3. *Cuasiconvexa, es decir* $\left\{(p, w) \in R^l_{++} \times R_+ : v(p, w) \leq \bar{v}\right\}$ *es convexo para cada* $\bar{v} \in R$.
4. *Continua en* p *y* w.

Demostración: La continuidad de la función de utilidad indirecta sigue directamente de la continuidad de $u(x)$ y de la de $x(p, w)$. Para ver que v es una función cuasiconvexa, supogamos que para (p, w) y (p', w') se verifica que $v(p, w) \leq \bar{v}$ y que $v(p', w') \leq \bar{v}$, luego considere $\lambda(p, w) + (1 - \lambda)(p', w') = (\tilde{p}, \tilde{w}),\ 0 \leq \lambda \leq 1$. Debemos verificar que si x verifica $\tilde{p}x \leq \tilde{w}$ entonces $u(x) \leq \bar{v}$. Como $u(x(\tilde{p}, \tilde{w})) = v(\tilde{p}, \tilde{w})$ y como si x verifica $\tilde{p}x \leq \tilde{w}$ entonces $px \leq w$ y/o $p'x \leq w'$ se sigue que $u(x) \leq u(x(p, w)) = v(p, w) \leq \bar{v}$ y/o $u(x) \leq u(x(p', w')) = v(p', w') \leq \bar{v}$ luego $u(x) \leq \bar{v}$.•

7.2 El problema de la minimización del gasto

En esta sección analizaremos el problema de minimización del gasto. Esto es, el gasto mínimo en el que el agente debe incurrir para alcanzar un nivel de bienestar predefinido. La forma algebraica de este problema es la siguiente:

$$\begin{aligned} &\min\nolimits_{x \in R^l_+} px \\ &s.a : u(x) \geq u. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Este problema de optimización corresponde a encontrar el gasto mínimo en el que el agente debe incurrir, para adquirir una cesta de bienes en el mercado, que le permita acceder como mínimo, al nivel de bienestar representado por u.

Mientras que la utilidad indirecta es el valor máximo de bienestar (utilidad) que el agente puede alcanzar dada su riqueza w y los precios p. El gasto, hace referencia al nivel de riqueza mínimo necesario, de que el agente debe disponer, para alcanzar un determinado nivel de utilidad (o bienestar) u.

El siguiente teorema muestra que minimizar el gasto para alcanzar un determinado nivel de utilidad, es el problema dual al de maximizar la utilidad sujeto a un ingreso fijo.

Teorema 7.2. *Sea $u : R^l_+ \to R$ una función de utilidad continua que representa a una preferencia localmente no saciable $\succeq$ definida en el espacio de consumo $X = R^l_+$ y precios positivos, se tiene entonces que:*

1. *Si x^* es optimal en el problema de maximizar la utilidad (MU) dada la restricción presupuestaria, con $w > 0$ entonces, x^* resuelve el problema de minimizar el gasto (mg) para $u = u(x^*)$. Más aún el gasto mínimo es exactamente igual a w.*

2. *Si x^* es optimal para el problema de minimizar el gasto para alcanzar una utilidad al menos tan buena cuanto $u > u(0)$, entonces x^* resuelve el problema de maximizar la utilidad sujeto a la restricción presupuestaria con un nivel de riqueza igual a w.*

Demostración: (1) Supongamos que x^* es optimal para (7.1) pero que no resuelve el problema (7.2) con $u = u(x^*)$. Esto significa que existe x' tal que $u(x'^*)$ y que verifica $px'^* \leq w$. Sea $U_{x'}$ un entorno de x' en el interior de la restricción presupuestaria. Por la no saciedad local existe entonces $x'' \in U_{x'}$ tal que $u(x'') > u(x')$. Considere entonces, $y(\alpha) = \alpha x^* + (1-\alpha)x''$, $0 \leq \alpha \leq 1$, observe que por ser u cuasicóncava $u(y(\alpha)) > u(x^*)$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$, en especial para α suficientemente pequeño tal que $u(y(\alpha)) \in U_{x'}$ luego x^* no puede ser solución del problema (MU).

(2) Suponga que x^* es optimal para (7.2) pero que no resuelve el problema (7.1) con nivel de riqueza dado por $I = px^*$. Como $u(x^*) \geq u > u(0)$ entonces, $x^* > 0$ por lo que $px^* > 0$. Existe entonces x' tal que $px' \leq px^*$ y para el que además, se verifica que: $u(x') > u(x^*)$. Sea $x(\alpha) = \alpha x' + (i - \alpha)x^*, \alpha \in (0, 1)$. Luego $0 \leq px(\alpha) < px^*$. Para α suficientemente próximo a 1, por la continuidad de u, se tiene que $u(x(\alpha)) > u(x^*)$. Como $px(\alpha) < px^*$ se tiene que x^* no resuelve (7.2) contrario a lo supuesto.•

7.3 La función gasto mínimo

Dados $p >> 0$ (denotamos por $p >> 0$ un vector de coordenadas estrictamente positivas) y un nivel requerido de utilidad $u > u(0)$ la función de gasto es denotada por $e : R^l_{++} \times R \to R$ definida como $e(p, u) = min\, px;\ s.a.:\ x : u(x) \geq u.$

Teorema 7.3. *Sea $u : R^l_+ \to R$ una función de utilidad continua que representa a una preferencia localmente no saciable $\succeq$ definida en el espacio de consumo $X = R^l_+$. Sea $(p, w) >> 0$. La correspondiente función de gasto $e(p, u)$ es:*

1. *Homogénea de grado uno en p.*
2. *Estrictamente creciente en u y no decreciente en $p_h, \forall h$.*
3. *Cóncava en p.*
4. *Continua en p y en u.*

Demostración: (1) Siendo x^* optimal, se tiene que

$$e(\alpha p, u) = \alpha px^* = \alpha px^* \; \forall \; \alpha > 0.$$

(2) Directamente de la definición de mínimo en una región del espacio.
(3) Sea x' la solución de (mg) para un nivel de utilidad u cuando el

precio es $\tilde{p} = \alpha p + (1-\alpha)p', 0 \leq \alpha \leq 1$. Entonces $e(\alpha p + (1-\alpha)p', u) = (\alpha p + (1-\alpha)p')x' = \alpha px' + (1-\alpha)x' \geq \alpha e(p,u) + (1-\alpha)e(p',u)$.
(4) Continuidad.

7.4 La demanda hicksiana o compensada

Llamamos demanda hicksiana a la función (o correspondencia) $h : R^l_{++} \times R \to R^l_+$ tal que $h(p,u) = x^*$, donde x^* resuelve el problema del gasto mínimo para alcanzar el nivel $u > u(0)$ con precios $p >> 0$.

Teorema 7.4. *Sea $u : R^l_+ \to R$ una función de utilidad continua que representa a una preferencia localmente no saciable $\succeq$ definida en el espacio de consumo $X = R^l_+$. Sea $(p,w) >> 0$. La correspondiente función de gasto $e(p,u)$ es:*

1. *Homogénea de grado cero en p.*
2. *No existe exceso de utilidad: Para cualquier $x \in h(p,u)$ se tiene que $u(x) = u$.*
3. *Si $\succeq$ es convexa, entonces $h(p,u)$ es un conjunto convexo, si la preferencia es estrictamente convexa, entonces h es una función.*

Demostración: (1) Se sigue del hecho de que el vector que minimiza, px restricto a $u(x) \geq u$ es el mismo si cambiamos p por αp.
(2) Si para algún $x \in h(p,u)$ se verificara que $u(x) < u$, entonces por la continuidad de u existirá $0 < \alpha < 1$ suficientemente próximo a 1 para el que $x' = \alpha x$ se cumple $u(x') < u$ y $px' < px$, lo que es absurdo.
(3) Por el absurdo. Suponga que existe más de un elemento de $h(p,u)$ luego la combinación convexa de ellos también estará en $h(p,u)$, la estricta cuasiconcavidad de u dará a esta combinación convexa un nivel de utilidad mayor que cada el correspondiente a cada una de las originales, luego estas no podrían pertenecer a $h(u,p)$.•

A partir del teorema (7.2) se deducen las siguientes identidades:

$$h(p,u) = x(p, e(p,u)) \text{ y, } x(p,w) = h(p, v(p,w)). \tag{7.3}$$

Obsérvese que la primera de estas relaciones muestra la compensación necesaria que debe ser ofrecida a (o brindada por) un consumidor para recuperar su bienestar anterior, ante un cambio en los precios. Obsérvese que el cambio en el bienestar puede ser positivo o negativo, dependiendo de las características del cambio de precios. Supongamos que los precios cambian de un nivel p a p' siendo $p' > p$. El nivel actual de bienestar estará ahora definido por $u' = u(x(p', w)) < u(x(p,w)) = u$ para alcanzar la situación anterior de bienestar el consumidor debe ser compensado en una cantidad Δw_h tal que $h(p', u) = x(p', w + \Delta w_h)$, de esta forma $u(x(p', w + \Delta w_h)) = u$ con lo que se alcanzará el nivel anterior de utilidad, claro que no con la misma demanda que anteriormente. El valor de esta compensación, llamada hicksiana, está dado por $\Delta w_h = e(p', u) - w$.

Alternativamente, puede compensarse al consumidor de forma tal que a precios nuevos p' alcance la cesta original $x(p,w)$ para esto la compensación debe ser $comp = s = (p' - p)x(p,w)$. Esta compensación recibe el nombre slutskiana. Obviamente esta nueva demanda $x(p', w+s)$ no será igual a la original y además habrá un cambio en el bienestar, el cual se incrementará en $\Delta u = u(x(p', w')) - u(x(p,w))$ siendo $w' = w + s$.[1]

[1]**La descomposición de E. Slutsky:** Al variar los precios relativos de los bienes, asistimos un doble fenómeno que cambia el consumo de los agentes. Por un lado los consumidores substituyen el consumo de los bienes cuyo precio aumenta por otros relativamente más baratos, es lo que llamamos el efecto sustitución. Pero además se produce un cambio en su retricción presupuestaria, pues su región presupuestaria varía pudiendo un individuo hacerse más rico o menos rico luego del cambio de precios. El tipo de consumo también se modifica de acuerdo al ingreso del consumidor. Es el llamado efecto riqueza. Ambos efectos pueden estudiarse en forma separada de la siguiente forma: Supongamos que los precios cambian de p a p'. Al cambiar los precios cambia la región presupuestaria. La demanda anterior puede quedar fuera o dentro

7.5 La demanda, la utilidad indirecta y la función de gasto

Supondremos a lo largo de este capítulo, a los efectos de que la demanda hicksiana es una función, que las preferencias son estrictamente convexas, así como las propiedades de diferenciación necesarias.

Teorema 7.5. *Sea $u : R^l_+ \to R$ una función de utilidad continua que representa a una preferencia localmente no saciable, estrictamente convexa $\succeq$ definida en el espacio de consumo $X = R^l_+$. Para todo p, y u la demanda hicksiana $h(p,u)$ es el gradiente de la función de gasto respecto de los precios:*

$$h(p,u) = grad_p e(p,u).$$

Es decir $h_j(p,u) = \partial e(p,u)/\partial p_j$ para todo $j = 1, 2, ..., l$.

Demostración: Consideremos $\phi(p) = e(p,u) - p\bar{x}$. Para todo $p \in R^l_{++}$ se verifica que $\phi(p) \leq 0$ donde la igualdad se alcanza en $p = \bar{p} : \bar{p}\bar{x} = e(\bar{p},u)$ es decir si y solamente si p verifica $\frac{\partial \phi(p)}{\partial p_k} = 0 \; \forall k = 1, 2, ..., l$ esto es si y solamente si, $p = \bar{p}$ tal que $\frac{\partial e(\bar{p},u)}{\partial p_k} = \bar{x}_k$. Luego como $e(p,u) = ph(p,u)$ se concluye el teorema.•

---

de la nueva restricción, supongamos que $x(p,w) \notin B_w(p')$. Esto supone una pérdida del poder adquisitivo del consumidor. Hagamos el siguiente experimento. Compensemos al consumidor en una cantidad s de forma tal que para $w' = w + s$ se verifique que la cesta de bienes anteriormente demandada pertenezca a la frontera de la nueva región presupuestaria, simbólicamente $x(p,w) \in fr[B_{w'}(p')]$. Es decir que, a los nuevos precios, con el ingreso w', puede recuperar su consumo anterior. No obstante, aún en este caso la demanda se habrá modificado y será ahora $x(p',w') \neq x(p,w)$. Precisamente la diferencia $ES = x(p',w') - x(p,w)$. Mide el efecto sustitución, pues se deja de lado el cambio por la variación relativa del ingreso. Puede observarse en la figura (12) que $u(x(p,w)) < u(x(p',w'))$. Supongamos ahora que fijados los precios en p' y consideremos como hubiese cambiado el consumo de un agente sólo por un cambio en su ingreso. Esto se mide por la diferencia $EI = x(p',w) - x(p',w')$ lo que se conoce como el efecto ingreso. De donde sale que el cambio en la demanda total por el cambio de precios $x(p',w) - x(p,w)$ es igual al efecto substitución más el efecto ingreso, es decir $x(p'w) - x(p,w) = ES - EI$. Ver seeción (7.7).

Corolario 7.6. *Bajo los supuestos de diferenciabilidad necesarios se concluye que:*

1. $D_p h(p,u) = D_p^2 e(p,u)$.

2. $D_p h(p,u)$ *es una matriz semidefinida negativa.*

3. $D_p h(p,u)p = 0$.

$D_p(h(p,u))$ *representa la matriz* $l \times l$ *jacobiana de* $h(p,u)$ *respecto a* p.

Demostración: Las propiedades (1) y (2) siguen directamente del teorema anterior. La propiedad (2) sigue de la homogeneidad de grado cero de $h(p,u)$ respecto de p es decir derivando con respecto a α y en $\alpha = 1$ la igualdad $h(p,u) = h(\alpha p, u)$, $\forall \alpha > 0$.

7.6 La ecuación de Slutsky

Aunque la función de demanda hicksiana no es directamente observable, (tiene entre sus argumentos a la función de utilidad) su derivada puede calcularse a partir de la demanda walrasiana, esta si observable. La importancia de la ecuación de Slutsky está en que establece una relación entre las derivadas de ambas demandas.

Teorema 7.7. (de Slutsky) *Sea* $u : R^l_+ \to R$ *una función de utilidad continua que representa a una preferencia localmente no saciable, estrictamente convexa, entonces para todo* (p,w) *y* $u = v(p,w)$ *se verifica :*

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w); \forall \ l, k, \tag{7.4}$$

equivalentemente:

$$D_p h(p,u) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)^T. \tag{7.5}$$

Demostración: Considere el par $(\bar{p}, \bar{w})$ que permite al consumidor alcanzar un nivel de utilidad $\bar{u}$. La riqueza necesaria para alcanzar ese nivel es $\bar{w} = e(\bar{p}, \bar{u})$. Tenga ahora en cuenta que

$$h(p, u) = x(p, e(p, , u)) \tag{7.6}$$

en este caso, $h_j(\bar{p}, \bar{u}) = x_j(\bar{p}, \bar{w}), j = 1, ..., l$. Derive ahora respecto de p_k en la identidad (7.6) y sustituya convenientemente•

La matriz $D_p h(p, u)$ es conocida como la matriz de sustitución de Slutsky, y mide los cambios diferenciales en el consumo, debidos a modificaciones en los precios. Dicho cambio en los precios supone un cambio en la cesta de bienes a consumir, pues en principio el consumidor modifica su consumo cuando los precios de estos cambian, (sustituye determinados bienes por otros), este efecto lo mide el primer sumando del segundo miembro de la ecuación (7.4), el que mide el efecto directo en el cambio de la demanda por un cambio en los precios, se denomina efecto de sustitución, asociado a un nivel de utilidad dado. . El segundo sumando del segundo miembro de esta ecuación, representa la compensación que debe otorgarse al consumidor, para que mantenga a los precios nuevos, el bienestar anterior al cambio de precios. Obérvese que luego de compensado de forma tal de que pueda alcanzar el nivel de utilidad u, el consumidor no necesariamente consumirá la cesta que anteriormente al cambio de precios, le permitía alcanzar este nivel de bienestar. Esta modificación del consumo por esta compensación en la riqueza se denomina efecto riqueza . En definitiva la ecuación de Slutski mide el efecto sustitución en la demanda de un consumidor al que se le compensa su riqueza por la variación en los precios para que no modifique su nivel de bienestar, medido por u.

La matriz $D_p h(p, u)$ es la matriz de Slutsky, ella es *semidefinida negativa, simétrica y satisface* $S(p, v)p = 0$. El hecho de ser esta matriz semidefinida negativa, muestra que la demanda hicksiana o compensada, verifica la ley de la demanda, es decir que la demanda compensada por el bien j es función decreciente de su precio, $j = 1, ..., l$. Esto no es cierto en general para la demanda walrasiana.

Nota 7.8. *Obsérvese que la pendiente de la demanda compensada es más negativa que la correspondiente a la demanda walrasiana para un bien normal, mientras que es menos negativa cuando el bien es inferior.*

Obtengamos ahora la ecuación de Slutsky suponiendo que cada agente de una economía con l bienes tiene una riqueza inicial o una dotación inicial, dada por una cesta de bienes del tipo $w = (w_1, ..., w_l)$. Por lo cual el valor de esta dotación inicial, o el nivel de su riqueza inicial, será igual a $pw = p_1 w_1 + ... + p_l w_l$. Tenemos ahora una situación en la que el ingreso, como función de los precios queda claramente establecida. Definamos entonces la función ingreso $m(p) = \sum_{i=1}^{l} w_i p_i$. Sea $x(p, m(p))$ la demanda correspondiente a precios p e ingresos $m(p)$, por lo que consecuentemente, $x(p' m')$ representará la demanda correspondiente a precios p' e ingresos $m' = m((p')$.

Utilizando la notación vectorial, consideremos ahora la siguiente identidad:

$$\frac{x(p', m') - x(p, m)}{p' - p} = \frac{x(p', m') - x(p, m')}{p' - p} + \frac{x(p, m') - x(p, m)}{p' - p}. \quad (7.7)$$

El primer miembro de la identidad representa la variación de la demanda cuando se modifican los precios y el ingreso. Mientras que en el miembro de la derecha nos encontramos con el efecto precios con ingresos monetarios fijos, y luego, el segundo sumando, representa es efecto riqueza con ingreso para precios fijos.

Tomado límites para $p \to p'$ tendremos

$$lim_{p' \to p} \frac{x(p', m') - x(p, m')}{p' - p} = \frac{\partial x(p, m')}{\partial p} = D_p h(p, u) - D_m x(p, m) x(p, m)^T, \quad (7.8)$$

que corresponde al efecto substitución con ingreso monetario fijo.

$$\lim_{p\to p'} \frac{x(p,m') - x(p,m)}{p' - p} = \frac{\partial x(p,m)}{\partial m}\frac{dm(p)}{dp} = wD_m x(p,m). \tag{7.9}$$

Luego teniendo en cuenta que $h(p,u) = x(p,e(p,u))$ y siendo $m(p) = e(p,u)$, llegamos a la ecuación de Slutsky:

$$\frac{dx(p,m(p))}{dp} = \frac{\partial x(p,m(p))}{\partial p} + \frac{\partial x(p,m(p))}{\partial m}[w - x(p,m(p))]. \tag{7.10}$$

Escrita la igualdad anterior coordenada a coordenada tendremos, para cada agente, las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx_j(p,m(p))}{dp_k} = \tfrac{\partial x_j(p,m(p))}{\partial p_k} + \tfrac{\partial x_j(p,m(p))}{\partial m}[w_k - x_k(p,m(p))], \\ &k = 1,...,l; j = 1,...,l. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Un cuidadoso desarrollo de esta ecuación y análisis de su importancia en la teoría económica, el lector podrá encontrar en [Balasko, Y.].

El término $\frac{\partial x(p,m(p))}{\partial m}[w - x(p,m(p))]$ representa el efecto ingreso cuando consideramos dotaciones iniciales w. Mientras que el término $\frac{\partial x(p,m(p))}{\partial p}$ representa el efecto sustitución, resultado del cambio en los precios de los bienes.

7.7 Demanda walrasiana y utilidad. La identidad de Roy

Sabemos que la demanda hicksiana es la derivada de la función de gasto. No existe un análogo para demanda walrasiana y utilidad indirecta, pues la utilidad no es invariante bajo transformaciones por funciones crecientes, de esta forma la demanda (que es invariante para este tipo de transformaciones) no puede ser igual a la derivada de la función indirecta de utilidad pues ésta no es invariante, para tal transformación. Pero hay un arreglo posible si normalizamos las derivadas de la utilidad indirecta respecto de los precios con la derivada de ella misma respecto de la riqueza. Este es el contenido del teorema de Roy.

Teorema 7.9. (de Roy) *Sea $u : R^l_+ \to R$ una función de utilidad continua que representa a una preferencia localmente no saciable, estrictamente convexa, entonces para todo $(\bar{p}, \bar{w})$ y $\bar{u} = v(\bar{p}, \bar{w})$ la siguiente identidad se verifica:*

$$x(\bar{p}, \bar{w}) = -\frac{1}{\partial v(\bar{p}, \bar{w})/\partial w} grad_p\, v(\bar{p}, \bar{w}), \tag{7.12}$$

equivalentemente para toda $j = 1, 2, ...l$

$$x_j(\bar{p}, \bar{w}) = -\frac{\partial v(\bar{p}, \bar{w})/\partial p_l}{\partial v(\bar{p}, \bar{w})/\partial w}. \tag{7.13}$$

Demostración Sea $\bar{u} = v(\bar{p}, \bar{w})$ luego $\bar{u} = v(p, e(p, \bar{u}))$ se verifica para todo p. Derivando ahora con respecto a p y evaluando en $\bar{p}$ se obtiene la identidad de Roy.•

7.8 La recuperación de la preferencias

Mientras la demanda walrasiana es visible, no lo es la preferencia o la utilidad que define la demanda del agente. El problema de recuperar la función de utilidad a partir de la demanda tiene entonces interés. Este proceso se hará en dos etapas, 1) recuperación de la utilidad a partir del gasto, 2) recuperación de la función de gasto a partir de la demanda. Sea

$$V_u = \left\{ x \in R^l_+ : px \geq e(p, u), \forall p \in R^l_{++} \right\}. \tag{7.14}$$

La función gasto $e(\cdot, u)R^l_+ \to R$ se define como $e(p, u) = \text{mín}_{x \geq 0}\, px$, s.a, $x \in V_u$. Las propiedades de, $e(p, u)$ muestran que V_u es no vacío cerrado y convexo y que $V_{u'} \subset V_u$ cada vez que $u' \geq u$.

Obsérvese que la frontera de V_u está formada por los $x \in V_u : u(x) = u$. Por lo tanto es posible obtener u, pues ella es la envolvente de las rectas $px = e(p, u)$. Para cada p fijo, V_u pertenece al semiplano $H_p = \left\{x \in R^l : px \geq e(p, u), \right\}$.

A seguir, veremos que es posible obtener la función de gasto a partir de la función de demanda, cuando ésta proviene de maximizar una función de utilidad. Supongamos que a partir de una serie de observaciones empíricas hemos obtenido la demanda de un individuo, $x(p, w)$. El lema de Sheppard permite escribir el sistema de ecuaciones diferenciales, $\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_k} = h_k(p, e(p, u)), k = 1, 2, ..., l$. La identidad $x(p, w) = h(p, e(p, u))$ para $e(p, u) = w$ nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_k} = x_k(p, e(p, u)), k = 1, 2, ..., l. \tag{7.15}$$

Con la condición inicial: $e(p^0, u^0) = w^0$.

La existencia de una solución para el sistema (7.15) no está en principio asegurada, no obstante un conocido resultado de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dice que si la matriz hessiana de e $D_p^2 e(p, u)$ es simétrica entonces la solución existe. Recuerde que:

$$D_p^2 e(p, u) = D_p x(p, e(p, u)) + D_w x(p, e(p, u)) x(p, e(p, u))^t = S(p, e(p, u)). \tag{7.16}$$

Siendo S la matriz de Slutski, de una demanda generada por preferencias entonces es simétrica y por lo tanto la solución al sistema (7.15) existe.

Por lo tanto en los supuestos indicados, es posible obtener a partir de las observaciones que definen la función de demanda, la función de utilidad que la genera. Para esto debemos integrar el sistema (7.15) y luego encontrar la frontera del conjunto V_u. Esta curva representará la función de utilidad correspondiente a la demanda observada.

Como corolario de lo anteriormente dicho se sigue entonces que toda función que verifique la ley de Walras, sea homogénea de grado cero, y su matriz jacobiana sea simétirca, definida positiva y singular ($pJ = Jp = 0$) es la función de demanda compensada $h(p, u)$ para un consumidor cuya demanda walrasiana está dada por $x(p, w) = h(p, u)$ siendo $w = e(p, u)$. Es decir que existen preferencias neoclásicas que tienen por demanda precisamente a esta función. Se establece así una correspondencia entre la maximización de funciones de utilidad y la demada correspondiente y recíprocamente entre una demanda y la existencia de una función de utilidad que la define.

7.9 Ejercicios

Ejercicio 7.10. *Suponga que un granjero produce leche, cuyo consumo (por semana), va de acuerdo a a función de demanda definida por a* $x_l = 10 + \frac{m}{10p}$, *donde* m *representa su ingreso, el que proviene precisamente de la venta de la leche en el pueblo cercano, y* p *su precio unitario. Supongamos que inicalmente el precio de la leche es igual a 3 pesos y vende 40 litros por semana, lo que hace que su demanda semanal sea igual a 14 litros. Suponga ahora que el precio de la leche cae a 2 pesos por litro.*

1. *Obtenga la demanda bajo estas nuevas condiciones.*

2. *Calcule el efecto ingreso y el efecto substitución.*

Ejercicio 7.11. *Considere una economía con dos bienes y un agente cuya función de utilidad es* $u(x, y) = xy$ *con dotaciones iniciales* $w = (2, 4)$. *Suponga inicialmente que los precios están dados por* $p = (1, 2)$. *Suponga ahora una variación en los precios* $p'(2, 2)$.

1. *Calcule la demanda para* $p = (1, 2)$.

2. *Calcule la demanda para* $p = (1, 2)$.

3. *Calcule el efecto precios y el efecto ingreso.*

4. *Escriba la ecuación de Slutsky.*

Capítulo 8

Precios y bienestar

La teoría del bienestar económico tiene como objetivo la evaluación de los efectos de los cambios económicos en el bienestar del consumidor. Si bien estos cambios pueden deberse a múltiples factores nos ocuparemos aquí en especial de los cambios en el bienestar de los agentes debidos a cambios en los precios. Más adelante analizaremos los cambios en el bienestar social producidos por redistribuciones de las dotaciones iniciales.

Si fuera posible conocer las preferencias de los consumidores, sería entonces posible determinar una función de demanda $x(p, w)$ y a partir de ella obtener $v(p, w)$ lo que daría sin duda una evaluación del nivel de bienestar social, siendo $u(x(p, w)) = v(p, w)$. Cambios en los precios de de p^0 a p^1, afectarían positivamente el bienestar de los agentes si $v(p^1, w) - v(p^0, w) > 0$ pues esto implica un cambio positivo en el nivel de utilidad, $u^1 - u^0 > 0$ donde $u^i = v(p^i, w), i = 1, 2$; consecuentemente el cambio en precios implica una pérdida de bienestar cuando la desigualdad es la contraria.

8.1 Indice de precios

Los índices de precios tratan de medir el cambio sobre el nivel de vida que se deriva de un cambio en los precios de los bienes. Supongamos que el vector de precios cambio de $p^0 \in R^l_+$ a $p^1 \in R^l_+$. Tomemos como referencia un vector de consumo $x^r \in R^l_+$. Calculemos su costo para ambos precios. Podemos entonces definir el siguiente índice:

$$IP(p^0, p^1, x^r) = \frac{P^1 x^r}{p^0 x^r} \tag{8.1}$$

Esto mide la relación entre el costo de vida en dos momentos diferentes cuando los precios eran p^0 y cuando son p^1. No obstante, esta relación, depende de cual sea la cesta de bienes elegida como representante del nivel de consumo. Sea $x^j = x(p^j$ con $j = 0, 1$. Podemos entonces definir dos índices.

1. **Indice de Laspeyres**

$$IP_l(p^0, p^1, x^0) = \frac{p^1 x^0}{p^0 x^0} \tag{8.2}$$

2. **Indice de Paasche**

$$IP_p(p^0, p^1, x^1) = \frac{p^1 x^1}{p^0 x^1} \tag{8.3}$$

Estos índices miden el cambio en el costo de vida que implica un cambio en los precios referido a una cesta fija de bienes. Maneras más precisas de medir el cambio en el nivel de vida puede ser las siguientes:

1. **Indice verdadero de Laspeyres**

$$VIP_l(p^0, p^1, u^0) = \frac{e(p^1, u^0)}{e(p^0, u^0)} \tag{8.4}$$

2. **Indice verdadero de Paasche**

$$IP_p(p^0, p^1, u^1) = \frac{e(p^1, u^1)}{e(p^0, u^1)} \tag{8.5}$$

Se puede ver fácilmente que:

$$VIP_l \leq IP_l, \quad VIP_p \geq IP_p.$$

8.2 Medidas del cambio en el bienestar

Una forma de medir esa variación del bienestar, en términos de dinero, sería el de considerar para un vector de precios $\bar{p}$ la función de gasto $e(\bar{p}, v(p, w))$ lo que equivale al costo, en términos monetarios, que tiene para el agente alcanzar el nivel de bienestar $u = v(p, w)$. Consecuentemente $e(\bar{p}, v(p^1, w)) - e(\bar{p}, v(p^0, w))$ sería la medida monetaria del cambio de nivel de utilidad. Equivalentemente el valor del cambio de utilidad de u^0 a u^1 cuando los precios son $\bar{p}$.

Siendo $u^i = u(x(p^i, w)), i = 1, 2$ tenemos que $p^i x(p^, w) = e(p^i, u^i) = w, i = 1, 2$. Definimos ahora la *variación equivalente (VE)* y la *variación compensada (VC)*

$$VE(p^0, p^1, w) = e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0) = e(p^0, u^1) - w. \tag{8.6}$$

$$VC(p^0, p^1, w) = e(p^1, u^1) - e(P^1, u^0) = w - e(p^1, u^0). \tag{8.7}$$

La *variación equivalente* puede interpretarse como el valor monetario que el consumidor está dispuesto a pagar a cambio de que los precios no cambien. O bien, puede decirse que ella representa la variación en la riqueza del consumidor que resulta equivalente, en términos de bienestar, al cambio en los precios. Aquí u^0 es el nivel de utilidad que el agente alcanza maximizando su función de utilidad en su restricción presupuestaria cuando los precios son p^0 y su riqueza w. Mientras que u^1 representa el nivel de utilidad máximo que corresponde a un nivel de precios p^1 y riqueza w. Es decir, $e(p^0, u^1) - w$ es el incremento en el nivel de riqueza necesario para alcanzar un incremento en el nivel de utilidad igual a $u^1 - u^0$ cuando los precios se mantienen fijos en p^0. Se sigue que $v(p^0, w+VE) = u^1$. Es decir la variación en los precios de p^0 a p^1 tiene sobre el bienestar el mismo impacto que si la renta cambiara de w a $w+VE$ dejando los precios fijos. En consecuencia $VE > 0$ significa que los cambios en los precios tienen impacto positivo sobre el bienestar del consumidor, mientras que $VE < 0$ significa lo contrario.

La **variación compensada** mide lo que el consumidor debe pagar o recibir, para que luego de haber sido cambiados los precios esté en el nivel de utilidad original. Es decir la variación compensada puede ser medida como $v(p^1, w - CV) = u^0$.

Tanto la VE, como la VC, pueden ser expresadas en términos de la demanda hicksiana, basta para esto tener en cuenta que $h_j(p, u) = \partial e(p, u)/\partial p_j$. Luego si suponemos que sólo se modifica el precio p_1 se obtiene:

$$\begin{aligned} &EV(p^0, p^1, w) = e(p^0, u^1) - w = e(p^0, u^1) - e(p^1, u^1) = \\ &= \textstyle\int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, p_{-1}, u^1) dp_1. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Es decir, es el área bajo la curva que representa la demanda hicksiana, asociada al nivel de utilidad u^1, entre p_1^0 y p_1^1.

Análogamente la variación compensada es igual a:

$$VC(p^0, p^1, w) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, p_{-1}, u^0) dp_1.$$

Ejemplo 8.1. *(¿Tasar el consumo del bien, o imponer un pago único equivalente? ¿ IVA o impuesto a la renta?) Supongamos que el planificador central quiere saber que es mejor para el consumidor de un determinado bien, si imponer una tasa fija al consumo de algún bien,* *(supongamos que al bien 1) de tal forma que* $p_1^1 = p_1^0 + t$ *o bien imponer una pago final igual a* $T = tx_1(p^1, w)$.

El consumidor preferirá el pago único final T a la tasa t si se verifica la desigualdad

$$VE(p^0, p^1, w) < -T.$$

Es decir si la variación equivalente es más negativa que la que es negativa que $-T$, el monto de riqueza que perderá si se impone un pago único. Es decir el consumidor estará peor bajo la tasación sobre el consumo del bien que bajo la imposición de un pago único si $w - T > e(p^0, u^1)$.

La diferencia

$$(-T) - VE(p^0, p^1, w) = w - T - e(p^0, w) \tag{8.9}$$

se llama el *peso muerto de la pérdida por imposición de una tasa sobre el consumo del bien.* Mide la diferencia entre un pago de una sola vez igual a $T = tx_1(p^1, w)$, lo que equivale a una reducción en T de la riqueza original, y lo que el consumidor estaría dispuesto a pagar si los precios son los mismos pero ubicándose en el nivel de utilidad u^1 que es el máximo posible que puede obtener si las dotaciones iniciales se quedan fijas y los precios cambian a p^1.

Esta medida puede ser representada en términos de la demanda hicksiana y el nivel de utilidad u^1. Como $T = tx_1(p^1, w) = th_1(p^1, u^1)$. Sea $p_{-1} = (p_2, ..., p_l)$ y supongamos que $p_h^0 = p_h^1 = \bar{p}$, $\forall h = 2, ..., l$. Se tiene entonces la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
&(-T) - EV(p^0, p^1, w) = e(p^1, u^1) - e(p^0, u^1) - T = \\
&= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} h_1(p_1, P_{-1}^0, u^1)dp_1 - th_1(p_1^1, p_{-1}^0, u^1) = \\
&= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} [h_1(p_1, P_{-1}^0, u^1) - h_1(p_1^1, p_{-1}^0, u^1)]dp_1.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Siendo $EV(p^0, p^1, w) \leq 0$ and $(-T)$ lo que el agente pierde en el pago de una sola vez. Como $h_1(p, u)$ es decreciente con p_1 esta diferencia es positiva[1], (estrictamente, si la demanda hicksiana es estrictamente decreciente).

En forma similar puede trabajarse a partir de la demanda hicksiana $h_1(p, u^0)$, correspondiente al nivel u^0. Esto mide el déficit o beneficio de una autoridad central que cobra un impuesto al consumo de algún bien pero desea compensar al consumidor para que mantenga su nivel de bienestar correspondiente a u^0. Hay déficit, si lo recaudado $th_1(p^1, u^0)$ es menor que la compensación que el gobierno debería pagar para compensar al consumidor, es decir: $-CV(p^0, p^1, w) > th_1(p^1, u^0)$ en el caso de déficit el resultado sería la transferencia monetaria del gobierno a los consumidores. Equivalentemente, el déficit es igual a $th_1(p^1, u^0) - e(p^1, u^0) + w$.

En definitiva, la siguiente cadena de igualdades mide el déficit:

$$
\begin{aligned}
&-CV(p^0, p^1, w) - th_1(p^0, p^1, w) = e(p^1, u^0) - e(p^0, u^0) - th_1(p^0, p^1, w) = \\
&= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1)dp_1 - th_1(p_1^0, p_{-1}^0, u^1) = \\
&= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} [h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0) - h_1(p_1^0, \bar{p}_{-1}, u^0)]dp_1.
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

Siendo h_1 estrictamente decreciente, esta diferencia es positiva.

8.3 Ejercicios

Ejercicio 8.2. *Calcule la derivada repecto a t de la pérdida por tasación en (8.10) y en (8.11). Muestre que evaluado en $t = 0$ estas derivadas se anulan, pero son estrictamente positivas para todo $t > 0$. Interprete el resultado.*

[1] Comparar esta situación con los casos de exceso de gravamen ya estudiados.

Ejercicio 8.3. *Suponga que la autoridad central quiere aplicar un impuesto al consumo de un determinado bien y debe elegir entre gravar uno de dos bienes diferentes de forma tal que* $T = t_1 x_1(p^1, t_1) = t_2 x_2(p^2, t_2)$, *siendo* p^1 *el vector de precios que resulta de cambiar el precio del bien* 1 *y dejar todos los demás en su forma actual, análogamente* p^2 *pero respecto al bien* 2.

1. *Muestre que* p^1 *es mejor que* p^2 *si y solamente si* $VE(p^0, p^1, w) - VE(p^0, p^2, w) > 0$ *siendo* p^0 *vector actual de precios.*

2. *¿Por qué no sería correcto, evaluar la mejor política usando la variación compensada?*

Ejercicio 8.4. *Muestre que si* $u(x)$ *es cuasi-lienal con respecto al bien 1, (fijando* $p_1 = 1$*) entonces* $CV(p^0, p^1, w) = EV(p^0.p^1, w)$ *para todo* (p^0, p^1, w).

Ejercicio 8.5. *Discuta la observación hecha en (7.8. Y represente gráficamente la demanda hicksiana y la walrasiana.*

Capítulo 9

El bienestar bajo información parcial

En algunos casos no se puede calcular el gasto del consumidor porque no se dispone de toda la información sobre las características de su demanda. Consideremos el caso en el que son conocidos los precios iniciales p^0 y finales p^1, así como la demanda inicial $x^0 = x^0(p^0, w)$. El siguiente test muestra cuando un cambio en los precios resulta favorable para el consumidor.

Teorema 9.1. *Supongamos que el consumidor tiene preferencias localmente no saciables. Si* $(p^1 - p^0)x^0 < 0$ *entonces el consumidor está estrictamente mejor bajo la situación* (p^1, w) *que bajo* (p^0, w).

Demostración: El resultado es un aplicación de la ley de Walras. Siendo $p^0x^0 = w$ entonces como $(p^1 - p^0)x^0 < 0$ se tiene que una cesta factible, bajo p^0 sigue siéndolo bajo p^1. Por lo tanto $B_w(p^0) \subset B_w(p^1)$, luego por la no saciedad local, el consumidor estará mejor estrictamente bajo los nuevos precios.•

Obsérvese que este teorema resulta fácilmente de la aproximación de primer orden para la función de gasto. Téngase en cuenta que $h(p^0, u^0) = x^0$.

La convexidad del subconjunto de R^l

$$S = \left\{ p \in R^l_+ : e(p, u^0) \geq e(p^0, u^0) \right\}$$

muestra que solamente si la diferencia $\|p^1 - p^0\|^1$ no es muy grande puede afirmarse que $e((1-\alpha)p^0 + \alpha p^1), u^0) > w$ para todo $\alpha < \bar{\alpha}$.

9.1 El bienestar social y el equilibrio parcial

El análisis marshaliano estudia el comportamiento de un mercado por un bien (o varios bienes) que constituyen una pequeña parte del mercado total. Marshal analiza el caso cuando los gastos en este bien constituyen una pequeña parte del gasto total, consecuentemente las influencias en el bienestar del consumidor por cambios en el mercado de este bien no afectan en forma importante al bienestar total. Supone que el resto de los bienes mantienen fijos sus precios aún cuando hay cambios en el precio del bien en estudio. Diferencia éstos, del bien estudiado y los unifica en un único bien, representado por el numerario. Consecuentemente al productor puede obviar el conocimiento del comportamiento de los restantes mercados, pues éste no afectará al comportamiento del mercado en cuestión, del que sí se dispone de información. Existen entonces, en este análisis dos bienes, el numerario, y un único bien de consumo y se dispone de información parcial, la que por otra parte, es la única que aquí importa.

Cada consumidor tiene una función de utilidad cuasi-lineal que se puede representar por la función: $u_i : R \times R_+ \to R$, definida como:

$$u_i(m_i, x_i) = m_i + \phi_i(x_i),\ i = 1, ..., I. \tag{9.1}$$

Se asume que $\phi_i(0) = 0,\ \ \phi_i^{'}(x_i) > 0,\ \phi_i^{''}(x_i) < 0,\ \forall x_i > 0.$

[1]Dado $p \in R^n$, representamos por $\|p\|$ a la norma euclidiana de p. Es decir $\|p\| = \sqrt{p_1^2 + ... + p_n^2}$.

Suponemos que el gasto total en los otros bienes está dado por m. Consideramos ahora una economía con dos bienes, (m, x) x representa la cantidad consumida del bien l o de consumo, y m el gasto en todos los otros bienes. Por otra parte, la economía produce el bien de consumo l, a partir de m mediante J firmas cuyas tecnologías representamos por

$$Y_j = \{(-z_j, q_j) : q_j \geq 0,\ q_j \leq f_j(z_j)\}\ ;\ j = 1, 2, ..., J. \tag{9.2}$$

Donde z_j representa la cantidad de bien m que se usa como insumo, y f_j es la función de tecnología, de la $j-$ésima firma. Recuerde que si el conjunto de tecnología es convexo, entonces Y_j puede ser representado por[2]

$$Y_j = \{(-z_j, q_j) : q_j \geq 0,\ \tilde{p}z_j \geq c_j(q_j)\}\ ;\ j = 1, 2, ..., J, \tag{9.3}$$

siendo $\tilde{p}$ el precio del único insumo necesario, y $c_j(q_j)$ el costo incurrido por la $j-$ésima firma, por producir la cantidad q_j, del único bien que se produce, dada la tecnología f_j, utilizada por dicha firma.

Suponemos que en la economía el precio unitario del bien de consumo es p^* y que el precio del numerario se normaliza por $\tilde{p} = 1$. Asumimos que los agentes, inicialmente tienen solamente dotaciones iniciales en numerario, en cantidad w_{mi} y no en el bien de consumo. Las firmas maximizan beneficios

$$\max_{q_j \geq 0} p^* q_j - c_j(q_j). \tag{9.4}$$

Las condiciones de primer orden implican $p^* \leq c_j^{'*}$ con igualdad si $q_j^* > 0$.

Mientras que los agentes, a los que asignamos índices $i = 1, ..., I$ maximizan su función de utilidad restringidos a su región presupuestaria:

$$\begin{aligned} &max_{m_i, x_i} m_i + \phi_i(x_i) \\ &s.a:\ m_i + p^* x_i \leq w_{mi} + \textstyle\sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}(p^* q_j^* - c_j(q_j^*)) \end{aligned} \tag{9.5}$$

[2]Recuerde que $c_j(q_j) = min_{\{z_j : f_j(z_j) \geq q_j\}} \tilde{p}z_j$, luego, $\tilde{p}z_j \geq c_j(q_j), \forall z_j : f_j(z_j) \geq q_j$.

Las condiciones de primer orden para este problema son: $\phi_i^{'}(x_i^*) \leq p^*$ con igualdad si $x_i^* > 0$.

Obsérvese que en un modelo cuasi-lineal como este el efecto riqueza sobre el consumo del bien no numerario es cero.

Definición 9.2. *Un par de elementos, represntados por una asignación de consumo-producción, $(x_1^*, ..., x_I^*, q_1^*, ..., q_j^*)$ y un precio p^* constituyen un equilibrio competitivo si y sólo si:*

$$
\begin{aligned}
&p^* \leq c_j'(q_j^*),\ \textit{con igualdad si}\, q_j^* > 0\ j = 1, 2, .., J && (a)\\
&\phi_i'(x_i^*) \leq p^*,\ \textit{con igualdad si}\, x_i^* > 0;\ i = 1, 2, ..., I && (b)\\
&\textstyle\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{j=1}^{J} q_j^* && (c).
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

Obsérvese que las ecuaciones (9.6,(a),(b),(c)) no están relacionadas con la distribución inicial de la riqueza ni con la participación de los agentes en las firmas. Esto es propio de la simplificación cuasi lineal. La condición (9.6,(c)) exige que en equilibrio, la oferta agregada sea igual a la demanda agregada.

El hecho de ser la utilidad cuasi lineal hace que no haya efecto riqueza, la demanda y la oferta del bien no numerario dependen únicamente de su precio Si asumimos condiciones tales que hagan que las firmas tengan interés en producir y los agentes en consumir el bien no numerario, entonces, la demanda agregada es continua y no creciente con p mientras que la oferta agregada es no decreciente y continua con p. Obsérvese que de las ecuaciones de primer orden se obtiene: $q_j'(p) = 1/c_j''(q_j(p)) > 0$ mientras que $x_i'(p) = 1/\phi''(x_i(p)) < 0$.

Consideremos la asignación $(\bar{x}, \bar{q})$. Supongamos que el valor de $\phi_i(x_i)$ puede ser medido en términos del monetario, cuya cantidad total asumimos igual a w_m. De esta forma los niveles posibles de utilidad alcanzados por la sociedad, están definidos por:

$$\mathcal{U} = \left\{ (u_1, ..., u_I) : \sum_{i=1}^{I} u_i \leq \sum_{i=1}^{I} \phi_i(\bar{x}_i) + w_m - \sum_{j=1}^{J} c_j(\bar{q}_j) \right\} \tag{9.7}$$

Definición 9.3. *Llamaremos plus-valor marshaliano asociado a la asignación factible: $(\bar{x}, \bar{q})$ al número:*

$$S(\bar{x}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i) - \sum_{j=1}^{J} c_j(q_j). \tag{9.8}$$

Supongamos cambios en la demanda x^0 a x^1 y en la oferta q^0 a q^1 del bien no numerario, que no alteren la ecuación de equilibrio oferta igual demanda, se verificará entonces la igualdad

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{I} \Delta x_i = \sum_{j=1}^{J} \Delta q_j = \Delta q. \tag{9.9}$$

Como las condiciones de primer orden hacen que $p(x) = \phi_i'(x_i)$, y $c'(q_i) = C'(q)$ se tiene entonces que el incremento del valor marshaliano será entonces igual a:

$$\begin{aligned} \Delta S = S(x^1, q^1) - S(x^0, q^0) = p(x) \textstyle\sum_{i=1}^{I} \Delta x_i - c'(x) \textstyle\sum_{i=j}^{J} \Delta q_j = \\ = (p(x) - c'(x)) \Delta x \end{aligned} \tag{9.10}$$

Nota 9.4. *Obsérvese que no estamos exigiendo que los precios que enfrenta el consumidor y los que enfrenta el productor sean iguales.*

- Consumidores y productores no harán frente al mismo precio si por ejemplo los primeros hacen frente a una tasa impuesta por el planificador central al consumo, o si la tasa es impuesta al monopolista.

- Si requerimos que los consumidores actúen como tomadores de precios, enfrentado todos el mismo precio y los productores tengan los mismos costos marginales, esto no sucede por ejemplo en el modelo de Cournot, cuando las firmas tienen costos diferentes.

Nótese que el plus-valor marshaliano se maximiza para $c'(x^*) = p(x^*)$ es decir cuando se verifica el equilibrio competitivo. Para ver esto, téngase en cuenta que $S''(x) \leq 0$ para toda x es decir que $S(x)$ es cóncava, luego x^* maximiza $S(x)$ si y solamente si $S'(x^*) = p(x^*) - c'(x^*) = 0$.

9.2 Efectos de una tasa distorsionadora

Analizaremos en esta sección los efectos sobre el bienestar de una tasa distorsionadora, y las consecuencias de la devolución de impuestos. Supongamos que una autoridad central impone una tasa $t > 0$ al consumo del bien no numerario, de forma tal que su precio de venta pasa a ser: $p(t) = p_0 + t$. En estas condiciones, en equilibrio debe cumplirse la igualdad entre oferta y demanda agregada,

$$x(p^*(t) + t) = q(p^*(t)),$$

ver figura (13). De donde derivando con respecto a t obtenemos:

$$\frac{dp^*(t)}{dt} = -\frac{x'^*(t) + t)}{x'(p(t) + t) - q'^*(t))}. \tag{9.11}$$

La conclusión inmediata es que $-1 \leq p'(t) < 0$ para todo t. De esta forma el precio $p^*(t)$ recibido por los productores cae con t, mientras que el precio $p^*(t) + t$ pagado por los consumidores crece (débilmente) con t. Además las cantidades totales producidas decaen.

Supongamos ahora que la autoridad central quiere recuperar el nivel de bienestar de los consumidores gravados con la tasa, mediante un sólo

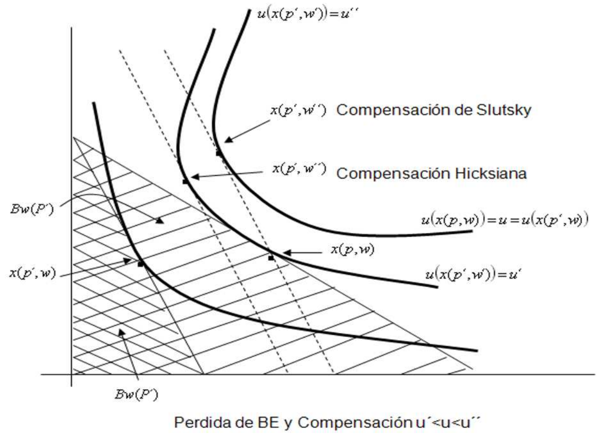


Figura 9.1: Precios, bienestar y compensación

pago. ¿Qué impacto tendrá este esquema *impuesto - devolución* en el bienestar?

Dedicaremos la última parte de esta sección a dar una respuesta a esta interrogante. Es conveniente denotar por $(x_1^*(t), ..., x_n^*(t), q_1^*(t), ..., q_J^*(t))$ y $p^*(t)$ la asignación de consumo y producción y el precio de equilibrio para el bien l cuando la tasa es t. Nótese que $c_j'(q_j^*(t)) = p^*(t)$ y $\phi_i'^*(t) = p^*(t) + t$. Sea $S(x^*(t)) = S^*(t)$. Calculamos $S^*(t) - S^*(0)$ que es la pérdida de bienestar asociado al cambio de precio,

$$S(t) - S(0) = \int_{x^*(0)}^{x^*(t)} [p(s) - c'(s)]ds = \int_{x^*(0)}^{x^*(t)} sds = \frac{(x^*(t))^2 - x^*(0)^2}{2}.$$

Esta expresión es negativa, pues $x^*(t) < x^*(0)$, siendo $x^*(t) = \sum_{i=1}^n x_i^*(t)$, es la demanda agregada.

El efecto total de esta política de compensación se obtiene restando a la pérdida de bienestar anteriormente calculada lo que se devuelve en pago de una sola vez es decir, lo recaudado por la tasa $tx^*(t)$. Siendo $x^*(t)$ lo demandado por los agentes, bajo la condición $x^*(p^*(t) + t) = q^*(t)$ y $q^*(t) = \sum_{j=1}^J q_j^*(t)$ la oferta agregada.

Esta política puede considerarse una mejora paretiana si al devolver la tasa los agentes alcanzan un nivel de satisfacción mayor o igual y al menos uno estrictamente mayor, que aquel del que disfrutaban antes de la imposición de la tasa, es decir si $S^*(t) - S^*(0) + tx^*(t) > 0$. Esto es el llamado *efecto de compensación*, es decir que en principio es posible, dado un cambio en la economía que los ganadores compensen a los que perdieron de forma tal que toda la sociedad esté mejor.

Téngase en cuenta que todo este análisis se hizo bajo el supuesto de que sólo uno de los precios de la economía cambia y no afecta a los demás. Si la tasación afecta a dos o más bienes los resultados pueden ser diferentes.

9.3 Ejercicios

Ejercicio 9.5. *A partir de la ecuación (9.11) muestre que a partir de los supuestos hechos para $x'(\cdot)$ y $q'(\cdot)$ y siendo $-1 \leq p'(t) < 0$ para todo t se sigue que:*

1. *El precio $p^*(t)$ de los productores cae cuando t crece.*

2. *Mientras que el costo aumenta con t.*

3. *El consumo y la producción total caen cuando t crece.*

4. *Si $q'(p^*(t))$ es muy grande entonces $(p^*)'(t)$ está cercano a cero, lo que significa que los consumidores sienten todo el peso de la tasa mientras que el precio recibido por las firmas no se ve afectado mayormente.*

5. *Mientras que si $q'(p^*(t))$ es cercano a 1, entonces $p^*(t) = -1$ y casi todo el peso de la tasa cae sobre las firmas.*

Capítulo 10

Los teoremas fundamentales del bienestar

Consideraremos brevemente en esta sección los teoremas fundamentales del bienestar en un marco de equilibrio parcial. Esto servirá como introducción a la siguiente temática relacionada con la redistribución de las dotaciones iniciales y sus repercusiones en el bienestar económico.

Se identifican solamente dos bienes, el numerario y el bien de consumo. Como en la sección anterior se asumen funciones de utilidad cuasilineales.

El siguiente vector representa los niveles de consumo y producción del único bien l de consumo: $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_I, \bar{q}_1, ..., \bar{q}_J)$ para I consumidores y J firmas diferentes. El numerario total distribuido entre los agentes de la economía será $w_m - \sum_{j=1}^{J} c_j(\bar{q}_j)$. Como en la sección anterior representaremos por $\mathcal{U}$ al conjunto de niveles posibles de utilidad:

$$\mathcal{U} = \left\{ (u_1, ..., u_I) : \sum_{i=1}^{I} u_i \leq \sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i) + w_m - \sum_{j=1}^{J} c_j(\bar{q}_j) \right\}. \qquad (10.1)$$

Nota 10.1. *Obsérvese que la frontera de este conjunto es un hiperplano perpendicular al vector* $n = (1, ..., 1)$. *De esta forma el conjunto de consumo-producción factible* $(x_1^*, ..., x_I^*, q_1^*, ..., q_J^*)$, *será un óptimo de*

Pareto precisamente si hace que las utilidades correspondientes a esta asignación de recursos esté en la frontera de $\mathcal{U}$. Nótese que un mismo óptimo de Pareto corresponde a diferentes distribuciones del numerario entre los agentes.

Obsérvese también que este conjunto no depende de la forma como el numerario

$$w_m - \sum_{j=1}^{J} c_j(\bar{q}_j) = \sum_{i=1}^{I} w_{mi}$$

esté distribuido entre los agentes.

Una asignación de consumo-producción óptima (en el sentido de Pareto) corresponde a una solución del problema:

$$\begin{aligned} &\text{máx}_{x\geq 0, q\geq 0} \textstyle\sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i) + w_m - \sum_{j=1}^{J} c_j(q_j) \\ &\textstyle\sum_{i=1}^{I} x_i - \sum_{j=1}^{J} q_j = 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

El valor de $\sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i) - \sum_{j=1}^{J} c_j(\bar{q}_j)$ es el objetivo, este valor es precisamente el plus-valor Marshaliano, el que no cambia con la distribución inicial del numerario, siempre que la cantidad total siga siendo w_m.

Las condiciones de primer orden para este problema, equivalen a las condiciones de primer orden para el equilibrio competitivo, considerando precios en el lugar de los multiplicadores de Lagrange. Se deduce que todo equilibrio competitivo es un óptimo de Pareto, el recíproco no es cierto porque en este caso no se consideran las restricciones presupuestarias. La particularidad de que todo equilibrio competitivo es óptimo de Pareto, se describe formalmente en la siguiente sección.

10.1 Los teoremas del bienestar bajo equilibrio parcial

En esta sección estudiaremos las propiedades de las asignaciones Pareto eficientes, en el marco de un análisis de equilibrio parcial. Para el mismo tema en el marco del equilibrio general, el lector interesado tiene a su disposición una amplia gama de textos de microeconomía como por ejemplo, [Varian, H.] o [Mas-Colell, A. Whinston, M. Green J.].

Teorema 10.2. (Primer teorema del bienestar económico) *Si el precio p^* y la cesta de consumo producción $(x_1^*, ..., x_l^*, q_1^*, ..., q_J^*)$, constituyen un equilibrio competitivo entonces esta cesta es Pareto óptima.*

La demostración de este teorema sigue de considerar las condiciones de primer orden correspondientes al equilibrio competitivo, y las correspondientes a la definición de Pareto eficiencia sustituyendo precios por multiplicadores de Lagrange en el problema (10.2).

De alguna forma este teorema es la expresión formal de la *mano invisible* de Adam Smith. Es decir que el mercado bajo sus propias leyes consigue la eficiencia sin necesidad de agentes externos. Igualmente importante es considerar las condiciones que hacen que este teorema no tenga validez, por ejemplo se necesita que todas las firmas sean todas tomadoras de precios, luego la existencia de firmas monopolistas o mercados oligopólicos limitan o anulan en general, su aplicación.

Nótese también que de acuerdo a estas consideraciones, el precio de equilibrio es precisamente el precio sombra correspondiente a las condiciones de primer orden del problema de obtener óptimos de Pareto. Se concluye que el precio en las condiciones competitivas iguala a la utilidad marginal y el costo marginal.

El segundo teorema del bienestar, constituye un “cuasi recíproco” del primer teorema, expresa condiciones bajo las cuales una asignación de consumo-producción eficiente, en el sentido de Pareto, puede ser alcanzada como una cesta correspondiente a un equilibrio competitivo. Es decir, condiciones que aseguren que exista un precio tal, que esta asignación de bienes y dicho precio sean un equilibrio competitivo. Terminaremos esta parte con el enunciado del segundo teorema del bienestar.

Teorema 10.3. (El segundo teorema del bienestar) *Para todo nivel de utilidad* $(u_1^*, ..., u_I^*)$ *Pareto óptima, existe una transferencia de recursos,* $(T_1, ..., T_I)$, *satisfaciendo* $\sum_{i=1}^{I} T_i = 0$ *tal que la asignación de equilibrio, correspondiente a las dotaciones iniciales,* $(w_1 + T_1, ..., w_I + T_I)$ *alcanza el nivel* $(u_1^*, ..., u_I^*)$.

10.2 Ejercicios

Ejercicio 10.4. *Demuestre la afirmación de la observación (10.1).*

Ejercicio 10.5. *Muestre que si asumimos la estricta convexidad de las funciones* $\phi_i(\cdot)$, $i = 1, ..., n$ *y de las funciones de costo* $c_j(\cdot)$, $j = 1, ...J$, *entonces la solución para el problema (10.2) está bien definida.*

Capítulo 11

El bienestar social agregado

Consideramos ahora una economía formada por n agentes, cuyas funciones de utilidad están representadas por $u_i : X \to R, \ i = 1, ..., n$ donde X es el conjunto de consumo, el mismo para todos los agentes. Para cada agente, representado por $i = 1, ..., n$ asumimos dotaciones iniciales $w_i \in X$. El conjunto de consumo X será el cono positivo de R^l, es decir que una cesta de bienes para el agente $i-$ésimo será representado un vector x_i con l coordenadas no negativas. Para definir nuestra principal herramienta de trabajo, el índice de Negishi, consideraremos además, la existencia de una función de utilidad social, resultado de agregar las utilidades individuales, y que alguna forma refleja el valor que la sociedad asigna a una determinada distribución de los bienes existentes entre los agentes[1].

Introduciremos la siguiente notación:

$$S_n = \left\{ \lambda \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Introducimos ahora la siguiente función utilidad social $U : R^{ln} \to R$

[1] Mucho de lo que diremos a continuación forma parte del trabajo de investigación más reciente del autor, por lo que los resultados son aún parciales e incompletos.

definida como:

$$U_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i) \tag{11.1}$$

donde $x = (x_1, ..., x_n) \in R_+^{ln}, \;\; x_i \in R_+^l$. Los ponderadores $\lambda_i, i = 1, ..., n$ son elementos del simplex S_n de R^n. Cada λ_i representa el peso que al grupo i asignamos en la función social de utilidad. Diremos entonces que $\lambda \in S_n$ es una distribución de pesos sociales. En cierta forma representa el peso relativo que el grupo social tiene dentro de la utilidad social. A esta forma de medir el bienestar social se hizo referencia en la sección (3).

Definición 11.1. *Decimos que una asignación de recursos x es factible (o posible) para la economía considerada, si $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n w_i$. Notaremos por $\mathcal{F}$ al conjunto de estas asignaciones, es decir:*

$$\mathcal{F} = \left\{ x \in R_+^{ln} : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \right\}.$$

Dada una distribución de pesos sociales, $\bar{\lambda}$ es posible asignar a cada asignación $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{F}$ un determinado nivel de bienestar social definido por

$$U_{\bar{\lambda}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i u_i(x_i).$$

En particular es posible hacer esto con una asignación que sea además un óptimo de Pareto. Recordamos que una asignación $x \in X$ es un óptimo de Pareto, o Pareto eficiente, si no es posible encontrar otra asignación factible, que mejore a algún agente de la economía sin perjudicar a otro. De esta definición se desprende que sólo en asignaciones Pareto eficientes es posible maximizar el bienestar social, pues para toda asignación de recursos que no sea Pareto eficiente, siempre es posible encontrar otra que aumente el bienestar de al menos a un integrante de la economía sin empeorar el bienestar de los restantes.

El siguiente teorema caracteriza a los óptimos de Pareto posibles para una economía dada.

Teorema 11.2. *Una asignación de recursos $x^* \in \mathcal{F}$ es un óptimo de Pareto si y solamente si existe una distribución de pesos sociales λ^* tal que x^* resuelve el siguiente problema:*

$$max_x \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* u_i(x_i), \quad s.a :: \ x \in \mathcal{F}. \tag{11.2}$$

La demostración puede verse en [Acccinelli, E. (05)]

Lo que afirma el teorema, es que para cada asignación factible x^* óptimo de Pareto existe un correspondiente vector λ^* en R^n cuyas coordenadas λ_i^* representan los pesos sociales de los agentes en la función de utilidad agregada, tal que para x^* se verifica la desigualdad $\sum_{i=1}^n \lambda_i^* u_i(x_i^*) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^* u_i(x_i), \quad \forall x \in \mathcal{F}$. Y recíprocamente si para $\bar{\lambda} \in R_+^n$ dado, $\bar{x} \in \mathcal{F}$ resuelve el problema de $max_x \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i u_i(x_i)$ entonces $\bar{x}$ es un óptimo de Pareto. Obsérvese que es posible normalizar λ considerando solamente $\lambda \in S_n$. En definitiva, para cada distribución de pesos sociales λ dada, el máximo nivel de U_λ se alcanza en alguno de los óptimos de Pareto posibles para esta economía. Es decir que si nuestro interés es encontrar una asignación de recursos que maximice el bienestar social, debemos en primera instancia restringirnos sólo al subconjunto de las asignaciones de recursos posibles, que son a la vez, óptimos de Pareto. *¿Podría el lector justificar esta última afirmación?*

11.1 El índice de Negishi

Interesados en el bienestar social, la siguiente pregunta es, ¿cuál es la regla, si existe alguna, que nos permite elegir entre los óptimos de Pareto factibles aquellos que por algún motivo se entiendan como más apropiados para la sociedad? Es decir, entre todas las formas posibles de ser eficiente, ¿cuál resulta ser la más adecuada? Nótese que directamente de la misma definición de óptimo de Pareto, se desprende que éstos no dependen de la distribución de la riqueza inicial sino únicamente de la riqueza total existente en la sociedad, ver teorema (11.2). No obstante esto, la utilidad social depende de las utilidades de los individuos, y es a partir de ésta, que medimos el valor social de una asignación determinada. Pero es posible representar una misma preferencia por diferentes funciones de utilidad, por lo que siempre queda la duda de cuál será la forma más adecuada para esta representación. A pesar de esta dificultad, entendemos que considerar las utilidades de los agentes en su relación con la eficiencia ayuda a entender las posibilidades de mejorar eficientemente una economía, y en particular las relaciones entre la estructura social y los fundamentos económicos.

A partir del teorema (11.2), podemos vincular la estructura social, considerada ésta como la distribución de pesos de los agentes en la función de utilidad social, con la eficiencia económica. En efecto, para cada distribución de pesos sociales existe una correspondiente de asignación Pareto optimal en la que se maximiza la función de utilidad agregada y recíprocamente, dado una asignación que sea óptimo de Pareto, existe una distribución de pesos sociales λ^* tal que esta asignación representa un máximo de la función de utilidad social U_{λ^*}. Esta correspondencia entre pesos sociales y óptimos de Pareto, si bien depende de la representación de las preferencias, permite introducir en el análisis económico el estudio del comportamiento social de los agentes económicos y la respuesta de la estructura social a los cambios en los fundamentos de la economía.

Bajo la hipótesis de utilidades estrictamente cuasicóncavas, y para cada nivel de riqueza inicial agregada W, es posible establecer una correspondencia biunívoca $\mathcal{P}_W : S_n \to PO$ entre pesos sociales y el conjunto asignaciones Pareto optimales al que denotamos aquí por PO. Por lo tanto, para cada economía, podemos encontrar un *camino eficiente,* definido a partir de la función $x : S_n \to R^{ln}$ definida por $x(\lambda) : \lambda \in S_n$. Se tiene entonces el siguiente teorema.

Teorema 11.3. *Sea una economía $\mathcal{E}$ con l bienes y n agentes con funciones de utilidad estrictamente cuasi cóncavas, dos veces diferenciables y recursos iniciales W. El conjunto formado por los pares*

$$\{(\lambda, x(\lambda)), \lambda \in S_n\}$$

es una variedad diferenciable, a la que representaremos por $\mathcal{N}$.

Definición 11.4. *Llamaremos a la variedad diferenciable*

$$\mathcal{N} = \{(\lambda, x(\lambda)), \lambda \in S_n\}$$

camino o variedad de Negishi de la economía $\mathcal{E}$.

Demostración del teorema: Asignando a cada $\lambda \in S_n$ la solución que le corresponde en el problema (11.2) la que es una factible y óptimo de Pareto. Mediante el teorema de la función implícita, a partir de las condiciones de primer orden para el problema (11.2) se puede ver que el grafo de la función $x(\lambda)$ es un camino continuo y diferenciable, ver[Acccinelli, E. (05)]. Este camino depende exclusivamente de la riqueza agregada de la economía representada por el vector W.•

El teorema de la función implícita asegura que si suponemos una distribución de pesos sociales $\bar{\lambda}$ dada, utilidades estrictamente cuasicóncavas, entonces, sólo existe una asignación de recursos Pareto optimal que maximiza la utilidad social, representada por $\bar{x} = x(\bar{\lambda})$ la cual se modifica poco si los pesos sociales cambian poco. Por lo que, si deseamos obtener como solución del problema (11.2) una determinada asignación Pareto optimal, debemos primeramente establecer la distribución de pesos sociales adecuada. Cómo establecer estos pesos sociales no está claro. No obstante, como veremos más adelante, bajo determinadas condiciones en la distribución de las dotaciones iniciales, es posible que la sociedad alcance sin intervención de un planificador central (es decir en forma descentralizada, por la acción únicamente de las leyes de mercado) una distribución de pesos sociales deseada.

En particular, movidos por un afán de equidad en la distribución de la riqueza, nos interesará encontrar, si existe, una distribución de pesos sociales $\bar{\lambda}$ que tenga asociado una asignación de recursos Pareto optimal para la cual se verifica que: Todos los individuos gocen del máximo nivel de bienestar posible. Ver figura (13).

Esta asignación será la que corresponde a maximizar la función $U_{\lambda^*}(x) \ \ \forall x \ \in \mathcal{F}$ siendo λ^* la solución del problema

$$min_{\lambda \in S_n} U(\lambda, x(\lambda)), \tag{11.3}$$

donde $U(\lambda, x(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i(\lambda))$ evaluada a lo largo del camino de Negishi.

Definición 11.5. *Llamaremos número o índice de Negishi de la economía, al valor correspondiente a $U(\lambda^*, x(\lambda^*))$, siendo λ^* la solución del problema (11.3).*

La asignación de recursos $x(\lambda^*)$ asegura a todos los integrantes de la economía un disfrute igualitario de los recursos económicos en forma eficiente. Es decir que se verifica la siguiente cadena de igualdades:

$$u_1(x_1(\lambda^*)) = ... = u_n(x_n(\lambda^*)) = U(\lambda^*, x(\lambda^*)), \tag{11.4}$$

a la vez que $x(\lambda^*)$ resuelve el problema de maximizar $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* u_i(x_i) \ \forall x \in \mathcal{F}$.

Las economías competitivas, bajo las leyes del mercado, alcanzan su equilibrio competitivo, con asignaciones de recursos que son un subconjunto del conjunto de los óptimos de Pareto, (tal lo que se concluye a partir del primer teorema del bienestar). Es decir que sólo un subconjunto de distribuciones de pesos sociales es compatible con una economía en equilibrio. De esta forma si los equilibrios se modifican, se modifica la estructura social, es decir los pesos relativos de los sectores sociales en la utilidad social. Como veremos las asignaciones de equilibrio posibles, a diferencia del conjunto de los óptimos de Pareto posibles, sí están relacionados con la distribución inicial de los recursos, y no sólo con la riqueza agregada. Cómo determinar este subconjunto de pesos sociales correspondientes a asignaciones de equilibrio es el tema de la siguiente sección.

11.2 Los equilibrios sociales

Como ya fue dicho, el conjunto de óptimos de Pareto posibles para una economía dada no depende de la distribución inicial de los recursos, sólo depende de su valor agregado, no obstante esto no es así para las asignaciones de equilibrio[2]. Como es evidente, a partir de la definición (11.1), en cada nivel de riqueza agregada W, es posible alcanzar un subconjunto particular del conjunto de consumo, el subconjunto de las llamadas asignaciones factibles. Este subconjunto se modifica si se modifica las riqueza agregada de la economía, pero no depende de como ésta esté distribuida entre los diferentes agentes económicos. Es decir entonces que, cambios en la distribución inicial de los recursos no implican cambios en el conjunto factible, y por lo tanto no implican cambios en la estructura de pesos sociales que corresponden a funciones de utilidad maximizadoras del bienestar social. No obstante lo dicho, en forma descentralizada (es decir por la sola acción del intercambio de bienes en mercados competitivos), únicamente es posible que una economía

[2]Entendemos por asignación de equilibrio, una asignación x de recursos tal que el par (p, x), siendo $p \in R^l_{++}$ un vector de precios, es un equilibrio walrasiano para la economía considerada.

alcance aquellas asignaciones Pareto optimales, asociadas a equilibrios walrasianos[3]. Nótese que en general una economía dada, puede alcanzar distintos equilibrios walrasianos (economías con un único equilibrio, requieren en general de restricciones fuertes en las posibles utilidades de los agentes ver por ejemplo [Mas-Colell, A.]) esto podría explicar que economías similares en dotaciones iniciales y preferencias, demuestren comportamientos y resultados muy diferentes, tanto desde el punto de vista puramente económico como desde el punto de vista social. No obstante puede suceder que ninguno de estas asignaciones de equilibrio se corresponda con pesos sociales para los que las igualdades (11.4) se verifiquen. Por lo que es posible que, considerando únicamente asignaciones de equilibrio, es decir aquellas que son posibles de alcanzar en forma descentralizada, no se alcance el bienestar económico correspondiente al índice de Negishi. Por lo que es la forma en la que están distribuidos los recursos iniciales la causa de que una economía competitiva pueda enfrentarse a grandes disparidades sociales y económicas mientras que otras con igualdad de recursos y aún en la valoración del bienestar por parte de los agentes económicos, tienen un menor nivel de disparidad en el disfrute de los bienes económicos.

Para una mejor comprensión de lo dicho permítasenos introducir la función exceso de utilidad: $e : S_n \rightarrow R^n$ definida por la relación $e_w(\lambda) = (e_{1w}(\lambda), ...e_{nw}(\lambda))$ siendo $e_{iw}(\lambda) = \frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x}(x_i(\lambda - w_i)), \ i = 1, ..., n$. Donde se destaca en el subíndice w la fuerte dependencia de la función exceso de utilidad de la distribución inicial de los recursos $w = (w_1, ..., w_n)$. Mediante la notación $\frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x}$ representamos el gradiente de la utilidad del consumidor i evaluado en $x_i(\lambda)$, correspondiente a la cesta del consumidor $i-$ésimo en la asignación factible $x(\lambda)$ que maximiza $U_\lambda(x) \ \ s.a \ x \in \mathcal{F}$.

[3]En las condiciones del Primer Teorema del Bienestar, toda asignación de equilibrio es Pareto optimal.

Decimos que un par $(\lambda, x(\lambda)) \in S_n \times \mathcal{F}$ es un equilibrio social para la economía $\mathcal{E}$ con dotaciones inicales w_i y utilidades u_i con $i = 1, ..., n$ si y solamente si $e_w(\lambda) = 0$. Representamos al conjunto de equilibrios sociales por $\mathcal{ES}$.

Nota 11.6. *No es difícil convencerse de que para cada par $(\lambda, x(\lambda))$ existe un sistema de precios $p(\lambda)$ tal que el par $(p(\lambda), x(\lambda))$ es un equilibrio walrasiano. Y recíprocamente que para cada par (p, x) que sea un equilibrio walrasiano para la economía $\mathcal{E}$, existe $\lambda \in S_n$ tal que $x = x(\lambda)$ y consecuentemente el par $(\lambda, x(\lambda))$ es un equilibrio social. Ver [Acccinelli, E. (05)].*

De esta forma, vemos que, la posibilidad de que una economía alcance en forma descentralizada cierto nivel de bienestar, está fuertemente asociada a la distribución inicial de la riqueza y a su correspondiente distribución de pesos relativos de los agentes económicos, en la función de bienestar social.

Cómo el planificador central puede intervenir a los efectos de obtener un nivel de bienestar social deseado, dada la riqueza existente en la economía, no es un tema trivial. Muchas veces la acción del planificador intentando evitar males sociales puede traer aparejados males peores. Es posible regular mediante subsidios, tasas o gravámenes una economía no eficiente, es decir una economía que por algún motivo esté fuera de su camino óptimo, de forma tal de aproximarse a la eficiencia. Sobre el punto ya hemos analizado algunas posibilidades en la primera parte de este trabajo. No obstante parece más compleja aún la labor de un planificador central que intente hacer que una economía alcance su máximo bienestar, dada su riqueza agregada, o bien alcanzar una predeterminada asignación eficiente, que sea por algún motivo deseable socialmente. Esto supone implementar políticas redistributivas cuyas consecuencias, tanto sociales como económicas, pueden ser imprevisibles [Accinelli, E. (07b)].

Mucho de lo dicho en esta sección tiene un gran valor teórico pero presenta complicaciones importantes en el momento de su implementación. No obstante, lo analizado en esta sección, muestra la posibilidad de discutir el bienestar social asociado a las condiciones del mercado y la consecuente aplicación de políticas tendientes a lograr objetivos sociales, sin que esto signifique pérdida de bienestar económico, o más aún buscando un incremento del mismo sin detrimento de la eficiencia económica.

11.3 Ejercicios

Ejercicio 11.7. *Considere la función de utilidad social*

$$U_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i)$$

definida como en (11.1).

1. *Muestre condiciones que impliquen que la función $U_\lambda(\cdot)$ es monótona, continua, cuasi-cóncava y cóncava.*

2. *Muestre que para todo par (p, w) siendo p un sistema de precios y $w = (w_1, ..., w_n)$ la asignación inicial de los recursos entonces la demanda generada por $max_x U_\lambda(x)$ es igual a la demanda agregada.*

Ejercicio 11.8. *Muestre que el conjunto de asignaciones Pareto eficientes de una economía es independiente de la distribución inicial de los recursos. ¿Puede decirse lo mismo del conjunto de asignaciones correspondientes al conjunto de equilibrios sociales?*

Ejercicio 11.9. *Demuestre la afirmación hecha en la observación (11.6).*

Ejercicio 11.10. *Considere una economía con dos agentes y dos bienes. Justifique la existencia de un par $(\lambda, x(\lambda)) \in S_n \times \mathcal{F}$ en el cual la* *economía alcance el binestar social correspondiente al índice de Negishi. Muestre las características principales de tal asignación de recursos.*

Ejercicio 11.11. *Analice el problema planteado en la sección (11.1) a la luz del segundo teorema del bienestar.*

Bibliografía

[Accinelli, E. (09)] Introducción a la Optimización no Lineal. Aportaciones Matemáticas, serie Textos de la Sociedad Matemática Mexicana: No. 34: (2009) *Reverte.*

[Accinelli, E. (07b)] Structural Stability, Morse's Lemma and Singular Economies. *Applied Mathematical Sciences,* Vol. 2 No. 47 pp. 2297 - 2308, (2008).

[Accinelli, E. (94)] Some notes about uniqueness of the Equilibrium for Infinite Dimensional Economies". *Estudios de Economía* 21, pp. 315-326. 1994.

[Acccinelli, E. (05)] Elementos de la Topología y de la Teoría de Conjuntos en la Teoría del Equilibro General. *Editorial Eon-sociales.* 2005.

[Accinelli, E.; Navarro, M.] El agente y el Principal. *Publicaciones Matemáticas del Uruguay* Vol 6, 1995.

[Allen, F.] Repeated Principal-Agent Relationship with Lendingand Borrowing. *Economic Letters* 17: 27-31 (1985).

[Balasko, Y.] Foundations of the Theory of General Equilibrium. *Academic Press, INC* (1988).

[Baumol, W. Panzar, Y., Willig, R.] Contestable Markets and the Theory of Industry. *Harcourt Brace Jovanovich NY*, (1982).

[Bertrand, J.] Theory Mathematique de la Richesse Sociale. *Journal des savants* pp. 499-508, september (1883).

[Cournot, A] Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorye des Richesses. Traducción inglesa Kelley, NY. (1883).

[Dye,R.] Optimal Monitoring Policies in Agencies. *Rand Journal of Economics* 17: 339-50 (1986).

[Fudenberg, D.; Tirole, J.] Game Theory. *Cambrifge, Mass* (1991)

[Fudenberg, D., B. Holmstrom, P.; Milgrom] Short-Term Contracts and Long-Term Agency Relationships. *Journal of Economic Theory* 52, pp. 194-206 (1990).

[Grenn, J.; N. Stokey] A Comparison of Tournaments and Contests. *Journal of Political Economy* 91, pp.349-64, (1983).

[Grossman,S.J. and Hart, O.D.] An Analysis of the Principal- Agent Problem *Econometrica* 51:1, pp. 7 -45 (1993).

[Holmstron, B.] Moral Hazard and Observability" *Bell Journal of Economics* Vol 10, pp. 74 - 92 (1979).

[Holmstron, B.; Milgrom (87)] Aggregation and Linearity in the Provision of Intertemporal Incentives. *Econometrica* 55: 303-28 (1987).

[Holmstron, B.; Milgrom (91)] Multitask Principal-Agent Analysis: Incentive Contracts, Asset Ownership, and Job Design. *Journal of Law, Economics and Organizations* 7, pp. 24-52 (1991).

[Mas-Colell, A.] The theory of General Economic equilibrium: A Differentiable Approach *Cambridge University Press* (1975)

[Mas-Colell, A. Whinston, M. Green J.] Microeconomic Theory. *Oxford University Press* (1995).

[Lipsey, R. Lankaster, K.] The General Theory of the Second Best. *Review of Economics Studies,* 24:1, pp 11-31, (1956-57).

[Maskin, E.; J. Riley (84a).] Optimal Auctions with Risk Averse Buyers. *Econometrica* 52: pp. 1473-1518 (1984).

[Maskin, E.; (84b)] Monopoly with Incomplete Information. *Rand Journal of Economics* 15, pp. 171-96 (1984).

[Milgron, P.] Good News and Bad News: Representation theorems and applications. *Bell Journal of Economics* 12, pp. 380-91 (1981).

[Myerson, R.] Incentive Compatibility and the Bargaining Problems. *Econometrica* 47, pp. 61-74 (1979).

[Nalebuff, B. & J. Stiglitz] Prizes and Incentives: Towardas a general theory of compensation and competition. Bell Journal of Economics 13, pp. 21-43 (1983).

[Osborne, M.; Rubinstein, J.] A Course in Game Theory. Mit press (1996).

[Ramsey, F.] A Contribution to the Theory of Taxation. *Economic Journal* pp 47-61, (1927).

[Rogerson, W. (85a)] Repeated Moral Hazard. Econometrica 53, pp. 69-76 (1985a).

[Rogerson, W. (85b)] The First-Order Approach to Principal-Agent Problems. *Econometrica* 53, pp. 1357-68 (1985a).

[Segura, J.] Teoría de la Economía Industrial. *Editorial Civitas* (1993).

[Shy, O.] Industrial Organization,. Theory and Applications. *The MIT Press* 1995.

[Stackelberg, H.F.] Marktform und Gleichgwicht. *Julius Springer, Viena (traducción inglesa: The Theory of the Market Economy, Oxford University Press* (1952).

[Van Damme, E.] Stability and Perfection of Nash equilibria. Springer Verlag. (1991)

[Varian, H.] Microeconomic Analysis, Third Edition, WW Norton and Company (1992).

[Williamson, O.E.] Economics as and Antitrusts Defence: the Welfare Trade Offs. *American Economic Revieuw,* pp. 73 104 (1968).

Índice alfabético