Contents

1 Introducción general 4

2 Parte I. Introducción 6

3 Conjuntos ordenados 7
3.1 Conjuntos 7
3.2 Relaciones binarias 8
3.3 Relaciones de equivalencia y particiones 8

4 Preferencias 9
4.1 Ejemplos de relaciones de preferencia 10
4.2 Convexidad de las preferencias 10

5 Espacios métricos y continuidad de las preferencias 11
5.1 Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados 12

6 Representación de preferencias por funciones 14

7 Continuidad de funciones 16

8 Espacios topológicos 18
8.1 Ejemplos de espacios topológicos 19
8.2 Entornos, abiertos y cerrados en espacios topológicos 20
8.3 Espacios de Hausdorff 20
8.4 Espacios productos 20
8.5 Continuidad en espacios topológicos 21
8.6 Subespacios topológicos. 23

9 Espacios vectoriales topológicos 25

10 Funciones de utilidad y un teorema de representación 27

11 Espacios vectoriales ordenados 29
11.1 Un teorema de representación 31

12 Elementos maximales de una preferencia: La demanda 32
12.1 Compacidad de conjuntos 33
12.2 Existencia y unicidad del maximal 35

13 Funciones de demanda 37
13.1 Región presupuestaria y notación 38
13.2 Propiedades de la demanda 41
13.3 Ejemplos de economías en las que no existe función demanda 45

13.4 La demanda agregada y el agente representativo 46

14 Función exceso de demanda y equilibrio 47
14.1 Propiedades de la función exceso de demanda 48
14.2 Equilibrio competitivo 49
14.3 Existencia del equilibrio competitivo 50
14.4 Teoremas de punto fijo 51

15 Parte II. Introducción 56

16 Existencia del óptimo de Pareto y el lema de Zorn 57
16.1 Lema de Zorn 58
16.2 Existencia del óptimo de Pareto 59

17 El óptimo de Pareto y el bienestar económico 60
17.1 El segundo teorema del bienestar y el teorema de Hahn-Banach 61
17.2 La optimalidad de Pareto y las condiciones de primer orden. 65

18 La función exceso de utilidad y el equilibrio 67
18.1 El teorema de la función implícita y la función exceso de utilidad 69
18.2 Propiedades de la función exceso de utilidad 72
18.3 Una relación binaria en el espacio de los pesos sociales 74
18.4 Un teorema de existencia del equilibrio walrasiano 75

19 Unicidad del equilibrio walrasiano 77
19.1 Unicidad local del equilibrio walrasiano 78
19.2 El teorema de la función inversa. 79
19.3 El jacobiano de la matriz exceso de utilidad 84

20 Elementos de la topología diferencial 86
20.1 Imparidad del conjunto de equilibrios 90
20.2 Ejemplos de economías con unicidad de equilibrios 91

21 Economías regulares y singulares 94
21.1 Más elementos del análisis y de la topología diferencial 95
21.2 El teorema de transversalidad 95
21.3 Economías singulares 97

22 Catástrofes y economía 101
22.1 Economías con dos agentes 102
22.2 Otras singularidades 104
22.3 Economías con tres agentes 107

23 Conclusiones 108

Elementos de Topología y de la Teoría de Conjuntos en la Teoría del Equilibrio General

Elvio Accinelli *

Agradecimientos

Las presentes notas fueron escritas en su primera versión durante el período comprendido entre los meses de febrero y marzo de 2000 en la Universidad de Antioquia, Colombia, en el que el autor permaneció en la referida Universidad como profesor visitante. Resumen parte de sus escritos destinados a cursos introductorios al Equilibrio General, realizados en la referida universidad, en la Universidad de Siena y finalmente en la Universidad Autónoma Metropolitana de México.

El desarrollo de la economía matemática requiere del trabajo conjunto de matemáticos y economistas. Naturalmente se trata de abordar problemas propios de la teoría económica, los que por su formalización requieren de la matemática para transformarse en un instrumento válido para la interpretación de la realidad económica. Y nada tiene que ver con la actitud de un matemático que parte de su disciplina intentando encorsetar la realidad de forma de aplicar allí sus conocimientos. Lamentablemente esta interdisciplinariedad sobre bases de la matemática y la teoría económica es un hecho raro en las universidades de América Latina en las que muchas veces aun hoy, a pesar de sus avances como disciplina, resulta la economía matemática incomprensible para matemáticos y para economistas. El encuentro de una teoría económica de alta formalización, cn una teoría matemática madura y dúctil ha sido altamente fecunda para la economía. Que matemática requiere la economía, es un pregunta abierta, ciertamente una de buen nivel. La abstracción de la matemática, permite enmarcar en ella modelos de la realidad cada vez más amplios y generales. La dificultad creciente de los modelos económicos requieren cada vez de un matemática más abstracta, el álgebra moderna y la teoría de grupos han producido excelentes resultados, como los espacios topológicos generales, que permiten introducir los bienes contingentes, y los activos financieros.

Motiva las presentes notas el mostrar a los matemáticos que la teoría económica puede ser

*UAM, programa de posgrado en Ciencias Económicas, México. **e-mail:** elvio@correo.xoc.uam.mx

un campo fértil para su teoría, a la vez que mostrar a los economistas la necesidad de conocer en profundidad el instrumental matemático que su teoría requiere. No obstante no son más que una primera introducción al tema y están lejos de entrar en las honduras del análisis funcional y la topología requerida por la teoría económica moderna en tanto que, esta pretende ser de alguna forma, reflejo de la realidad. Se pretende mostrar que en la teoría económica elemental, ya estaán presentes los elementos fundamentales de la topología general sin los cuales es imposible comprender una buena parte de la teoría moderna, por ejemplo el equilibrio general y la teoría del crecimiento, o gran parte de la micro avanzada. Naturalemnte no toda la teoría económica requiere de estos elementos, pero sí una buena parte de ella, basta para convencerse de ello echar una hojeada a las revistas especializadas de economía. Es para interesados en comenzar a entender este campo que este texto está dedicado.

Aunque pretenden ser autocontenidas y resumir en un texto único elementos de la matemática y la economía generalmete dispersos en diferentes textos, esto no niega ni mucho menos, la necesidad de la lectura de los textos especializados. Por el contrario pretende alentar al estudiante en este sentido. Estas notas están escritas para estudiantes interesadoes en el tema, pero sin duda en muchas ocasiones requerirán la guía del profesor para su comprensión cabal.

El interés demostrado por estudiantes de diferentes países por comprender en profundidiad la teoría expuesta, muchas veces aun sin la necesaria preparación matemática, me motiva tanto a dar publicidad a estas notas como a insistir en que en definitiva los economistas lejos de requerir una matemática de segundo nivel, requieren de una buena matemática, orientada hacia aquellos tópicos que su disciplina reclama, lo que sin duda son específicos de la misma y cambiantes con el desarrollo de la disciplina económica. De esta forma todo resabio de la pregunta, tantas veces escuchada y a veces con razón, ¿ para qué sirve la matemática en economía ? desaparecerá. Agradezco los comentarios de Celina Gutierrez, Adrián Risso y Andrés Gómez, quienes participaron de diferentes sesiones del seminario de Economía Matemática de la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad de la República Oriental del Uruguay, en las que algunos de los temas acá planteados fueron discutidos.

Deseo agradecer a Fernando Berceinas, coordinador del área de posgrados en Ciencias Económicas, por su colaboración y estímulos recibidos para la publicación de estas notas como libro. También a Gabriel Brida, Pedro Ramirez, Leobardo Plata y Jaime Sempere por sus comentarios sobre estas notas, así como a dos anómimos evaluadores cuyos aportes fueron significativos para mejorar la calidad del texto. Naturalemte los errores que persisiten son culpa de la incompetencia o testarudez del autor.

Como siempre mi reconocimiento a Pedro Uribe en quien encontré un amigo y un maestro en

estas lides.

1 Introducción general

Las presentes notas, solamente son notas de clase y como tales no pretenden, ni mucho menos ser exhaustivas de los temas tratados. Intentan mostrar la fuerte relación existente entre la economía moderna fuertemente formalizada y algunas áreas de la matemática, especialmente la teoría de conjuntos y la topología. Pretenden sí, ser una guía para el estudio de los temas tratados, los que pueden ser encontrados sobradamente en libros de topología general como [Kelley, J.L.] para la parte matemática, y [Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkinshaw, O.] para la teoría económica. Como textos introductorios citamos [Mendelson, B.] para la parte de topología, cuya lectura es amena y motivadora, análogamente el texto de [Araujo, A. (83)] resulta de valiosa ayuda para entender los fundamentos del equilibrio general. Para quienes decidan dedicar cierto tiempo al estudio de la economía matemática la lectura de [Mas-Colell, A.] resultará altamente motivadora y desafiante.

Se pretende avanzar de manera autocontenida, introduciendo las herramientas matemáticas según las necesidades del planteo económico, mostrando la posibilidad y ventajas de la utilización de dichas herramientas para la resolución de difíciles problemas propios de la Teoría Económica.

Entendemos que el economista si pretende ser creador en el momento de intentar resolver problemas propios de la realidad económica sobre la que desea actuar debe dominar la herramienta específica de su área de trabajo. Saber demostrar teoremas no es asunto sólo de matemáticos, es imperioso también para quienes pretenden trabajar con teorías altamente formalizadas, muchas áreas de la economía lo son. Es por dos motivos entonces que demostraremos teoremas a lo largo de estas notas. El primero es por el imperativo lógico de probar lo que se afirma, el segundo para intentar *mostrar como se demuestran teoremas,* algunos propiamente matemáticos y otros cuya demostración es exclusivamente responsabilidad del economista. Queda a cargo del lector ejercitarse en el arte de la demostración con aquellos teoremas enunciados y no demostrados en las notas.

La necesidad y la posibilidad de intercambio entre economistas y matemáticos hace imprescindible el conocimiento de las herramientas, lenguaje y métodos de los campos respectivos en el momento de conformar grupos de trabajo con objetivos en el desarrollo de la teoría económica moderna. Un matemático puede hacer importantes aportes a la teoría económica en la medida en que ayude a resolver problemas que surgen de ella misma, sin pretender simplificar ésta para lograr bonitas aplicaciones. Un economista puede plantear importantes desafíos a la matemática en la medida en que conozca las posibilidades y limitaciones de la referida teoría.

La necesidad del pensamiento matemático es propio de cualquier teoría formalizada, aunque en lugar de puntos de un espacio hable de cestas de bienes, y en lugar de puntos fijos de equilibrios competitivos. En matemática, puntos, rectas o cualquier concepto primitivo no responden a ningún ente real aunque como tales puedan ser pensados, es precisamente por esta posibilidad de múltiple reencarnación que estos conceptos encuentran su lugar en cada ciencia formalizada donde se mimetizan con la realidad que niegan. La relación entre los conceptos primitivos de la teoría económica corresponde establecerla al economista y, sin pecado contra la llamada realidad económica, puede deducir resultados que ayudarán a explicarla, muchas veces a la manera de la matemática.

Pretendemos con estas notas desafiar a los estudiantes de matemática a pensar en temas de economía con cabeza de economista y a los economistas a estudiar seriamente matemática, con cabeza de matemático.

Haremos el supuesto básico de agentes económicos racionales, que buscan maximizar su propio bienestar. El agente hará elecciones racionales, de acuerdo con alguna regla que le permita elegir una de las mejores cestas de bienes, de acuerdo con sus posibilidades y gustos. Esta cesta maximizadora del bienestar del agente es la llamada función demanda, cuyas propiedades y características estudiaremos.

Luego analizaremos la posibilidad de la existencia de un equilibrio, es decir de conseguir una distribución de bienes que satisfaga a todo el mundo, dentro de sus posibilidades y donde se distribuya todo y exactamente todo lo producido por la sociedad. Aunque parezca idílico esto es posible y no necesita de agentes exteriores que velen por la felicidad de los agentes económicos. Naturalmente es posible no sentirse satisfecho con la distribución de la riqueza que se obtiene, pero ésta corresponde a condiciones iniciales cuya modificación si involucra al economista, en todo caso no es a él sólo.

Supondremos siempre que la cantidad de bienes existentes en la sociedad puede ser grande pero en definitiva finito. Hay modelos económicos que se modelan sobre espacios de dimensión infinita, son modelos llamados con infinitos bienes, donde estos deben ser considerados como bienes contingentes a posibles estados de la naturaleza o instantes de tiempo, no obstante no entraremos en este tema, no por no creerlo de valor, sino muy por el contrario, porque su comprensión requiere avanzar aun más audazmente en la matemática, en particular en el análisis fincional. Recomendamos la lectura calmada y en diferentes momentos del texto de [Mas-Colell, A. Zame, W.] o bien [Accinelli, E. (2002)] para quienes deseen introducirse en estos temas.

Conceptos tales como espacios métricos, espacios topológicos, continuidad de funciones y conceptos tales como convexidad y concavidad serán introducidos en el momento en que sean necesarios para representar el comportamiento de los agentes económicos. Resultará de gran utilidad para el lector interesado en conocer más sobre cuales herramientas matemáticas son de mayor utilización en la economía moderna, la consulta al texto de [Green, J.; Heller, W.P.].

Si bien pueden encontrarse en la literatura corriente explicaciones quizás más sencillas de algunos tópicos relevantes de la teoría económica, la generalidad aquí presentada, aprentemente complica la comprensión, es un paso hacia la comprensión de temas más avanzados, imposible de acceder sin esta perspectiva. La idea es apelar al razonmiento lógico e intentar mostrar que la intuición a veces falla.

2 Parte I. Introducción

En esta primera parte introduciremos paulatinamente algunas nociones de matemática de forma de poder ir siguiendo la estructuración lógica de los conceptos económicos. Esta primera es una revisión de temas propios de la teoría del equilibrio general utilizando una matemática relativamente abstracta, de forma tal, que el lector se vaya familizarizando con conceptos matemáticos cuya comprensión profunda será base necesaria para avanzar hacia temas más complejos de la teoría económica. En general los textos introductorios comienzan con funciones de utilidad y estudian la función exceso de demanda como elemento clave para definir luego el equilibrio walrasiano. En estas notas daremos un lugar a las preferencias, en realidad el concepto primitivo, y veremos como la teoría de los conjuntos nos permite dar a un concepto tan subjetivo como son las preferencias, pues en definitiva representan gustos, una estructura lógico matemática.

Finalmente daremos una demostración de la existencia del equilibrio walrasiano, y dejaremos una puerta abierta para el estudio de las correspondencias, es decir de funciones de puntos a conjuntos. En definitiva la demanda es una correspondencia, pues el agente puede ser indiferente entre varias cestas de consumo. El hecho de que sólo elija una, depende de los supuestos que hagamos sobre las preferencias. Si bien no es sencillo trabajar con correspondencias, existe una teoría fructífera de la topología de las mismas, se puede estudiar su continuidad, integrabilidad, etc.... Dado que existe una teoría matemática y una necesidad de la teoría económica es posible la generalización del modelo económico, dando espacio a una teoría capaz de explicar nuevos aspectos de la realidad económica.

La matemática que el economista precisa no está en principio definida, podemos decir que la realidad económica es tan amplia y cambiante, que no puede encorcetarse en ninguna horma por más bonita y simple que esta aparezca. Es la teoría económica quien reclama nuevos conceptos a la matemática, ciertamente no alrevés.

3 Conjuntos ordenados

Esta sección está dedicada a mostrar la posibilidad de ordenar un conjunto cualquiera. La herramienta principal para esto será el concepto de relación binaria. Relacionaremos este orden con el comportamiento selectivo de un agente económico que debe elegir entre diferentes cestas de consumo aquellas que prefiere. Veremos que suponiendo racionalidad en el momento de elegir, cada agente introducirá un orden en su espacio de consumo, es decir en el conjunto de las cestas de bienes que le son accesibles.

Mostraremos la relación existente entre relaciones binarias que definen un preorden en cierto espacio abstracto y las preferencias de cada agente que ordenan su espacio de consumo. Precisamente de las preferencias partiremos como concepto inicial para analizar el funcionamiento de una economía. Los últimos capítulos estarán destindos a temas actuales de investigación del autor.

3.1 Conjuntos

Supondremos la existencia de al menos un conjunto no vacío al que representaremos por A, esto es, de una colección de objetos y una regla que permite decidir si un objeto x cualquiera pertenece, o no a la referida colección. Notaremos como $x \in A$ la relación x pertenece al conjunto A. Si fuera necesario podemos pensar en este conjunto como el conjunto de bienes en los cuales un determinado agente hace una elección. Para el lector motivado a profundizar en la axiomática de los conjuntos la lectura de [Suppes, P.] es altamente recomendable, aunque supera con creces lo necesario para la buena comprensión de estas notas.

Partiremos de los siguientes axiomas:

1) **Axioma de Unicidad** Si los conjuntos A y B tienen los mismos elementos, entonces son idénticos, es decir, $A = B$ si y solamente si cada vez que $x \in A$ entonces $x \in B$ y recíprocamente.

2) **Axioma de Unión** Dados dos conjuntos A y B existe un conjunto que tiene todos los elementos de A, todos los de B y ningún otro, lo representamos por $A \cup B$..

3) **Axioma de Diferencia** Para dos conjuntos cualesquiera A y B siempre existe otro que contiene los elementos de A que no están en B. Este conjunto será representado por $A - B$.

4) **Axioma de Existencia** Existe al menos un conjunto no vacío.

Obsérvese que no es preciso axiomatizar la existencia de la intersección de dos conjuntos $A \cap B$ pues $A \cap B = A - (A - B)$.

Llamaremos **producto cartesiano** $A \times B$ al conjunto de pares ordenados (a, b) con $a \in A$, y $b \in B$.

3.2 Relaciones binarias

Con objeto de definir en un conjunto cualquiera una relación de orden, introduciremos a seguir, el concepto de relación binaria En definitiva un conjunto ordenado no es más que un conjunto en el que hay definida una relación binaria que cumple las propiedades que a continuación detallaremos.

Definición 3.1 *Una* **relación binaria** *en $A \times B$ es cualquier subconjunto de $A \times B$.*

Una relación binaria ψ quedará entonces determinada si tenemos un criterio que nos permita decidir si dada una pareja (a, b) ella pertenece o no al subconjunto que define la relación ψ.

Definición 3.2 *Una relación binaria $\succeq$ en $X \times X$ es un* **preorden en X** *si ella es:*

- *Reflexiva, $(a, a) \in \succeq \forall a \in X$.*
- *Transitiva, si $(a, b) \in \succeq$ y $(b, c) \in \succeq$ entonces $(a, c) \in \succeq$ para todo $a, b, c, \in X$.*

Si además la relación es completa, esto es si se verifica que, em para todo par $(a, b) \in \succeq$ ó $(b, a) \in \succeq$ para todo $a, b \in X$, decimos la relación es un **preorden completo.**

Una preferencia es, como veremos más adelante un preorden completo.

3.3 Relaciones de equivalencia y particiones

Una relación binaria ψ define una **relación de equivalencia** si y solamente si satisface las siguientes propiedades:

1) Reflexiva, (a, a) pertenece a la relación ϕ para todo $a \in X$.
2) Transitiva, si (a, b) y (b, c) pertenecen a la relación ψ, entones (a, c) es también elemento de la relación ψ.
3) Simétrica, si cada vez que una pareja (a, b) pertenece a la relación ϕ, entonces la pareja (b, a) también es un elemento de ψ.

Definición 3.3 *Una relación de equivalencia ϕ divide al espacio en clases disjuntas tales que la unión de ellas es todo el espacio. Estas clases se llaman* **clases de equivalencia** *cada una de ellas queda definida a partir de un elemento arbitrario a de X, siendo la clase de a el conjunto de todos los elementos de X que están en relación con $a : I_a = \{x \in X : (x.a) \in \phi\}$.*

Obsérvese que las clases de equivalencia de dos elementos diferentes a y b de X o son la misma o son subconjuntos disjuntos.

Un conjunto $A_\alpha, \alpha \in I$ de subconjuntos de X, es una **partición** de X si a satisface las siguientes propiedades:

(1) $A = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$

(2) $A_\alpha \cap A_{\alpha'}$ es el conjunto vacío cada vez que α diferente de α'.

Teorema 3.4 *Toda relación de equivalencia en X define una partición de X y recíprocamente.*

4 Preferencias

El agente económico debe seleccionar bienes dentro de lo que llamaremos su **espacio de consumo** al que representaremos por X. En este espacio las preferencias del agente, a las que representaremos por $\succeq$, introducen un preorden completo.

Definición 4.1 *Una* **relación de preferencias** *es una relación binaria sobre $X \times X$, que es completa, reflexiva y transitiva.*

Generalmente a lo largo de estas notas X será un subconjunto de R^l, una **cesta de bienes** se representará por $x = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$ donde cada x_i es un real, si $X = R^l_+$ entonces x_i será un real no negativo, que indica la cantidad del bien $i = 1, 2, ..., n$ disponible en la cesta..

Notaremos la afirmación x *es al menos tan bueno cuanto* y *como* $x \succeq y$ **o bien** $(x, y) \in \succeq$.

Recordamos que como todo preorden completo, $\succeq$ divide al espacio de consumo en clases de equivalencia, representaremos por

$$I_x = \{y \in X : y \succeq x \ , \ x \succeq y\}$$

la **clase de equivalencia de** x esto es el conjunto de cestas de consumo que son indiferentes a x, según las preferencias del agente. De esta forma $y \in I_x$ cada vez que $y \succeq x$ a la vez que $x \succeq y$ diremos entonces que $x \sim y$.

Diremos que x es **estrictamente preferido** a y, lo que notaremos como $x \succ y$, si $(x, y) \in \succeq$ pero no se cumple $(y, x) \in \succeq$.

Ejercicio: Mostrar que una relación de preferencias, define un orden completo sobre el espacio de las clases de indiferencia.

Entendemos como **Orden** en un conjunto a una relación binaria ϕ: que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. (ϕ es antisimétrica si cada vez que $(x, y) \in \phi$ e $(y, x) \in \phi$, entonces $x \sim y$.

4.1 Ejemplos de relaciones de preferencia

Ejemplo 4.2 *Orden Lexicográfico. Sea* $X = R_+^2$ *escribimos* $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ *cada vez que* $x_1 > y_1$ *o, si* $x_1 = y_1$*, siempre que* $x_2 \geq y_2$.

Verificar que es una relación de preferencias. Hallar las clases de indiferencia. Mostrar que el orden lexicográfico es un orden completo.

Ejemplo 4.3 *Sea* $X = R_+^2$ *escribimos* $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ *cada vez que* $x_1 \geq y_1$.

Verificar que es una relación de preferencias, dibujar en el plano las clases de indiferencia, este caso estarán representadas por curvas de nivel o de isopreferencia, *lugar geométrico de las cestas igualmente preferidas.*

Ejemplo 4.4 *Sea* $X = R_+^2$ *escribimos* $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ *cada vez que* $min\{x_1, x_2\} \geq min\{y_1, y_2\}$.

Mostrar que es una relación de preferencia, dibujar la curvas de isopreferencia de $(1, 3)$ mostrar la dirección de crecimiento las curvas de isopreferencia.

Ejemplo 4.5 *Sea* $X = R_+^2$ *escribimos* $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ *cada vez que* $x_2 \geq y_2$. *Verificar que es una relación de preferencias, dibujar en el plano las clases de indiferencia (en este caso están representadas por curvas de nivel o de isopreferencia).*

4.2 Convexidad de las preferencias

Comenzaremos la sección con la definición de conjunto convexo. Básicamente ésta se refiere al hecho de tener un conjunto la propiedad de que si dos puntos cualesquiera pertenecen a él entonces el segmento de recta que los une (la combinación convexa de ellos) pertenece enteramente al conjunto. Formalmente:

Definición 4.6 *Decimos que un conjunto* X *es* **convexo** *si y solamente si, para todo* $\lambda \in [0, 1]$ *siendo* x*, e* y *elementos de* X *se cumple que* $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$

Sea X convexo, decimos que una relación de preferencia $\succeq$ sobre X es:

- **convexa** si cada vez que $x \succeq z$ e $y \succeq z$ y para todo $0 < \alpha < 1$ se tiene que; $\alpha x + (1 - \alpha)y \succeq z$.
- **estrictamente convexa** si cada vez que $x \succeq z$ e $y \succeq z$ y para todo $0 < \alpha < 1$ se tiene que; $\alpha x + (1 - \alpha)y \succ z$.

La convexidad en las preferencias representan el gusto por la diversidad, dadas dos cestas cualesquiera en la misma clase de indiferencia una combinación convexa de ellas es al menos tan buena como cada una de las anteriores para el agente con preferencias convexas, y estrictamente preferible para un agente con preferencias estrictamente convexas.

Ejercicio: Mostrar que el ejemplo 3 anterior representa preferencias convexas, que no son estrictas. Dibujar para este caso la curva de isopreferencia correspondiente a la combinación convexa $\alpha = \frac{1}{2}, \;\; x = (1,3), y = (3,1)$.

Un punto importante a resolver es el relacionado con las modificaciones en el comportamiento de un agente ocasionadas por modificaciones pequeñas en las cestas de bienes que le son ofrecidas. Supongamos que un agente prefiere estrictamente una cesta x a una cesta y. *¿ Será que si los componentes de x se modifican poco, la cesta x' conformada a partir de esta modificación seguirá siendo estrictamente preferida a la cesta y?* La respuesta depende ciertamente de las características de las preferencias y de lo que entendamos por pequeñas modificaciones.

Para responder en forma rigurosa a esta pregunta definiremos preferencias continuas en espacios topológicos. A los efectos de hacer estas definiciones más intuitivas comenzaremos trabajando en espacios métricos, los que como veremos son un caso particular de los espacios topológicos.

Preferencias que impliquen comportamiento similar frente a modificaciones pequeñas de las cestas las llamaremos continuas. De éstas nos ocuparemos en las siguientes dos secciones.

5 Espacios métricos y continuidad de las preferencias

La noción de distancia es la que nos permite decidir sobre la proximidad de distintos objetos. En nuestro caso la usaremos para definir proximidad entre cestas de bienes. A efectos de ponernos de acuerdo sobre proximidades relativas entre elementos de un conjunto cualquiera precisaremos introducir una noción de distancia que nos sea común, esto lo haremos definiendo en un conjunto cualquiera X, una función d a la que llamaremos métrica o distancia, y al par (X, d) lo llamaremos Espacio Métrico.

Definición 5.1 *Un* **espacio métrico** *es un par (X, d) donde X es un conjunto cualquiera no vacío y d una función real $d : X \times X \to R$ que cumple las siguientes propiedades:*

1) $d(x, y) \geq 0 \;\; \forall x, y \in X$.

2) $d(x, y) = 0$ si y solamente si $x = y$.

3) $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in X$.

4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x, y, z \in X$

Ejemplo 5.2 *Verificar que cada una de las funciones que se presentan en los ejemplos siguientes satisfacen la definición de distancia.*

a) (R, d), *siendo* $d(x,y) = |x - y|$

b) (R^2, d) *tal que:* $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

c) (R^2, d') *siendo* $d'(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

d) (R^2, d'') *donde,* $d''(x,y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$

Obsérvese que sobre un mismo conjunto pueden definirse distintas métricas, por lo cual la noción de proximidad depende de la métrica introducida, así por ejemplo la distancia entre $(1,2)$ y $(3,1)$ es $\sqrt{5}$ con la métrica del caso b) y 2 según c). No obstante esta diversidad de métricas, muchas de ellas son equivalentes, en el sentido de que definen los mismos conjuntos abiertos. Analizaremos esto, más adelante, en la sección dedicada a espacios vectoriales topológicos

5.1 Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Comenzaremos definiendo la noción de entorno de un punto, como veremos a partir de esta noción podremos introducir criterios de vecindad, sin necesidad de restringirnos a espacios en los que hay definida una métrica.

Definición 5.3 *Sea (X, d) un espacio métrico, sea a un elemento de X. Un subconjunto $U_a \in X$ se llama* **entorno de** *a si existe $\delta > 0$ tal que la bola abierta de centro a y radio δ $B_\delta(a) \subset U_a$.*

Donde $B_{\delta(a)} = \{x \in X : d(x,a) < \delta\}$

La colección $\mathcal{N}_a$ de todos los entornos de a se llama **base de entornos del punto.** Decimos que existe una base de entornos numerable $\mathcal{N}_a$, si cada vez que para todo entorno U de a existe $V \in \mathcal{N}_a$, tal que $V \subset U$. En el caso de que para cada punto $a \in X$ existe una base numerable de entornos, decimos que el conjunto es **numerable de primer orden,** o que satisface el **primer axioma de numerabilidad.**

Nota 5.4 *Un subconjunto A de (X, d) es* **abierto** *si es entorno de cada uno de sus puntos.*

Una colección de conjuntos abiertos, es llamada una **base** para los conjuntos abiertos, si cada conjunto abierto es unión de conjuntos de esta colección. Por ejemplo el conjunto de las bolas abiertas en un espacio métrico forman una base para los abiertos. Cuando existe una base numerable decimos que el conjunto X satisface el **segundo axioma de numerabilidad.**

Decimos que un punto x pertenece al **Interior de un conjunto** A si A es entorno de x. Denotaremos por $int(A)$ al conjunto de los puntos interiores de A.

Llamamos **frontera de un conjunto** A y lo denotaremos como $fr(A)$ al conjunto de puntos que no son interiores al conjunto ni a su complemento. Si $x \in fr(A)$ entonces en todo entorno suyo existen puntos de A y de A^c distintos de x.

Definición 5.5 *Un subconjunto F de (X, d) se dice* **cerrado** *si su complemento $F^c = X - F$, es abierto.*

Teorema 5.6 *Un subconjunto de (X, d) es abierto si y solamente si todos sus puntos son interiores.*

La demostración queda a cargo del lector.

Teorema 5.7 *Toda bola abierta $B_\delta(a)$ es un conjunto abierto.*

Demostración Se trata de probar que todo punto es interior. Suponga que $b \in B_\delta(a)$ demuestre que existe $\eta > 0$ tal que $B_\eta(b) \subset B_\delta(a)$, es decir que para todo $x \in B_\eta(b)$, se cumple que $d(x, a) < \delta$. Verifique que alcanza con elegir $\eta < \delta - d(a, b)$.[]

Teorema 5.8 *Sea (X, d) un espacio métrico, entonces:*

i) Φ *(el conjunto vacío) es abierto.*

ii) X *es abierto.*

iii) Intersección finita de conjuntos abiertos es abierta.

iv) Unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierta.

Demostración (i) Para que el conjunto vacío no fuera abierto tendría que contener al menos un punto. (ii) Para todo $x \in X$ existe δ tal que $B_\delta(x) \subset X$. (iii) Cada conjunto de la intersección es abierto y por lo tanto un entorno de cada uno de sus puntos. Pruebe que la intersección de dos entornos es un entorno, luego proceda por inducción, entonces la intersección de una cantidad finita de entornos de un punto sigue siendo entorno de un punto, por lo tanto la intersección de una cantidad finita de abiertos es un abierto. (iv) Todo elemento en la unión pertenece al menos a uno de los abiertos que la componen, este es por lo tanto un entorno del elemento contenido en la unión.[]

Un punto $b \in X$ se llama **punto de acumulación** de A si todo entorno de b contiene al menos un punto de A distinto de b.

Teorema 5.9 *Sea F un subconjunto de un espacio métrico (X, d), F es cerrado si y solamente si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Demostración Verifique que si un conjunto contiene a todos sus puntos de acumulación entonces su complemento es abierto y recíprocamente.[]

Volvamos ahora a las relaciones de preferencia, nuestro objetivo es analizar cuando dos cestas de bienes próximas en su composición lo están en los gustos del agente.

Diremos que:

Definición 5.10 *Una preferencia es* **semicontinua superiormente** *si para todo $x \in X \subset R^n$ el conjunto $S_x = \{y \in X : y \succeq x\}$ es cerrado.*

La definición anterior implica que el complemento de S_x es abierto. Es decir que si un elemento $z \in X$ es tal que x es estrictamente preferido a z, entonces elementos próximos a z, en el sentido de la métrica definida sobre X, son estrictamente menos preferidos que x.

Definición 5.11 *Una preferencia es* **semicontinua inferiormente** *si para todo $x \in X$ el conjunto $L_x = \{y \in X : x \succeq y\}$ es cerrado.*

Análogamente, la definición anterior implica que el conjunto de las cestas de bienes estrictamente preferidas a x, $\{y \in X : y \succ x\}$ es un conjunto abierto. Esto es si una cesta de bienes y es preferida a la cesta x entonces elementos en las proximidades de y seguirán siendo preferidas estrictamente a x.

Cuando una preferencia verifica ambas condiciones decimos que la preferencia es **continua.**

Ejemplo 5.12 *El orden lexicográfico no es un orden continuo. Considere el caso cuando $X \subset R^2$ demuestre que para todo $x \in R^2$ el conjunto S_x no es cerrado. ¿ Cuáles son en este caso las curvas de isopreferencia?*

6 Representación de preferencias por funciones

La posibilidad de representar preferencias por funciones abre las posibilidades de emplear en la teoría económica las herramientas de la teoría de funciones y del análisis. La teoría económica puede entonces valerse de un poderoso instrumento para resolver problemas que le son propios.

Comenzaremos definiendo el concepto de función.

Definición 6.1 *Sean A y B dos conjuntos. La correspondencia que asocia cada elemento $x \in A$ con un único elemento $f(x) \in B$ es llamada una función. Lo que escribiremos como*

$$f : A \to B.$$

El conjunto A es llamado **dominio** de la función f. Llamaremos **imagen** de f al subconjunto de B formado por aquellos $y \in B$ para los que existe $x \in A$ tales que $f(x) = y$. Decimos que una función f es de A en B si su dominio es A y su imagen es subconjunto de B. Si la imagen de f es todo B decimos que f es una función *sobre.*

Para $f : A \to B$ y $M \subset B$ definimos:

Definición 6.2 *Conjunto preimagen de M como:*

$$f^{-1}(M) = \{x \in A : \exists\, b \in B, f(x) = b\}.$$

Decimos que una preferencia es representable por una función $u : X \to R$ (a la que llamaremos función de utilidad) cuando:

$$x \succeq y, \text{ si y solamente si } u(x) \geq u(y).$$

Una cuestión importante es la de obtener las condiciones que nos permitan tal representación. Para ver que las cosas no son tan fáciles mostremos un contraejemplo, es decir mostremos que existen preferencias que no pueden ser representadas por funciones de utilidad. Para esto apelemos al orden lexicográfico ya considerado.

Ejemplo 6.3 *El orden lexicográfico no puede ser representado por funciones de utilidad.*

Prueba de la afirmación: Razonemos por el absurdo. Supongamos que existe una función $u : X = R^2_+ \to R$ que representa al orden lexicográfico.

De acuerdo a las preferencias se tiene que: $(r, 1) \succ (r, 0)$ donde $r \in R_+$, se sigue que $u(r, 1) > u(r, 0)$. Existe por lo tanto un racional $\phi(r)$ tal que: $u(r, 1) > \phi(r) > u(r, 0)$. Sea ahora $r' > r$ se cumple que: $u(r', 1) > \phi(r') > u(r', 0)$. Por lo tanto, como:

$$\phi(r') > u(r', 0) > u(r, 1) > \phi(r)$$

la función $\phi : R_+ \to Q$ así definida es estrictamente creciente y por tanto inyectiva, lo que es un absurdo pues la cardinalidad de R_+ es mayor que la de Q.

Recordamos que:

$f : D \to R$ se dice monótona creciente si y solamente si para todo $\alpha \geq \beta$ $f(\alpha) \geq f(\beta)$.

$f : D \to R$ se dice estrictamente creciente si y solamente si para todo $\alpha > \beta$ $f(\alpha) > f(\beta)$.

No obstante las cosas no son tan malas como parecen y con bastante generalidad podemos afirmar que las preferencias son representables por funciones de utilidad.

El siguiente teorema es de gran generalidad, muestra que en condiciones muy amplias una preferencia es representable por una función de utilidad continua. En su versión más general el teorema hace uso del concepto de *espacio numerable de segundo orden.* Daremos en la sección sobre representación de preferencias una demostración sobre bases un poco más restrictivas pero suficientemente generales, como para ser válido en cualquier espacio real de dimensión finita. Una prueba general puede encontrarse en [Fishburn, P.C]-

Teorema 6.4 *Si X es numerable de segundo orden toda preferencia continua es representable por una función de utilidad continua.*

Digamos simplemente que el conjunto $X = R^n$ con cualquier métrica es para todo n numerable de segundo orden, por lo tanto toda preferencia continua en R^n es representable por una función de utilidad continua. Lo que esto sugiere inmediatamente es que en la medida que una preferencia sea representable por una función continua, ella misma será continua y un agente con este tipo de preferencias presentará un comportamiento similar ante cestas de bienes cercanas en el sentido de la métrica definida en el espacio.

¿ Qué falla en el caso de preferencias lexicográficas?

Un punto a tener en cuenta es que las funciones de utilidad no establecen una medida absoluta sobre las cestas de bienes, simplemente las ordenan relativamente. Más aun puede observarse que si una cierta función de utilidad u representa a cierta preferencia, entonces cualquier composición de u con una función monótona creciente f representa a la misma preferencia.

Por ser un concepto clave en el momento de introducir las funciones de utilidad como representantes del comportamiento de los agentes económicos, dedicaremos la siguiente sección al estudio de las funciones continuas.

7 Continuidad de funciones

Como referencia básica para esta sección puede consultarse el libro Introduction to Topology, de Bert Mendelson, y como referencia avanzada el libro [Kelley, J.L.] el que por otra parte es referencia para todos los temas de topología tratados en estas notas.

No obstante poder definir continuidad en espacios más generales, comenzaremos trabajando en espacios métricos y luego avanzaremos hacia los espacios topológicos. La existencia de una función distancia nos permite definir el concepto de continuidad de funciones entre espacios métricos, éste puede frasearse diciendo que si f es una función de X en Y entonces es continua cada vez que distando poco x de $y \in X$ entonces $f(x)$ dista poco de $f(y) \in Y$, naturalmente en cada espacio usamos la métrica previamente definida en ellos, la que no es necesariamente la misma.

A los efectos de introducir el tema consideremos funciones reales con dominio real.

Definición 7.1 *Sea $X \subset R$, $f : X \to R$ decimos que f es continua en $a \in R$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in R$:*

$$|f(x) - f(a)| \quad < \quad \epsilon$$

cada vez que:

$$|x - a| \quad < \quad \delta.$$

1) Verifique que la función valor absoluto es una métrica en el conjunto de los reales.

2) Muestre la equivalencia entre esta definición de continuidad y la definición hecha a partir del concepto de límite.

Más generalmente podemos introducir la siguiente definición de continuidad para funciones entre espacios métricos cualesquiera:

Definición 7.2 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$ decimos que f es continua en $a \in (X, d)$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in R$:*

$$d'(f(x), f(a)) \quad < \quad \epsilon$$

cada vez que:

$$d(x, a) \quad < \quad \delta.$$

Decimos que una **función es continua en** X si es continua para todo $a \in X$.

Los siguientes teoremas caracterizan a las funciones continuas en términos de entornos y abiertos, lo que nos va a permitir generalizar el concepto de continuidad a un conjunto de espacios más amplio que el de los Espacios Métricos, el de los llamados Espacios Topológicos.

Teorema 7.3 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$, f es continua en X si y solamente si para cada entorno M de $f(a)$ existe un entorno N de a tal que $f(N) \subset M$ o equivalentemente $N \subset f^{-1}(M)$.*

Teorema 7.4 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$, f es continua en $a \in X$ si y solamente si para cada entorno M de $f(a)$, $f^{-1}(M)$ es un entorno de a.*

Teorema 7.5 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$, f es continua en $a \in X$ si y solamente si para cada conjunto abierto O de Y $f^{-1}(O)$ es un subconjunto abierto de X.*

Daremos a continuación la demostración del primer teorema dejando para el lector las correspondientes al segundo y al tercero.

Demostración Sea f continua, dado un entorno M, cualquiera de $f(a)$ debemos encontrar un entorno N de a tal que $f(N) \subset M$. Por ser M entorno de $f(a)$ existe $B_\epsilon(f(a)) \subset M$, y por la continuidad de f en a existe δ tal que $f(B_\delta(a)) \subset B_\epsilon(f(a))$. Luego como todo abierto es entorno de cada un de sus puntos se sigue la afirmación, $B_\delta(a)$ es el entorno requerido. *Reciprocamente,* sabemos que para cada entorno M de $f(a)$ existe N entorno de a tal que $f(N) \subset M$. Sea $M = B_\epsilon(f(a))$, existe N entorno de a tal que $f(N) \subset B_\epsilon(f(a))$. Por ser N un entorno de a existe $B_\delta(a) \subset N$ tal que, $f(B_\delta(a)) \subset f(N) \subset B_\epsilon(f(a))$.[]

Los teoremas anteriores dan una caracterización de las funciones continuas en términos de conjuntos abiertos. En su forma más general podemos frasear la continuidad diciendo que: *una función de X en Y ambos espacios topológicos, es continua si y solamente si la preimagen de un conjunto abierto en Y es un conjunto abierto en X.*

Esto hace pensar que quizás no haya necesidad de introducir una función distancia para definir continuidad de funciones. Basta con saber cuales son los abiertos de los espacios que una función relaciona y verificar si verifica que la preimagen de un abierto es un abierto del espacio de partida.

Un espacio en el que están definidos sus conjuntos abiertos es llamado espacio topológico, a ellos dedicaremos algunas líneas en la siguiente sección.

8 Espacios topológicos

Desde el punto de vista de la teoría económica la existencia de una métrica es una restricción. En principio un espacio de consumo no tiene por que ser un espacio métrico, el agente económico introduce un orden en su espacio de consumo al estar dotado de preferencias, pero aunque con certeza tiene alguna noción de las cestas de bienes que les gustan más o menos, o de vecindad entre ellas, no necesariamente tiene por qué haber una métrica, en el conjunto de las cestas de bienes.

Este concepto de vecindad puede modelarse con la noción de entorno de un punto, cuya existencia es independiente de la existencia de una función de distancia. Al introducir el concepto de espacio topológico el modelo adquiere una mayor generalidad, los espacios métricos serán un caso particular de espacio topológico.

Los espacios topológicos son uno de los más fructíferos conceptos matemáticos y como veremos a continuación un marco adecuado para la Teoría Económica.

Definiremos ahora una relación de vecindad I en un espacio X, a la que llamaremos topología del espacio.

Definición 8.1 *Sea X un conjunto no vacío e $\mathcal{I}$ una colección de subconjuntos de X tales que:*

(i) $X \in \mathcal{I}$.

(ii) $\phi \in \mathcal{I}$.

(iii) Si $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{I}$, entonces la intersección de ellos también pertenece a $\mathcal{I}$.

(iv) Si para cada $\alpha, O_\alpha \in \mathcal{I}$ entonces la unión de todos ellos también es un elemento de $\mathcal{I}$.

El espacio $(X, \mathcal{I})$ es llamado **Espacio Topológico**, y los elementos de I son los conjuntos abiertos del espacio, las vecindades. Los elementos pertenecientes a un mismo conjunto abierto serán llamados vecinos .

8.1 Ejemplos de espacios topológicos

(1) Si en un espacio métrico arbitrario X, consideramos sus conjuntos abiertos (es decir los conjuntos formados por la unión de bolas abiertas) como los elementos de la colección I, entonces $(X, \mathcal{I})$ es un Espacio Topológico. Como ya fue dicho y demostraremos más adelante, para espacios de dimensión finita muchas métricas (aquellas que definen una topología de Hausdorff) definen los mismos abiertos.

(2) X cualquiera con $\mathcal{I} = \{\phi, X\}$ se llama *topología trivial.*

(3) X cualquiera con $\mathcal{I} = 2^X$ (el conjunto de todas las partes), es la topología con la mayor cantidad de abiertos, se conoce como la *topología discreta.*

(4) Considere cualquier conjunto X sea $\mathcal{I}$ una colección de subconjuntos de X tales que a él pertenecen: el conjunto vacío, el conjunto total, y las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de sus elementos. $(X, \mathcal{I})$ es un espacio topológico.

8.2 Entornos, abiertos y cerrados en espacios topológicos

Definición 8.2 *Un subconjunto N de un espacio topológico se dice* **entorno** *de un punto $a \in X$ si contiene un abierto el que a su vez contiene a a.*

Definición 8.3 *Un subconjunto O de un espacio topológico se dice* **Abierto** *si es entorno de cada uno de sus puntos.*

Definición 8.4 *Un subconjunto F de un espacio topológico se dice* **Cerrado** *si su complemento $X - F$, es abierto.*

En tanto que a partir de una métrica d es posible definir una topología $\mathcal{I}$, los conjuntos abiertos y cerrados de un espacio métrico seguirán siendo tales en el espacio $(X, \mathcal{I})$.

8.3 Espacios de Hausdorff

Observe que si el conjunto de entornos que define la topología no es lo suficientemente grande es posible que no se pueda separar puntos diferentes de manera que existan entornos disjuntos que los contengan. Por ejemplo en el caso de la topología trivial no es posible ubicar dos puntos diferentes en entornos deferentes, No obstante esto es siempre posible si la topología es la discreta. Para que esto suceda no es necesario que la topología tenga tantos conjuntos abiertos como los definidos por la topología discreta, los espacios métricos con la topología creada a partir de la distancia euclidiana, tiene esta propiedad. En general diremos que:

Un espacio topológico X es Hausdorff cuando dados dos puntos $a \neq b$ de X, existen entornos diferentes disjuntos que los contienen.

8.4 Espacios productos

Sean $(X_1, \mathcal{I}_1), (X_2, \mathcal{I}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{I}_n)$, espacios topológicos, y sea $X = \Pi_{i=1}^{n}$ el espacio producto. Una topología para ese espacio, puede ser definida como el producto de las topologías de los factores de X. Como puede verse a partir del item 4 de la sección anterior anterior hay diferentes posibilidades de construir en X una topología.

Una de ellas es la **topología producto:**

Definición 8.5 *El par $(X, \mathcal{I})$, donde $\mathcal{I}$ es la colección de subconjuntos de X que son uniones de conjuntos de la forma: $O_1 \times O_2 \times ... \times O_n$, donde cada O_i es un subconjunto abierto de $(X_i, \mathcal{I}_\rangle), i = 1, 2, ..., n$ es un espacio topológico llamado Espacio Topológico producto.*

El lector verificará que la colección $\mathcal{I}$ de la definición anterior es efectivamente una topología.

Demuestre el lector la siguiente afirmación:

En el espacio producto con la topología producto, un subconjunto N de X es un entorno de un punto $a = (a_1, a_2, ...a_n) \in N$ si y solamente si contiene un subconjunto de la forma: $N_1 \times N_2 \times ... \times N_n$, donde cada N_i es un entorno de a_i.

8.5 Continuidad en espacios topológicos

Anteriormente analizamos el concepto de continuidad de funciones en espacios métricos, veremos a continuación que es posible definir este concepto con más generalidad en el marco más general de los espacios topológicos.

Caracterizaremos en esta subsección a las funciones y a las preferencias continuas en espacios topológicos. Daremos a continuación una definición de continuidad de funciones en espacios topológicos:

Definición 8.6 *Sea $f : (X, \mathcal{I}) \to (Y, \mathcal{I}')$, f es continua en $a \in X$ si y solamente si para cada entorno M de $f(a)$ existe N entorno de a tal que $f(N) \subset M$ o equivalentemente $N \subset f^{-1}(M)$. Diremos que f* es continua *si es continua en cada punto de X.*

En los espacios topológicos las funciones continuas quedan caracterizadas a través de cualquiera de los dos teoremas siguientes :

Teorema 8.7 *Sea $f : (X, \mathcal{I}) \to (Y, \mathcal{I}')$, f es continua si y solamente si para cada abierto O de Y $f^{-1}(O)$ es un abierto de X*

Prueba: Supongamos primeramente que f sea una función continua. Sea O un abierto en Y. Para cada punto $a \in f^{-1}(O)$, O es entorno de $f(a)$ entonces es $f^{-1}(O)$ un entorno de a, luego es $f^{-1}(O)$ un entorno de cada uno de sus puntos y por lo tanto un abierto. Recíprocamente, supongamos que preimagen de abierto es un abierto en X. Debemos probar que esto implica que la preimagen por f de un entorno en Y es un entorno en X. Sea N entorno de $f(a)$, por lo tanto existe en N un abierto B al que pertenece $f(a)$) y tal que a pertenece a $f^{-1}(B)$ el que es un conjunto abierto contenido en $f^{-1}(N)$.[]

Teorema 8.8 *Sea $f : (X, \mathcal{I}) \to (Y, \mathcal{I}')$, f es continua si y solamente si para cada conjunto cerrado F de Y $f^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado de X.*

La demostración de este teorema queda a cargo del lector, o bien puede consultarse en cualquier texto de Topología General.

Ejercicio Mostrar que si τ es una topología sobre X estrictamente menos fina (con menor cantidad de abiertos) que otra τ' entonces la función identidad $I : (X, \tau) \to (X, \tau')$ no es continua.

Así las funciones de utilidad, con dominio en un espacio topológico $(X, \mathcal{I})$ $u : X \to R$, serán continuas si y solamente si: *la preimagen por* u *de todo intervalo en* R *es un abierto de* X.

La siguiente definición generaliza el concepto de sucesiones de reales.

Definición 8.9 *Sea* $(\Gamma, \geq)$ *un conjunto dirigido, y sean* $\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ *elementos de un espacio topológico* X, *el conjunto* $\{x_\alpha, \geq\}$ *es llamado* **red.**

Un conjunto Γ se dice dirigido si está definido en él una dirección $\geq$ es decir, una relación binaria reflexiva y transitiva con la propiedad adicional de que cada para cada par de elementos existe uno que sigue a ambos.

Diremos que una red en un espacio topológico X converge a un punto $a \in X$ si para todo entorno U de a existe $\alpha' \in (\Gamma, \geq)$ tal que para todo elemento de la red con $\alpha \geq \alpha', x_\alpha \in U$.

Puede demostrase que un subconjunto F de un espacio topológico es cerrado si y solamente si toda red en F convergente, converge a un elemento de F.

El siguiente teorema caracteriza a las preferencias continuas en espacios topológicos.

Teorema 8.10 *Para una preferencia* $\succeq$ *en un espacio topológico* X *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) La preferencia $\succeq$ es continua.

b) La preferencia $\succeq$ considerada como subconjunto de $X \times X$ con la topología producto es cerrado.

c) Si $x \succ y$ existen entornos U_x, U_y respectivamente de x, y tales que $a \succ b, \forall a \in U_x, b \in U_y$.

El teorema muestra que la continuidad de la preferencia es equivalente al hecho de que si consideramos una red de pares de cestas donde un elemento del mismo es estrictamente preferible al otro y estos pares se acercan a otro (llamado límite) entonces lo mismo le sucederá al par límite. Y que si una cesta es estrictamente preferible a otra, existen vecindades respectivas donde lo mismo le sucede a cualquier par elegido de las vecindades respectivas.

Demostración: El esquema de la demostración es el siguiente: $a \to c;\ c \to b;\ b \to a$.

(1) $a \to c$. Existen dos casos:

i) Existe $z \in X : x \succ z \succ y$, entonces los entornos respectivos serán:

$$U_x = \{a \in X : a \succ z\};\ U_y = \{b \in X : z \succ b\}.$$

Por la continuidad de las preferencias, los conjuntos considerados son abiertos Como $x \in U_x$ siendo U_x un conjunto abierto es entorno de x. análogamente para U_y. Luego como $a \succ z$ y $z \succ b$ por la transitividad de las preferencias se tiene que: $a \succ b$.

ii) No existe $z \in X : x \succ z \succ y$, $U_x = \{a \in X : a \succ y\}$ y $U_y = \{b \in X : x \succ b\}$. La conclusión se obtiene análogamente a lo probado en el item anterior, pero debe usarse para obtener el resultado final que no existe $z \in X : x \succ z \succ y$. luego si $a \in U_x$ se tiene que $a \succeq x$ y análogamente si $b \in U_y$ entonces $y \succeq y$. Aplique ahora la transitividad.

(2) $c \to b$. Probar que $\succeq$ es cerrada en $X \times X$ equivale a probar que si $(x_\alpha, y_\alpha) \in \succeq$ converge a (x, y) entonces este par también pertenece a la relación de preferencia.

Razonemos por absurdo, supongamos entonces que existe $(x_\alpha, y_\alpha) \in \succeq$ convergente a (x, y) y que este par no pertenece a $\succeq$, entonces $y \succ x$, luego por verificarse la afirmación c) y por la convergencia existe elementos de la red de pares y entornos de x e y respectivamente tales que $x_\alpha \in U_x, y_\alpha \in U_y$ y por lo tanto $y_\alpha \succ x_\alpha$, lo cual es absurdo.

(3) $b \to a$. Debemos mostrar a partir del hecho de que la preferencia es cerrada en $X \times X$ que los conjuntos $S_x = \{y \in X : y \succeq x\}$ y $L_x = \{z \in X : x \succeq z\}$ son cerrados. Para esto basta verificar que si $y_\alpha \in S_x$ converge a z, entonces z pertenece a S_x. análogamente, para toda red convergente de L_x. El lector debe completar la demostración.

8.6 Subespacios topológicos.

El objeto de esta subsección es el de mostrar las posibilidades de construir un espacio topológico, sobre la base de un subconjunto no vacío $Y \subset X$ de un espacio topológico dado, definiendo como abiertos en el subconjunto, los abiertos del espacio original intersectados con el subconjunto en cuestión.

Sea $(X; \mathcal{I})$ un espacio topológico e $Y \subset X$, definimos la familia de subconjuntos de Y

$$\mathcal{I}' = \{\mathcal{O}' \subset Y : \mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap Y, \wr \in \mathcal{I}\}$$

El lector probará la siguiente proposición:

Proposición 8.11 *Sea $(X; \mathcal{I})$ espacio topológico e $Y \subset X$ no vacío, entonces $(Y, \mathcal{I}')$ es un espacio topológico.*

Decimos que $\mathcal{I}'$ es la **topología relativa** o inducida por $\mathcal{I}$ en Y.

Llamaremos entornos relativos, cerrados relativos o abiertos relativos, respectivamente a los entornos, conjuntos cerrados o abiertos de esta topología.

Obsérvese que si A es un subconjunto de X el complemento de A respecto a Y A^{c_y}, es igual al complemento de A en X intersectado con Y, es decir $A^{c_y} = A^c \cap Y$.

Teorema 8.12 *Sea Y un subespacio de un espacio topológico $(X, \mathcal{I})$, entonces N' subconjunto de Y, es un entorno relativo de cierto punto $a \in Y$ si y solamente si existe N entorno de a en $(X, \mathcal{I})$, tal que: $N' = N \cap Y$.*

Demostración: Supongamos primeramente que N' es un entorno relativo de $a \in Y$. Existe entonces un conjunto $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{I}'$ con $a \in \mathcal{O}'$, incluido en N', donde $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap Y$ para algún $\mathcal{O} \in I$. Podemos entonces definir $N = N' \cup \mathcal{O}$, N será entonces entorno de a. Luego $N \cap Y = (N' \cup \mathcal{O}) \cap Y = N' \cup (\mathcal{O} \cap Y) = N'$.

Recíprocamente: Sea $N' = N \cap Y$, donde N es un entorno de $a \in Y$. Existe $\mathcal{O} \in \mathcal{I}$ tal que $a \in \mathcal{O}$, por lo tanto $a \in \mathcal{O} \cap Y$, siendo $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap Y$ un abierto relativo, se deduce $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap Y \subset N \cap Y = N'$.[]

A continuación mostraremos que un conjunto cerrado relativo, se forma con la intersección de un conjunto cerrado en el espacio original, intersectado con el subconjunto en el que se pretende definir la topología relativa.

Teorema 8.13 *Sea $(Y, \mathcal{I}')$ subespacio del espacio topológico $(X, \mathcal{I})$. F' en Y es un conjunto cerrado si y solamente sí existe F cerrado en X tal que $F' = F \cap X$.*

Demostración: Siendo F' cerrado en Y, su complemento F'^c es un abierto relativo. Luego existe $\mathcal{O} \in X$ tal que $F'^c = \mathcal{O} \cap Y$ de donde se sigue que $F' = (\mathcal{O} \cap Y)^c$ es decir que F' es el complemento de $\mathcal{O}$ en Y es decir F' es el complemento de $\mathcal{O}$ relativo a X interrsectado con Y, es decir $F' = \mathcal{O} \cap Y$. recíprocamente: sea $F' = F \cap Y$ con F conjunto cerrado en X. Se sigue que: $F'^{c_y} = (F \cap Y)^{c_y} = F^c \cap Y$. Siendo F^c abierto en X se sigue que F'^{c_y} es un abierto relativo y que por lo tanto F' es cerrado relativo.[]

Ejercicio Verificar que si Y es subconjunto de X entonces, la transformación identidad:

$$i : (Y, \mathcal{I}') \to (X, \mathcal{I})$$

es continua.

Ejemplo 8.14 *Sea $a < b < c < d$, y sea $Y = [a, b] \cup (c, d)$ considerado como subespacio de la recta. Entonces $[a, b]$ es relativamente cerrado pues $[a, b] = [a, b] \cap Y$ y es a la vez relativamente* *abierto pues:* $[a,b] = (a-\epsilon, b+\epsilon) \cap Y$. *Análogamente* (c,d) *es relativamente abierto y relativamente cerrado, por ser el complemento respecto de* Y *de* $[a,b]$.

El conjunto de consumo, es decir el conjunto sobre el que los agentes realizan su actividad económica no tiene por que ser, necesariamente, todo el espacio sobre el que la topología está definida, puede ser un subconjunto del mismo Más aun generalmente se trabaja con el cono positivo del espacio, por ejemplo si se modela la economía sobre R^l el conjunto de consumo generalmente es su cono positivo

$$R^l_+ = \{x \in R^l, x_h \geq 0,\ h = 1,2,...,,l\}.$$

La topología utilizada será entonces la relativa.

Muchas veces se hace necesario, definir sobre el conjunto en el que se modela la economía una estructura de espacio vectorial conjuntamente con una topología suficientemente grande (es decir con la suficiente cantidad de conjuntos abiertos) como para que las operaciones, suma de elementos del espacio y producto de cualquier elemento del espacio por un escalar sean operaciones continuas. A estos espacios donde este tipo de operaciones están definidas dedicaremos algunas líneas en la siguiente subsección.

9 Espacios vectoriales topológicos

En esta subsección introduciremos el concepto de espacio vectorial topológico y mostraremos que en espacios vectoriales de dimensión finita, toda *topología vectorial* (es decir toda topología para la que la suma de elementos del espacio y el producto por un escalar son continuas) define los mismos abiertos, es decir que todas las topologías vectoriales son equivalentes. Esta es una importante propiedad, con aplicaciones trascendentes a la economía, pues independiza la continuidad de las preferencias de la topología elegida. Lamentablemente deja de verificarse en espacios más generales.

Definición 9.1 *Sea* $\mathcal{I}$ *una topología en un espacio vectorial* X *tal que:*

(a) Todo punto de X es un conjunto cerrado, y

(b) las operaciones del espacio vectorial son continuas respecto a $\mathcal{I}$.

Bajo estas condiciones decimos que $\mathcal{I}$ es una **topología vectorial** para X y $(X, \mathcal{I})$ es un **espacio vectorial topológico.**

Decir que la suma es continua significa que el mapa

$$(x, y) \to x + y$$

de $X \times X \to X$ es continuo, es decir que dado V entorno de $x + y$ existen V_x y V_y entornos de x e y respectivamente, tales que

$$V_x + V_y \subset V.$$

análogamente para la operación

$$(\alpha, x) \to \alpha x$$

de $R \times X$ en X es continua, es decir que para todo entorno V de αx existe algún $r > 0$ y algún entorno W de x, tal que $\beta W \subset V$ cada vez que $|\beta - \alpha| < r$.

Teorema 9.2 *En espacios vectoriales de dimensión finita todas las topologías vectoriales son equivalentes.*

Demostración: Mostraremos que todo espacio vectorial topológico de dimensión finita (n), $(X, \mathcal{E})$ es homeomorfo a R^n con la topología euclidiana, $\mathcal{E}$. Es decir que existe una función continua con inversa continua que vincula a ambos espacios, de esta manera los conjuntos abiertos en uno y otro espacio son los mismos.

Sea $\Lambda : (R^n, \mathcal{E}) \to (X, \mathcal{E})$, una transformación lineal tal que $\Lambda e_k = u_k$. Donde e_k es el k-ésimo elemento de la base canónica de R^n y u_k el k-ésimo elemento de una base de X. De esta forma para $y \in R^n$, siendo $y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots, +\alpha_n e_n$

$$\Lambda(y) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots, +\alpha_n u_n$$

Por ser $(X, \mathcal{E})$ un espacio vectorial topológico las operaciones involucradas en la definición de Λ son continuas y por lo tanto Λ lo es también.

Por otra parte, para todo $x \in X$ existen $\gamma_i : X \to R, i = 1, 2, ..., n$ tales que $x = \gamma_1(x)u_1 + \gamma_2(x)u_2 + ... + \gamma_n(x)u_n$, lineales y continuas. La linealidad es inmediata, la continuidad sigue del hecho de ser funcionales cuyo núcleo es un espacio de dimensión finita $n - 1$, y por lo tanto cerrado. Obsérvese que

$$\Lambda^{-1}(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x), ..., \gamma_n(x))$$

y es por lo tanto continua.[]

10 Funciones de utilidad y un teorema de representación

Si bien nuestro primer ejemplo sobre representación de preferencias (el del orden lexicográfico) fue negativo, advertimos sobre la posibilidad en condiciones muy generales de representar preferencias por utilidades.

Claramente una función $u : X \to R$ representa una relación de preferencias en X, según la cual $a \in X$ será al menos tan bueno cuanto $b \in X$ si $u(a) \geq u(b)$. Puede verificarse que la relación así definida es reflexiva, simétrica, transitiva y completa.

Además si la función es continua la preferencia por ella introducida también lo es. El lector debe verificar esta afirmación.

Supongamos entonces que los agentes económicos tienen preferencias representadas por funciones de utilidad y veamos algunas propiedades de dichas funciones y sus relaciones con las preferencias que representan.

Definición 10.1 *Sea $u : X \to R$ una función definida en un subconjunto convexo X de un espacio vectorial se dice que u es:*

1) **Cuasi-cóncava** *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ con $0 < \alpha < 1$*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq min\{u(x), u(y)\}$$

2) **Estrictamente cuasi-cóncava** *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $0 < \alpha < 1$*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) > min\{u(x), u(y)\}$$

3) **Cóncava** *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $0 < \alpha < 1$*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$$

4) **Estrictamente cóncava** *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, $\quad 0 < \alpha < 1$*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$$

Puede verificarse que una función $u : X \to R$, definida en un conjunto convexo $X \subset R^n$ es cuasi- cóncava si el conjunto $X_t = \{x \in X : u(x) \geq t\}$ es un conjunto convexo. Es decir si $u(x) \geq t$ y $u(y) \geq t$ entonces:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq t,$$

para todo $t \in R,\ x, y \in X$ con $\alpha \in [0,1]$. Si la desigualdad anterior es estricta para todo $x \neq y$ con $\alpha \in (0,1)$ entonces u es estrictamente cuasi-cóncava.

Para una definición equivalente a la dada para funciones cuasi-cóncavas a partir del Hessiano Orlado y aplicaciones diferentes a partir de esta definición recomendamos la lectura del libro de [Takayama, A.] y el de [Mas-Colell, A. Whinston, M.]. Esta forma de definir cuasi-concavidad permite utilizar herramientas del cálculo diferencial para caracterizar preferencias convexas y sus propiedades.

Teorema 10.2 *Toda función cóncava es cuasi-cóncava y toda función estrictamente cóncava es estrictamente cuasi-cóncava.*

Demostración: Sea $u : X \to R$ cóncava, siendo X un conjunto convexo, y sea $m = min\{u(x), u(y)\}$. Entonces:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y) \geq m.$$

La segunda afirmación se demuestra análogamente.[]

El recíproco de este teorema **no es cierto,** para ver esto considere la función $u(x) = x^2$ ella es cuasi-cóncava, pero no es cóncava.

El siguiente teorema relaciona las características de las funciones utilidad y los comportamientos de los agentes económicos.

Teorema 10.3 *Sea X un conjunto convexo; $u : X \to R$ entonces:*

1) *La función u es cuasi-cóncava si y solamente si la relación de preferencia que representa es convexa.*

2) *La función u es estrictamente cuasi-cóncava si y solamente si la relación de preferencia que representa es estrictamente convexa.*

Demostración: Sea $u : X \to R$ cuasi-cóncava, siendo X convexo. Sea $x \succeq y, z \succeq y$ debemos probar que $\alpha x + (1-\alpha)z \succeq y$.

Esto sigue de que por ser la utilidad cuasi-cóncava se cumple que: $u(\alpha x + (1-\alpha)z) \geq min\{u(x), u(z)\}$, por representar u a la preferencia se sigue que $min\{u(x), u(z)\} \geq u(y)$ y por lo tanto: $\alpha x + (1-\alpha)z \succeq y$.

Recíprocamente: Sea $\succeq$ convexa, x, y elementos de X tales que $u(x) \geq u(y)$ por lo tanto $x \succeq y$. A partir de $y \succeq y$ y de la afirmación anterior se sigue que: $\alpha x + (1-\alpha)y \succeq y$.

La segunda parte es similar y queda a cargo del lector.

A continuación introduciremos algunas posibles características de las preferencias que representan comportamientos de agentes que siempre desean algo mejor, es decir siempre existe para ellos una cesta preferible a la ofrecida. Veremos más adelante que cuando los agentes tienen preferencias de este tipo, solamente se conformarán con cestas de bienes que alcancen la frontera de sus posibilidades presupuestarias.

Definición 10.4 *Diremos que una preferencia definida en X es* **localmente no naciable** *cuando para toda cesta de bienes x y todo entorno U_x de x existe una cesta $y \in U_x \cap X$ tal que $y \succ x$.*

Esta definición dice que para cualquier cesta de bienes existe en cualquier vecindad de ella otra cesta que es estrictamente preferible a la primera. Se dice que el agente presenta un comportamiento no saciable localmente.

11 Espacios vectoriales ordenados

En el marco de los espacios vectoriales ordenados, es posible definir propiedades de las preferencias que implican un comportamiento no saciable localmente. Comenzaremos definiendo espacio vectorial ordenado.

Definición 11.1 *Un* **espacio vectorial ordenado** $\mathcal{E}$, *es un espacio vectorial junto con una relación de orden $\geq$, que satisface las siguientes propiedades que relacionan la estructura algebraica y la de orden:*

i) Si $x \geq y$ entonces: $x + z \geq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathcal{E}$, y

ii) Si $x \geq y \in \mathcal{E}$ entonces: $\alpha x \geq \alpha y$ para todo $\alpha > 0$.

Para cualquier n natural, R^n es un espacio vectorial ordenado con el orden:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\geq\; y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

si y solamente si $x_h \geq y_h$ para todo $h = 1, 2, ..., n$. Por $x > y$ en R^n representamos $x \geq y$ con x distinto de y, mientras que $x >> y$ significa $x_h > y_h$, $\forall\, h = 1, 2, ..., l$.

Entenderemos por **cono positivo** E^+ de un espacio vectorial ordenado al conjunto

$$E^+ = \{x \in \mathcal{E} : x \geq 0\}.$$

Definición 11.2 *1) Una preferencia se dice* **monótona** *si cada vez que $x, y \in \mathcal{E}$ con $x \geq y$ $x \succeq y$.*

2) Una preferencia se dice **estrictamente monótona** *si cada vez que $x, y \in \mathcal{E}$ con $x > y$ $x \succ y$.*

Una relación de preferencias estrictamente monótona es Monótona, también es cierto que monotonía estricta, así como la existencia de una cesta extremamente deseable, implican un comportamiento localmente no saciable. *El recíproco no es cierto para ninguna de las afirmaciones anteriores.*

Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11.3 *Sea $\succeq \in R^2_+ \times R^2_+$ representable por $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ es decir: $x \succeq y$ si y solamente si $x_1 x_2 \geq y_1 y_2$.*

Como puede verse la relación es monótona pues si $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$ entonces $x_1 x_2 \geq y_1 y_2$, de donde $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$. No obstante no es estrictamente monótona, como puede verse a partir de considerar $x = (2, 0)$ e $y = (1, 0)$.

Mostraremos ahora que las curvas de indiferencia (lugar geométrico de las clases de equivalencia definidas por $\succeq$) de preferencias representables por funciones de utilidad cuasi-cóncavas y estrictamente monótonas son curvas con la convexidad hacia el origen.

Teorema 11.4 *Sea $u : X \to R$ una función definida en un conjunto convexo X en el cono positivo de un espacio vectorial ordenado. Si u es cuasi-cóncava y recíprocamente monótona entonces las curvas de nivel tienen la convexidad hacia el origen.*

El teorema que demostraremos para la representabilidad de preferencias por funciones de utilidad, requiere la introducción del concepto de cesta extremamente deseable.

Definición 11.5 *Sea $\succeq$ una relación de preferencias definida en un subconjunto X de un espacio vectorial ordenado E. Entonces un vector v se dice ser una* **cesta extremamente deseable** *para $\succeq$ cada vez que:*

i) $x + \alpha v \in X$ para todo $x \in X$ y para todo $\alpha > 0$ y para todo $x \in X$

ii) $x + \alpha v \succeq x$ para todo $x \in X$ y para todo $\alpha > 0$.

Nótese que si $v > 0$ es extremamente deseable también lo será λv, para todo $\lambda > 0$.

11.1 Un teorema de representación

Terminaremos esta sección probando un teorema de representación el que es válido para preferencias definidas en el cono positivo de un espacio vectorial ordenado de dimensión finita.

Teorema 11.6 *Para una relación de preferencias $\succeq$ continua, definida en el cono positivo R^l_+ de R^l es cierto que:*

1) *Si $\succeq$ es convexa, monótona y existe una cesta extremamente deseable v, entonces $\succeq$ puede ser representable por una función de utilidad continua, monótona y cuasi-cóncava.*

2) *Si $\succeq$ es estrictamente convexa, estrictamente monótona entonces $\succeq$ puede ser representables por una función de utilidad continua,estrictamente monótona y estrictamente cuasi-cóncava.*

Demostración: Sea $\succeq$ continua convexa y monótona, v extremamente deseable. Entonces como $\succeq$ es monótona, $e = \lambda(1, 1, ..., 1) + v, \lambda \geq 0$ lo será también. Podemos afirmar entonces, que existe un vector e con todas sus coordenadas positivas extremamente deseable.

Consideremos $x \in R^l_+$ y definamos:

$$u(x) = inf\{\alpha > 0 : \alpha e \succeq x\}$$

Como $e > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha e > x$ por la monotonía de $\succeq$ se sigue que $\alpha e \succeq x$ por lo tanto $u(x)$ está bien definido.

Afirmamos que x y $u(x)e$ son equivalentes, es decir que $u(x)e \succeq x$ y además que $x \succeq u(x)e$.

La primera relación se sigue del hecho de que siendo $\succeq$ continua el conjunto $\{y \in R^l_+ : y \succeq x\}$ es cerrado. Y la segunda se sigue de la definición de $u(x)$ pues para todo $\epsilon > 0$, $x \succeq (u(x) - \epsilon)e$. Haciendo tender ϵ a cero y si $u(x) > 0$ se sigue de la continuidad de $\succeq$ que $x \succeq u(x)e$. De aquí y de la relación anteriormente probada se tiene que si $u(x) > 0$ entonces x es equivalente a $u(x)$. Si $u(x) = 0$ como $x \geq 0$ por la monotonía de $\succeq$ se tiene que: $x \succeq 0 = u(x)e$.

Obsérvese que existe un único escalar, $u(x)$ tal que hace a la cesta x indiferente con la cesta $u(x)e$. Esta afirmación es conclusión de que si $a > b$ entonces $ae \succ be$ pues por ser e extremamente deseable : $ax = bx + (a - b)x \succ bx$. Si existiesen $u(x)$ e $y(x)$ escalares diferentes tales que, por ejemplo $u(x) > y(x)$ y ambos equivalentes a x obtendríamos a partir de $u(x)e \succ y(x)e$, la conclusión absurda $x \succ x$. Queda así probado que $u : R^l_+ \to R$ definida arriba es la función que representa a $\succeq$.

Como la equivalencia entre la cuasi-concavidad de la función de utilidad que representa a una relación de preferencia y la convexidad de ésta fue probada anteriormente, ver teorema:

solamente queda por probar la continuidad de u. Esto se prueba directamente a partir de las siguientes igualdades entre conjuntos y de las respectivas definiciones de continuidad para funciones y preferencias:

$$\{x \in R^l_+ : u(x) \leq r\} = \{x \in R^l_+ : re \succeq x\}$$

y además:

$$\{x \in R^l_+ : u(x) \geq r\} = \{x \in R^l_+ : x \succeq re\}.$$

La continuidad de las preferencias afirma que los conjuntos $\{x \in R^l_+ : re \succeq x\}$ y $\{x \in R^l_+ : x \succeq re\}$ son cerrados. Del hecho de que una función es continua si y solamente si la imagen recíproca de un conjunto cerrado es un cerrado en el dominio se concluye la continuidad de la función u.[]

El teorema afirma que bajo ciertos supuestos una preferencia continua es representable por una función de utilidad continua. No obstante puede suceder que exista a la vez una función de utilidad que no sea continua que la represente, aun bajo los mismos supuestos.

Ejemplo 11.7 *Sea $\succeq$ representada en R por $u(x) = x$, es decir $x \succeq y$ si y solamente si $x \geq y$ Claramente $\succeq$ es un preferencia continua representada por una utilidad continua.*

Considere ahora la función:

$$u_1(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 0 \\ 1 + x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Fácilmente puede verse que $x \succeq y$ si y solamente $u_1(x) \geq u_1(y)$. Es decir la función discontinua u_1 representa a la preferencia $\succeq$ continua.

En [Mas-Colell, A. Whinston, M.] hay una prueba más general del teorema aquí presentado como interesantes ejemplos y aplicaciones del mismo.

12 Elementos maximales de una preferencia: La demanda

En esta sección en la que definiremos la demanda del agente como el conjunto de elementos maximales de su relación de preferencias en su región presupuestaria haremos uso fuertemente del concepto de compacidad de un subconjunto de un espacio topológico en el que está inmerso el conjunto de consumo del agente maximizador. El libro de [Mendelson, B.] así como el de [Suppes, P.] son una referencia importante en lo que respecta a conjuntos ordenado y existencia de elementos maximales.

Comenzaremos con definiendo elemento maximal de un preorden en un subconjunto.

Definición 12.1 *Sea $\succeq$ un preorden (por ejemplo una relación de preferencia) en un conjunto X y sea A un subconjunto no vacío de X. Decimos que $a \in A$ es un* **elemento maximal** *para $\succeq$ en A cuando no existe $b \in A$ tal que $b \succ a$.*

Si el preorden es completo entonces un elemento $a \in A$ es maximal si y solamente si $a \succeq x, \forall x \in A$.

Observe que no es necesario que una relación de orden posea elemento maximal en un conjunto A dado. Por ejemplo no existe elemento maximal para una preferencia que sea localmente no saciable en un conjunto cuyos puntos sean todos interiores.

Por otra parte para un preorden y un conjunto dados pueden existir más de un elemento maximal, no obstante como el lector debe verificar, es cierto que: *Todo elemento maximal pertenece a una misma clase de equivalencia.* En términos de la Teoría Económica esto se traduce diciendo que si para un agente hay más de una cesta de bienes que maximizan su preferencias, estas serán indiferentes desde el punto de vista de la mejor satisfacción de sus gustos.

A continuación haremos uso fuertemente de las propiedades de compacidad de ciertos conjuntos en espacios topológicos por lo que dedicaremos a este concepto la siguiente subsección.

12.1 Compacidad de conjuntos

Comenzaremos con la definición de cubrimiento de un conjunto, este concepto es básico para lo que sigue.

Definición 12.2 *Sea X un conjunto, B un subconjunto de X, y $\{A_\alpha\}\ _\alpha \in I$ una familia indexada de subconjuntos de X. La colección $\{A_\alpha\}\ _\alpha \in I$ se dice un* **cubrimiento** *de B si $B \subset \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Si el conjunto I es finito, entonces $\{A_\alpha\}$ con $\alpha \in I$ es llamado un* **cubrimiento finito** *de B.*

Si los elementos de la familia indexada son abiertos, diremos que el *cubrimiento es abierto.*

Definición 12.3 *Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes en R^l : un subconjunto $X \in R^l$ se dice* **compacto** *si y solamente si:*

- *1)De todo cubrimiento por abiertos X, es posible obtener un subcubrimiento finito de X.*
- *2)De toda red $\{x_n\} \in X$ puede obtenerse una subred convergente.*
- *3) X es cerrado y acotado. (Teorema de Heine- Borel).*

Nota *En espacios más generales la propiedad de Heine-Borel no vale.*

La demostración de las equivalencias anteriores puede encontrarse en [Kelley, J.L.].

Sea X un espacio topológico. Una familia $C_\alpha, \alpha \in I$ de subconjuntos de X se dice que posee la **propiedad de intersección finita (PIF),** si para cada subconjunto finito $J \subset I$, $\cap_{\alpha \in J} C_\alpha$ es no vacío.

Teorema 12.4 *Sea $C_\alpha, \alpha \in I$ una colección de conjuntos cerrados en X, con la propiedad de intersección finita, X es compacto si y solamente si la intersección $\cap_{\alpha \in I} C_\alpha$ es no vacío.*

Demostración: Supóngase que X es compacto. Sea $C_\alpha, \alpha \in I$ una colección de conjuntos cerrados en X, con la PIF. Suponga que $\cap_{\alpha \in I} C_\alpha$ es vacío, por lo tanto su complemento $[\cap_{\alpha \in I} C_\alpha]^c = X$. Por la propiedad de De Morgan:

$$[\cap_{\alpha \in I} C_\alpha]^c = \cup_{\alpha \in I} C_\alpha^c.$$

Entonces $C_\alpha^c \alpha \in I$ es un cubrimiento por abiertos de X por la compacidad de X, podemos extraer de aquí un subcubrimiento finito, tal que $\cup_{\alpha \in j} C_\alpha^c = X, J \subset I$, finito. Obtenemos que: $\cap_{\alpha \in j} C_\alpha$ es vacío. Llegaremos entonces a una contradicción con la PIF supuesta para $C_\alpha \alpha \in I$.

Recíprocamente: Sea $A_\alpha, \alpha \in I$ un cubrimiento de X. Suponga que no existe un subcubrimiento finito, es decir que para todo subconjunto finito $J \subset I$, $[\cup_{\alpha \in j} A_\alpha]^c$ es no vacío, equivalentemente: para todo $J \subset I$, $\cap_{\alpha \in j} A_\alpha^c$ es no vacío. Entonces $A_\alpha^c \alpha \in I$ es una colección de conjuntos cerrados con la PIF, de acuerdo a nuestro supuesto debe cumplirse que: $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ es no vacío, luego usando en forma apropiada las leyes de De Morgan se concluye que $A_\alpha, \alpha \in I$ no es un cubrimiento abierto de X.[]

Antes de terminar con esta subsección creemos es bueno remarcar que muchas proposiciones de la microeconomía se verifican precisamente por la compacidad de los conjuntos involucrados. La no existencia de compacidad en los conjuntos que representan las restricciones de los programas de optimización propios de la teoría económica, implica hacer consideraciones particulares y de sofisticado tecnicismo matemático, cuando se quiere dar respuestas a temas tales como la existencia de la demanda, o la existencia del equilibrio competitivo. *Recordamos que la equivalencia entre conjuntos compactos y conjuntos acotados y cerrados (Teorema de Heine-Borel), caracteriza a los espacios vectoriales de dimensión finita.* Resulta de gran utilidad, a los efectos de comprender la importancia de este punto consultar [Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkinshaw, O.] así como [Mas-Colell, A. Zame, W.]. Recomendamos al lector también realizar una lectura cuidadosa de las propiedades de los conjuntos compactos en alguno de los textos de Topología General indicados en las referencias.

Terminaremos la subsección con un ejemplo de un espacio vectorial donde está definida un familia de conjuntos cerrados con la PIF, pero cuya intersección es vacía.

Ejemplo 12.5 *Consideremos el subespacio $Y = (0, 1]$ de la recta, con la topología relativa. Sea la familia de subconjuntos*

$$\mathcal{O} = \{(0, \frac{1}{n}], n \in N.\}$$

Como podemos comprobar fácilmente esta es una familia de subconjuntos cerrados relativos, pues $(0, \frac{1}{n}] = [0, \frac{1}{n}] \cap Y$, tales que cualquier cantidad finita de ellos tiene intersección no vacía, sin embargo su intersección es vacía. (Tenga en cuenta que el 0 no es elemento de Y).

12.2 Existencia y unicidad del maximal

El siguiente teorema prueba la no vacuidad del conjunto de los elementos maximales para relaciones de preferencia semi-continuas superiormente en subconjuntos compactos y muestra alguna de las características del mismo.

Teorema 12.6 *El conjunto de los elementos maximales de una relación de preferencias semi-continua superiormente es no vacío y compacto.*

La sola semi-continuidad superior de las preferencias no es suficiente para garantizar la existencia de al menos un elemento maximal. Se necesitan condiciones sobre el conjunto en el que está definida la preferencia, por ejemplo, como ya vimos si el conjunto sobre el que está definida una preferencia localmente no saciable es abierto, (aunque sea acotado) entonces no existe elemento maximal. Con las mismas condiciones en las preferencias, para el mismo conjunto anterior al que le agregamos su frontera, por el teorema anterior existe al menos un elemento maximal para la preferencia. *En el caso de preferencias localmente no saciables en conjuntos compactos, los elementos maximales se ubican en la frontera del conjunto, ¿ podría explicar por qué?*

Demostración: Comenzamos definiendo para cada x el correspondiente conjunto $C_x = \{y \in X : y \succeq x\}$. Como la preferencia es semi-continua superiormente este conjunto es cerrado en X y por lo tanto compacto. El conjunto de los elementos maximales es precisamente el conjunto $\cap_{x \in X}$. Mostraremos a continuación que este conjunto es no vacío.

Para esto comencemos considerando una colección finita de elementos $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, como el preorden $\succeq$ es completo podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x_1 \succeq x_2 \succeq, ..., \succeq x_n$. Esto implica que $C_{x_1} \subset C_{x_2} \subseteq, \ldots, \subseteq C_{x_n}$, y por lo tanto $\cap_{i=1,2,...n} C_{x_i}$ es no vacío, por ser cada uno de estos conjuntos cerrados, poseer la PIF (propiedad de intersección finita) y ser X compacto, se tiene que $\cap_{x \in X} C_x$ es no vacío. Además como todo conjunto cerrado en un compacto es compacto, se sigue que el conjunto de maximales es compacto.[]

El teorema da una respuesta positiva a la existencia del elemento maximal, pero nada dice acerca de la unicidad o no del mismo. Para obtener una respuesta a esta interrogante, comience el lector verificando que:

Para preferencias convexas sobre conjuntos convexos, el conjunto de maximales es un conjunto convexo.

Suponga ahora que la preferencia es estrictamente convexa, suponga que existiesen dos elementos diferentes, a y b en X, considere una combinación convexa de ellos, por la convexidad de la relación de preferencias, esta combinación pertenecerá al conjunto de maximales, y además será estrictamente preferible a cualquiera de los dos maximales originalmente considerados. Esto es un absurdo. Por lo tanto podemos concluir que:

Preferencias estrictamente convexas, sobre conjuntos convexos y compactos tienen un único elemento maximal.

Ejemplo 12.7 *Considere el conjunto convexo compacto*

$$X = \{(x, y) \in R^2_+ : x + 2y \leq 2\}$$

Encuentre el único elemento maximal en X para la relación de preferencias representada por $u(x, y) = x^2 y$

La relación de preferencias es monótona y convexa en R^2, estrictamente monótona y estrictamente cuasi-cóncava en el interior de R^2_+ (lo que puede verse considerando el Hessiano Orlado). Como u a lo largo de cualquiera de los ejes coordenados vale cero, el elemento maximal es un elemento del interior de R^2_+. Por lo tanto existe un único elemento maximal.

Para hallar el elemento maximal pueden emplearse las condiciones de primer orden, las cuales se cumplen con igualdad por ser el maximal un elemento del interior de R^2_+. Se concluye que para este elemento $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{3}$.[]

En condiciones de libre mercado, cada agente económico buscará maximizar su bienestar en su espacio de consumo, sujeto a determinadas restricciones presupuestarias. La cesta de bienes que el agente eligirá es su demanda. Entenderemos por tal una aplicación cuyo dominio es el conjunto de precios y su recorrido el espacio de consumo presupuestariamente factible. De tal manera que fijados los precios de cada uno de los bienes eligirá las cestas que maximizan las preferencias del consumidor, el conjunto de estas no tiene por qué estar en principio compuesto por una única cesta. Componen la demanda del agente todas aquellas cestas que, fijados los precios de los bienes y sus posibilidades presupuestarias, maximizan su relación de preferencias.

13 Funciones de demanda

Las preferencias y las utilidades que están en la base de la teoría del agente maximizador no son observables. En la actividad económica lo que se observa es un conjunto de individuos haciendo transacciones comerciales, intercambiando unos bienes por otros. Esto sugiere entonces, estudiar el comportamiento de la economía y sus posibles leyes a partir del análisis de los bienes que los agentes demandan. Por eso dedicaremos esta sección al estudio de la demanda primeramente individual y luego agregada.

La actividad económica tiene sus conceptos primitivos en las preferencias y en el comportamiento racional del agente, de los cuales la demanda es un concepto derivado, ciertamente de trascendencia teórica y en tanto que agregada, revelador del comportamiento económico de la sociedad. No obstante debemos estar precavidos de que la existencia de la demanda como función o aplicación que surge naturalmente de un programa optimizador seguido por cada agente, requiere de determinadas premisas sobre el conjunto de bienes en el que los individuos hacen su elección y de las características de sus preferencias. Para corroborar esta afirmación presentaremos en esta sección ejemplos de economías para las cuales la demanda no aparece como resultado trivial de un comportamiento racional de los agentes económicos.

Es importante estar advertidos también de que ciertas propiedades generalmente admitidas como universalmente válidas de la función demanda (como la llamada *ley de la demanda*) están lejos de verificarse sin supuestos adicionales y por lo tanto restrictivos del modelo considerado. Por lo tanto predicciones económicas respaldadas en este tipo de supuestas propiedades universales, deberán para ser legítimas cuidar de los supuestos del modelo estudiado, los que en definitiva no son tan generales como muchas veces se pretende.

Aunque la axiomatización elegida es propiedad de la teoría económica, la verificación en el modelo presentado, de las propiedades requeridas por el economista, debe realizarse con elementos propios del análisis matemático a partir de la axiomatización original. De esta manera la matemática, como forma de pensamiento, se transforma en poderoso auxiliar de la ciencia económica al ayudar entre otras cosas por ejemplo a evitar errores lógico-formales, particularmente de aquellos referidos a la construcción del modelo y a lo que de él se puede concluir. Por otra parte la modelación y el análisis matemático del modelo permite descubrir propiedades de la llamada realidad que de otra manera pasarían inadvertidas.

Naturalmente la contrastación con la realidad dirá la última palabra sobre la validez del modelo de partida y sus supuestos. Si no hay errores formales en el proceso de elaboración de las conclusiones, esta contrastación validará o no el modelo presentado. De todas maneras la llamada *realidad* contra la que se compara es muchas veces y en gran parte, un modelo construido en el pensamiento, plagado de concepciones ideológicas inevitablemente presentes en todo proceso intelectual. De ahí que aún las creencias aparentemente más ingenuas y poco contaminadas de formalismos, sobre el comportamiento de la llamada realidad, deban también ser criticada desde el punto de vista lógico formal.

Ciertamente ningún modelo agota la realidad, no obstante sin modelarla de alguna manera ninguna afirmación sobre ella es posible.

13.1 Región presupuestaria y notación

A lo largo de casi toda esta sección, las cestas de bienes estarán representadas por elementos de R^l_+. Una cesta de bienes será entonces un vector de l coordenadas, alguna de las cuales puede ser cero, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$.

Supondremos que los agentes disponen originalmente de una cesta de bienes conformadas por cantidades no negativas de todos los bienes de la economía, entendiendo por tales no solamente aquellos bienes directamente consumibles, sino también las posibilidades de trabajar, habilidades, capacidades etc... con los que el agente pueda iniciar sus actividades económicas, en definitiva bienes suceptibles de ser intercambiados por otros en el mercado. Llamaremos a esta cesta original **dotaciones iniciales** del agente y las representaremos por w**.** Cada una de ellas es un elemento de R^l_+, cada coordenada representará lo que el agente dispone originalmente de ese bien. Cada agente dispone de sus dotaciones iniciales, y no nos preguntamos acerca de como las adquirió.

Introduciremos también los precios de los bienes, cada bien tendrá su precio. Representaremos por p_h será el precio del bien $h \in 1, 2, \ldots, l$. **El valor de la cesta de bienes** x estará representado entonces por el producto escalar o Euclidiano de los vectores p y x :

$$px = px_1 + px_2 + \ldots + px_l = \sum_{h=1}^{l} p_h x_h$$

Recordamos las siguientes propiedades de linealidad del producto Euclídeo:

1) $p(x_1 + x_2) = px_1 + px_2$.

2) $p(\lambda x) = \lambda px, \ \forall \lambda \in R$.

Propiedades que el lector puede verificar Ciertamente.

El valor de una cesta definido de esta manera, hace que los precios sean funcionales lineales, es decir funciones lineales con *dominio* en el espacio en el que está definido el conjunto de consumo y *recorrido* en los reales. Obsérvese que la definición de precios como funcionales lineales es natural, pues los precios asignan a cada cesta un valor, es decir un número real, además el valor de dos diferentes cestas es la suma de sus valores y análogamente el valor de n cestas de bienes, será n veces el valor de una de ellas. *El conjunto de los funcionales lineales forma un espacio vectorial, el que se conoce como* **espacio dual**.

En el caso de que el espacio sobre el que están definidos los funcionales lineales sea un espacio vectorial topológico de dimensión finita puede asegurarse la continuidad de los funcionales lineales, propiedad que aparece naturalmente vinculada al concepto de precios y su comportamiento. No obstante, esto no es necesariamente cierto en espacios más generales, lo que obliga a un mayor cuidado en el momento de definir precios cuando modelamos economías en estos espacios.

Es sabido que para cada funcional lineal de R^l hay un vector del espacio que lo representa, en el sentido de que si $f : R^l \to R$ entonces existe $p \in R^l$ tal que $f(a) = pa$, $\forall a \in R^l$. De esta manera si el espacio es de dimensión finita el dual y el espacio coinciden. Así si f *es un funcional lineal en* R^l *entonces* $f(a)$ *para* a *en el espacio de consumo representará el valor de la cesta* a *a precios* p_f, *siendo* p_f *el vector que representa a* f *y* $f(a) = p_f a$.

Esta propiedad de representación de precios por funcionales lineales se mantiene aún cuando el conjunto de consumo es subconjunto de un espacio de dimensión infinita. En estos casos este vector no será necesariamente, un elemento del mismo espacio en el que están definidas las cestas de bienes es decir, *el espacio y su dual no serán necesariamente un mismo espacio.* Pero los precios seguirán adjudicando valor a las cestas de bienes de una manera lineal y el valor de cada cesta de bienes estará unívocamente definido por este funcional. Para entender la necesidad y las dificultades que conlleva para al teoría económica, la introducción de espacios de dimensión infinita se puede ver entre otros el trabajo de [Mas-Colell, A. Zame, W.].

En espacios de dimensión finita la existencia de un vector representante para cada funcional lineal, es fácil de probar. Para verlo considere que los vectores: $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ forman una base del espacio. Sea f un funcional lineal, y $x = (x_1, x_2, ...x_n)$, luego $f(x) = f(x_1e_1 + x_2 + ... + x_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n)$. Sea $p_f = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ entonces: $f(x) = p_f a$.

Llamaremos **región presupuestaria** a la que representaremos por $B_w(p)$ al conjunto

$$B_w(p) = \{x \in R^l_+ : px \leq pw\}.$$

De esta manera *el valor de las dotaciones iniciales de cada agente queda representado por el número real* pw. El vector $w \in (R^l_+)^n$ representa las dotaciones iniciales de los agentes de la economía.

Se deduce inmediatamente que para todo $\lambda > 0$,

$$B_{\lambda w}(\lambda p) = B_w(p).$$

Teorema 13.1 *Si el precio de cada bien está representado por un real estrictamente positivo, entonces la restricción presupuestaria de cada agente con dotaciones iniciales en R^l_+, es un subconjunto compacto de R^l_+.*

Demostración: La continuidad del producto interno, permite concluir que la región presupuestaria es cerrada [1]. La siguiente cadena de desigualdades prueba que es acotada: $0 \leq p_i x_i \leq px = pw$, luego para $r = min\{p_1, p_2, .., p_l\}$ se tiene: $x_i \leq \frac{pw}{r} \leq \infty$. A partir del teorema de Heine-Borel concluimos la demostración.[]

Como el lector verificará es cierto que si el vector p de precios tiene alguna componente cero es decir si $p \in R_l^+$, entonces la restricción presupuestaria para cualquier w será no acotada.

Siendo que en R^l_+ acotado y cerrado equivale a compacto, siendo w un elemento del cono positivo de R^l, la región presupuestaria será un subconjunto compacto si y solamente si p es positivo en todas sus componentes.

Nos restringiremos por ahora al caso en que la única actividad económica de los agente, es el intercambio de bienes en el mercado. Es decir que intentará intercambiar la cesta de bienes que él posee (sus dotaciones iniciales) por otra que le sea preferible, naturalmente que sólo podrá elegir dentro del conjunto de cestas de bienes que le son admisibles, es decir aquellas cuyo valor no excede al de su dotación inicial. En definitiva: *cada individuo resolverá en el mercado el programa que consiste en maximizar sus preferencias, restringiéndose a su región presupuestaria.*

El lector está en condiciones de probar la siguiente proposición:

Proposición 13.2 *Para precios estrictamente positivos y preferencias continuas en R^l_+ se tiene que:*

- 1) Si la preferencia es además convexa, entonces la preferencia tiene al menos un elemento maximal en la región presupuestaria.

- 2) Si la preferencia es estrictamente convexa, entonces existe exactamente un elemento maximal.

- 3)Si la preferencia es localmente no saciable entonces los elementos maximales están en la frontera de la región presupuestaria.

[1] Demuestre el lector que el producto interno es continuo en sus dos variables y la afirmación anterior.

Como ya sabemos (ver sección 7.1) la existencia de elementos maximales para determinadas preferencias así como su número, dependerá de las características propias de dichas preferencias (particularmente continuidad y convexidad) así como de las propiedades del conjunto sobre el que están definidas (particularmente compacidad).

En el caso de que este elemento sea único, se define la **demanda,** como una función y en otro caso como una aplicación o función multívoca, $x : R^l_+ \times R^l_+ \to R^l_+$ tal que:

$$x(p,w) \to \{x \in B_w(p) : x \succeq y, \forall y \in B_w(p)\}$$

Preferencias estrictamente convexas son suficientes para la unicidad, mientras que la convexidad es suficiente para que el conjunto demanda sea convexo, pudiendo ser éste un conjunto con uno o varios elementos.

Si bien nos restringiremos al caso en que el elemento maximal está estrictamente determinado, cabe decir que si el conjunto de los maximales fuera múltiple gran parte de las propiedades y conclusiones que obtendremos para la *función demanda,* pueden obtenerse a partir de la teoría de las funciones multívocas o aplicaciones. Para una interesante y profunda introducción al tema ver [Berge, C.]. El libro de [Debreu, G.] muestra una cuidadosa aplicación de los principales resultados de dicha la teoría de las aplicaciones al terreno de la economía.

13.2 Propiedades de la demanda

Algunas propiedades de la demanda se deducen inmediatamente:

1) **Homogeneidad de grado cero.** Para todo $\lambda > 0$ $x(p,w) = x(\lambda p, \lambda w)$ lo que se deduce de la propiedad análoga ya indicada en la subsección anterior para la restricción presupuestaria.

2) **Ley de Walras.** En el caso de estar definida la demanda a partir de preferencias localmente no saciables, se verifica que: $px(p,w) = pw$.

   La homogeneidad de grado cero de la demanda, nos permite restringirnos a trabajar con precios en el simplex [2] positivo S^{l-1}_+, es decir con vectores en el simplex, tales que sus coordenadas son no negativas $p_h \geq 0; h = 1, 2..., l$ (donde l representa la cantidad de bienes existentes en el mercado) y tales que su suma $\sum_{h=1}^{l} p_h^2 = 1$. Para ver que esto es posible basta con considerar $\lambda = \frac{1}{\mathbf{p}}$ donde $\mathbf{p} = \sqrt{\sum_{h=1}^{n} p_h^2}$.

[2] Recordamos que el simplex de dimensión $(l-1)$ es el conjunto

$$S^{l-1} = \left\{ p \in R^l : \sum_{i=1}^{l} p_i = 1, ; \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., l\} \right\}$$

Algunas otras propiedades de la función demanda no son tan obvias, por ejemplo la continuidad.

3) **Continuidad de la función demanda**

Consideremos preferencias estrictamente convexas, en R^l_+ con una cesta de bienes extremamente deseable. Consideremos también dotaciones iniciales, representadas por un vector $w \in R^l_+$ no nulo fijo. Estudiaremos la continuidad de la demanda del agente con tales preferencias y utilidades, la que representaremos por $x_w : S^{l-1} \to R^l_+$ siendo $x_w(p) = x(p, w)$ la demanda del agente a precios p.

Comenzaremos analizando un contraejemplo. Veremos que a pesar de las preferencias ser bien comportadas definen una función demanda que no es continua.

Ejemplo 13.3 *Supongamos una relación de preferencias en un R^2_+ representada por la función de utilidad*

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

Supongamos además dotaciones iniciales $w = (1, 0)$ y consideraremos sin pérdida de generalidad precios (p_1, p_2), con $p_2 = 1 - p_1$.

La función de utilidad es continua, estrictamente monótona y estrictamente cóncava en el interior de R^2_+. Si $p_1 \neq 0$ la restricción presupuestaria del problema es un conjunto no vacío, compacto y convexo existe por lo tanto un único elemento maximal el que representará a la cesta demandada.

A partir de las condiciones de primer orden para el problema de maximizar $u(x_1, x_2)$ en la región presupuestaria, $B_{(1,0)}(p_1, 1 - p_1)$, se puede determinar la demanda. Como el máximo no se alcanza en la frontera de R^2_+, se obtiene la igualdad:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{p_1}{1 - p_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Sustituyendo en forma adecuada en la restricción $p_1 x_1 + (1 - p_1) x_2 = p_1$, se obtiene que:

$$x_{(1,0)}(p) = \left(1 - p_1, \frac{(p_1)^2}{1 - p_1}\right)$$

Obsérvese que $\lim_{p_1 \to 0} x_{(1,0)}(p) = (1, 0)$. No obstante si $p_1 = 0$ la demanda por el primer bien es *también* entendiendo por esto el hecho de que el agente demandará todo lo que exista del bien cuyo precio es cero. Concluimos en que en $(0, 1)$ la demanda es discontinua .[]

La no existencia de una demanda para precios p con alguna componente nula (como en el caso anterior) es consecuencia inmediata del hecho de que preferencias no saciables, en regiones presupuestarias definidas por precios p en la frontera del cono positivo R^l_+ (y por lo tanto no compactas) no tienen elemento maximal.

Demostraremos el teorema de continuidad de la demanda para precios estrictamente positivos, y dotaciones iniciales en R^l_+. La demostración de este teorema la haremos a partir del teorema del gráfico cerrado el que enunciaremos a continuación.

Teorema 13.4 [Teorema del gráfico cerrado] *Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos, siendo Y Hausdorff y compacto. Entonces f es continua si y solamente si su gráfico $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$.*

Puede probarse que existen funciones con su gráfico cerrado pero que por fallar alguna de las hipótesis del teorema no son continuas:

- 1) Supongamos que Y no es compacto, consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

  Puede observarse que su gráfico es cerrado pero no es continua.

- 2) Considere ahora $Y = R$ con la topología discreta, y $X = R$ con la topología fácilmente. $f(x) = x$ resulta discontinua en todo punto y sin embargo tiene su grafo cerrado.

A los efectos de ampliar las posibles preferencias a considerar agregaremos a las estrictamente convexas en todo R^l_+ las que son estrictamente convexas solamente en el interior de R^l_+ pero tales que todo punto en el interior es preferible a un punto sobre la frontera de R^l_+. Las preferencias que cumplen una u otra de estas condiciones además de la no saciabilidad local, serán llamadas **preferencias neoclásicas.**

La función

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

es estrictamente cuasi cóncava estrictamente monótona pero no verifica que todo punto en el interior es preferible a un punto sobre la frontera de R^2_+. (Compare $(1, 0)$ con $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$)

La función

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

es estrictamente cuasi cóncava y estrictamente nonótona en el interior de R^2_+. No es estrictamente cuasi cóncava en la frontera de R^2_+ pero verifica que todo punto en el interior es preferible a un punto sobre la frontera de R^2_+.

Teorema 13.5 *Toda función demanda, $x_w : R^l_{++} \rightarrow R^l_+$ correspondiente a preferencias neoclásicas y dotaciones iniciales $w \in R^l - \{0\}$, es continua.*

Demostración: Comenzaremos probando que la función demanda x_w tiene gráfico cerrado. Para ver esto consideremos las sucesiones $p_n \rightarrow p$ y $x_w(p_n) \rightarrow x$, debemos mostrar que $x_w(p) = x$, mostraremos que x es un elemento maximal en $B_w(p)$ y por ser éste único se sigue que es la demanda. La no saciedad local permite escribir $p_n x_w(p_n) = p_n w$ y de la continuidad del producto interno se sigue que $px = pw$. Sea ahora $y \in B_w(p)$, por lo tanto $py \leq pw$ se tiene para $0 < \lambda < 1$ que $p(\lambda y) < pw = px$, nuevamente por la continuidad del producto interno se tiene que existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, $p_n(\lambda y) < p_n w = p_n x_w(p_n)$ por lo que $x_w(p_n) \succ (\lambda y)$. Ahora por la continuidad de las preferencias, para n suficientemente grande, $x \succeq \lambda y$ para todo $0 < \lambda < 1$. Haciendo ahora $\lambda \rightarrow 1$ se concluye conque $x \succeq y$. Por ser y un elemento arbitrario de la restricción presupuestaria se concluye que x es maximal y por lo tanto es $x_w(p)$.

Sea ahora $[r, s]$ un intervalo en el interior de R^l_+ con $p \in [r, s]$. Sea $Y = x_w(\bar{[r, s]})$, por ser Y acotado y cerrado, y siendo $x_w : [r, s] \rightarrow Y$ una función cuyo gráfico es cerrado el teorema queda probado **.**[]

Consideraciones sobre la llamada ley de la demanda

Es habitual la referencia en macroeconomía a la llamada ley de la demanda, cuya formulación es aproximadamente la siguiente: *a medida que el precio de un bien disminuye la demanda por el mismo aumenta, y cuando el precio aumenta la demanda disminuye.* Gran parte del análisis económico basado en los modelos IS-LM se apoyan es esta supuesta ley.

Presentaremos a continuación un ejemplo en el que esta *ley* no se cumple.

Ejemplo 13.6 *Considere la relación de preferencias en R^3_+ representada por la función de utilidad*

$$u(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + y + \frac{z}{1+z}$$

y sea $w \in R^3_+$.

Verifique que $u(x, y + z, 0) > u(x, y, z)$, por lo tanto

$$(x, y + z, 0) \succ (x, y, z).$$

Pruebe que si $p_1 > 0$ con $p_2 = p_3$ entonces la demanda por el tercer bien $z(p) = 0$. Considere ahora $p_n = (1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ y pruebe que para $n \rightarrow \infty$, $x(p_n)$ se mantiene acotado, mientras que $y(p_n) \rightarrow \infty$ y $z(p_n) = 0$.

Para probar la afirmación vea que si la sucesión $x_w(p_n)$ tuviera alguna subsucesión convergente a un vector $x \in R^l_+$ entonces, x sería un elemento maximal y por lo tanto p sería estrictamente positivo en todas sus coordenadas (pues en otro caso no existiría elemento maximal en $B_w(p)$), lo que contradice el hecho de ser p elemento de la frontera de R^l_+.

Muestre que si $p_n \to p$ donde la i-ésima coordenada de p es estrictamente positiva, entonces la demanda por el bien i está acotada.[]

Con un poco más de cuidado en la observación del comportamiento de los agentes, puede concluirse que si bien no es cierta la ley de la demanda en su formulación más burda, es posible concluir que si p_n es una sucesión de precios convergente a un valor p en la frontera de R^l_+ debe verificarse que si $x_w(p_n) = (x_{w1}(p_n), x_{w2}(p_n), ..., x_{wl}(p_n))$ es el vector demanda a precios p_n,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_w(p_n)\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} x_{wj}(p_n) = \infty.$$

Es decir que, la demanda agregada de por lo menos un bien crece indefinidamente. La demanda por bienes aumenta, pero no necesariamente la demanda de todos aquellos bienes cuyos precios decrecen.

A continuación mostraremos que aun con relaciones de preferencias muy bien comportadas, es decir monótonas, estrictamente convexas, representables por funciones de utilidad tan bien comportadas como ellas y con dotaciones iniciales cuyo valor es positivo, es posible la no existencia de la función demanda. El ejemplo requiere conocimientos de matemáticas más amplios que los exigidos para la lectura de estas notas. De todas formas para una primera lectura, no es indispensable la comprensión total del ejemplo, cuya presentación tiene por objetivo hacer dudar una vez más al lector de los conocimientos supuestamente basados en verdades *evidentes por sí mismas.*

13.3 Ejemplos de economías en las que no existe función demanda

Obsérvese que la más universalmente citada ley de la economía la ley de la demanda, deja ahora incluso de tener substrato real: la propia demanda puede no existir. En definitiva lo que sucede, parece ser que como todas las leyes las de la economía son también una construcción intelectual, quizás la realidad misma lo sea y su validez depende del marco en el que estemos trabajando. (El lector puede intentar probar la existencia de la realidad que cree existente por sí misma y evidente apriori de toda experiencia y verificación).

El siguiente ejemplo satisface las condiciones habituales de convexidad y monotonía en las preferencias del agente. La restricción presupuestaria está bien definida, pero aunque los precios están representados por funcionales lineales positivos, no es un subconjunto compacto del espacio de consumo.

Un agente con una función de utilidad intertemporal y dotaciones iniciales predeterminadas intercambia bienes en el mercado, de forma tal de maximizar su función de utilidad. El espacio de bienes es subconjunto del espacio de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[0,1]$, al que representaremos por $C[0,1]$. En tanto que la integral de Riemann representa un funcional lineal sobre este espacio, $p : C[0,1] \to R$

$$p(x) = \int_0^1 x(t)dt$$

representa el valor del bien $x \in C[0,1]$ a precios p. Obsérvese que cada bien en este espacio, puede considerarse como un plan de consumo contingente con el tiempo $t \in [0,1]$.

Ejemplo 13.7 *Consideremos un agente cuya función de utilidad es*

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}\sqrt{x(r_i)},$$

donde $\{r_0, r_1, r_2, ...\}$ *es una enumeración de los racionales. Supongamos que las dotaciones iniciales del agente están representadas por* $w(t) = 1, \forall t \in [0,1]$

Esta función es estrictamente cóncava, estrictamente monótona y continua, pero no tiene elemento maximal en

$$B_{\mathbf{1}}(p) = \{x \in C[0,1] : \int_0^1 x(t)dt \leq \int_0^1 \mathbf{1}dt\}.$$

Para ver que no existe elemento maximal, considere la siguiente función continua:

$$x_n(t) = \begin{cases} -n^2t + n & si\ 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & si\ \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Puede verificarse que $x_n(t) \in B_{\mathbf{1}}(p)$ y que $u(x_n) \geq \sqrt{x_n(0)} = \sqrt{n}$ y por lo tanto $sup\{u(x) : x \in B_{\mathbf{1}}(p)\} = \infty$.[] Tomado de [Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkinshaw, O.].

13.4 La demanda agregada y el agente representativo

Habitualmente la Macroeconomía trabaja con valores agregados, demanda agregada, riqueza agregada, bienestar social, etc... parece natural preguntarse entonces, hasta que punto estos valores representan el comportamiento de los agentes económicos o son alguna medida del bienestar de la sociedad. Si bien el tema es profundo dedicaremos en estas notas sólo un breve comentario, no porque el tema no merezca mayor desarrollo sino porque trasciende ampliamente el marco de este trabajo.

Supongamos que la sociedad se compone por n agentes poseedores de correspondientes relaciones de preferencias $\succeq_i$, su correspondiente demanda $x_i(p, w_i)$ la que dependerá de los precios y de sus dotaciones iniciales. En general dados los precios $p \in R^l$ y una distribución de riquezas $(w_1, w_2, ..., w_n)$ puede definirse la **demanda agregada** como

$$x(p, w_1, ...w_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p, w_i).$$

De esta forma la demanda agregada depende no sólo de precios y de la riqueza agregada, o total de la sociedad, sino también de su distribución inicial. La pregunta que sigue es entonces legítima: *¿ tiene la función $x(p, w_1, ...w_n)$, es decir la demanda agregada, valor como índice del bienestar social?* La respuesta es que al menos que la demanda individual sea independiente de la distribución inicial de la riqueza, es un índice muy relativo.

Tiene interés también la pregunta sobre el valor de la demanda agregada como representante del comportamiento de la sociedad en su conjunto. Es decir, *¿ es válido considerar la demanda agregada como la demanda de un* **agente representativo** *de la sociedad y aplicar a esta las técnicas y conclusiones obtenidas para la demanda de cada agente individual?* Puede observarse que la continuidad, la ley de Walras y la homogeneidad en los precios de grado cero, son heredadas por la demanda agregada. No obstante la respuesta es afirmativa solamente en el caso en que exista una relación de preferencias $\succeq$ racional, para la que la demanda agregada, represente precisamente el elemento maximal de esta preferencia, en la restricción presupuestaria generada por la riqueza agregada $\sum_{i=1}^{m} w_i$, a precios p. En principio no hay nada que garantice la existencia de tales preferencias, por lo cual muchas afirmaciones hechas a partir de la teoría del agente representativo merecen ser puestas en duda. Como lecturas sobre el tema recomendamos: [Mas-Colell, A. Whinston, M.], [Arrow, K. J.], [Sen, A.].

14 Función exceso de demanda y equilibrio

El tema central de esta sección será el estudio del equilibrio walrasiano, así como las condiciones que garantizan su existencia. Si bien la existencia del equilibrio walrasiano, puede probarse en condiciones más generales que las de aquellas economías en las que puede asegurarse la existencia de la función demanda, nos limitaremos en esta sección a probar la existencia del equilibrio walrasiano en estos casos. El lector deseoso de mayor generalidad, puede consultar [Mas-Colell, A. Zame, W.] o bien el texto de [Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkinshaw, O.].

Comenzaremos la sección definiendo la función **exceso de demanda** para una economía con preferencias $\succeq_i$ determinadas y dotaciones iniciales $w = (w_1, w_2, ...w_n)$ fijas, n representa el número de agentes de la economía.

Definición 14.1 *Una función de exceso de demanda es una función, $z : int(R^l_+) \to R^l$ definida por:*

$$z(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) - \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) - W$$

Donde $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$ es la oferta agregada, y $x_i(p)$ representa la demanda del agente i a precios p. La expresión en coordenadas de la función exceso de demanda viene dada por: $z(p) = (z_1(p), z_2(p), ..., z_n(p))$.

Un precio p^* para el que la función exceso de demanda se anula representa un precio para el que la oferta de bienes en la sociedad es igual a su demanda. Dado que para este precio los agentes tendrán una demanda $x_i(p^*)$ que garantiza la no existencia de excedente, p^* es un precio de equilibrio.

Podemos hacer la siguiente definición:

Definición 14.2 *El par $(p^*, x(p^*))$ es un* **equilibrio walrasiano** *si y solamente sí $z(p^*) = 0$.*

Recuerde que p^* es un elemento del interior de R^l_+ y que $x(p^*)$ es un elemento de R^{ln}_+ pues es una asignación de recursos, y como tal se compone de n cestas de bienes, con l componentes (bienes) cada una, una para cada uno de los n agentes de la economía.

14.1 Propiedades de la función exceso de demanda

1) Es homogénea de grado cero.

2) Es continua y acotada inferiormente.

3) Satisface la ley de Walras: $pz(p) = 0 \ \ \forall p$.

4) Si una sucesión de precios $\{p_n\}$ en el interior de R^l_+ converge a un precio p también en dicho interior, entonces la sucesión $\{z(p_n)\}$ se mantiene acotada.

5) Si una sucesión de precios $\{p_n\}$ en el interior de R^l_+ converge a un precio p en la frontera de R^l_+ (es decir p tiene alguna coordenada igual a cero) entonces al menos una coordenada crece infinitamente.

Las propiedades indicadas pueden mostrarse a partir de las análogas satisfechas por la función demanda.

El siguiente paso es mostrar la existencia del precio p^* de equilibrio. Lo que se hará en la siguiente sección.

14.2 Equilibrio competitivo

La caracterización de equilibrio competitivo, como un sistema de ecuaciones simultaneas (representado en $z(p) = 0$ a partir de los trabajos de K. Arrow y G. Debreu) fue realizado por primera vez por [Walras, L.]. Walras partía de agentes maximizando su función de utilidad y productores maximizando beneficios por un lado, a la vez que entendía que el precio es independiente de la acción misma de cada agente económico por separado. Estos encuentran precios dados y actúan frente a ellos como frente a un dato económico. Si bien el método seguido por Walras, de contar ecuaciones e incógnitas como forma de asegurar la existencia de una solución del referido sistema es esencialmente correcto, no alcanza para justificar la existencia del equilibrio, debe también poder asegurarse la positividad de la solución. No es sorprendente que la demostración de la existencia del equilibrio competitivo (o Walrasiano) se haya demorado en aparecer, pues demostrar su existencia, como hoy se sabe, es equivalente al problema de encontrar un punto fijo de un mapa continuo de un conjunto compacto en sí mismo, y este resultado fue probado por primera vez en 1910 por Brouwer.

El nacimiento de la teoría de equilibrio general puede datarse en 1954, fecha en la que [Arrow, K. Debreu, G.] publican un resultado general de la existencia del equilibrio competitivo, es éste un resultado de gran importancia para el desarrollo posterior de la teoría económica. Dada la intensa relación existente entre el concepto de equilibrio general, y puntos fijos de mapas continuos presentaremos en esta sección un teorema de existencia del equilibrio competitivo y un teorema de existencia de punto fijo en mapas continuos de compactos en sí mismos. La historia de la prueba de la existencia del equilibrio competitivo es un ejemplo claro de la necesidad de una combinación adecuada de teoría económica y matemática. Es importante remarcar que aunque en esta sección la demostración de la existencia del equilibrio walrasiano se realiza a partir de la función exceso de demanda, no es el único camino, en la parte II mostraremos un camino alternativo. La existencia del equilibrio walrasiano puede demostrarse en muchos casos en que la demanda no es una función continua. Al respecto el lector puede consultar [Mas-Colell, A. Zame, W.] donde encontará además una amplia bibliografía al respecto, en un marco mucho más general que el que acá presentamos.

14.3 Existencia del equilibrio competitivo

Presentaremos por razones de simplicidad solamente una demostración de la existencia para el caso de las llamadas economías de intercambio puro. Es posible extender la demostración al caso de economías con producción, pero este no es nuestro objetivo aquí.

Definición 14.3 *Llamamos* **punto fijo** *Sea A un subconjuntos de X. Un* **punto fijo** *de una función $f : A \to X$ es un punto $x \in A$ para el que se cumple que $x = f(x)$.*

Aunque el siguiente teorema será probado en la subsección siguiente en toda su generalidad, lo enunciaremos aquí por necesidad metodológica, en una forma más restrictiva y sin prueba.

Teorema 14.4 Teorema de Brouwer. *Sea $K \subset R^n$ un conjunto no vacío, compacto y convexo. Toda función continua de K en sí mismo, tiene un punto fijo.*

Teorema 14.5 Existencia del equilibrio. *Supongamos que las preferencias de los agentes económicos son continuas, estrictamente convexas y estrictamente crecientes. Suponga también que $w_i \in R^l_+ - \{0\}$ $i = 1, 2, ..., n$. Entonces el equilibrio walrasiano existe.*

Demostración Sea ξ un mapa del simplex de dimensión $(l-1)$ en sí mismo (l representa el número de bienes presentes en la economía) definido como:

$$\xi_h(p) = \frac{p_h \ + \ max\{0, \bar{z}_h(p)\}}{1 + \sum_{j=1}^{l} max\{0, \bar{z}_j(p)\}}, \tag{1}$$

$h = 1, 2..., l$ y siendo $\bar{z}_h = min\{z_h, 1\}$, donde z_h es la función de exceso de demanda por el h-ésimo bien. Obsérvese que si nos restringimos a precios no negativos entonces se cumple que,

$$\sum_{h=1}^{l} p_h \bar{z}_h(p) \leq \sum_{h=1}^{l} p_h z_h(p) = 0. \tag{2}$$

La continuidad de la función exceso de demanda en S^{n-1}_{++} (es decir el conjunto delos puntos en el simplex, con todas sus coordenadas positivas) en el simplex de dimensión (l - 1), asegura la continuidad de ξ en dicho conjunto. Pero la demanda puede ser discontinua en la frontera de dicho conjunto, es más como ya vimos si las preferencias son estrictamente monótonas, la demanda por algún bien crecerá indefinidamente al acercarse los precios a un valor en la frontera de E^{l-1}_{++}. Es por ese motivo que consideramos la función $\bar{z}_h$ la que es continua para todo elemento p del simplex.

Siendo entonces ξ una función continua, de un compacto en sí mismo, por el teorema de Brouwer tiene un punto fijo. Sea éste $\bar{p}$. Probaremos a continuación que $\bar{p}$ es un equilibrio.

Operando en 14.3 obtenemos

$$\bar{p_h}\left(1+\sum_{j=1}^{l} max\{0,\bar{z}_j(\bar{p})\}\right)=\bar{p_h}\ +\ max\{0,\bar{z}_h(\bar{p})\}.$$

Multiplicando ambos miembros por $\bar{z}_h(\bar{p})$ sumando respecto a h y considerando (2) obtenemos :

$$\sum_{h=1}^{l}\bar{z}_h(\bar{p})max\{0,\bar{z}_h(\bar{p})\}\leq 0.$$

Por la no negatividad de cada término obtenemos

$$\bar{z}_h(\bar{p})max\{0,\bar{z}_h(\bar{p})\}=0$$

por lo tanto : $\bar{z}_h(\bar{p})\leq 0$, por lo tanto a precios $\bar{p}$ se cumple $z_h(\bar{p})=\bar{z}_h(\bar{p})$. Luego si $\bar{z}_h(\bar{p})<0$ por la ley de Walras: se sigue que: $\bar{p}_h=0$. Por la monotonía de las preferencias se sigue que $x_h(\bar{p})>M$ para todo M real, lo que contradice $z_h(\bar{p})<0$, luego $z_h(\bar{p})=0$.[]

El lector puede verificar que si en lugar de pedir estricta monotonía en las preferencias, pedimos solamente no saciedad local, entonces podemos llegar de igual modo a la existencia de $\bar{p}$ de equilibrio. No obstante si bien es cierto que no habrá exceso de demanda, es posible la existencia de exceso de oferta (bienes libres) para algunos bienes, para los cuales sus precios serán, por la Ley de Walras, cero. Por otra parte la *estricta convexidad* de las preferencias es requerida a los efectos de que la demanda sea una función. No obstante es posible pedir solamente convexidad, la demostración del teorema de existencia del equilibrio hará uso en este caso, del teorema de punto fijo de Kakutani y usará técnicas provenientes de la teoría de correspondencias. En la siguiente sección haremos una breve introducción al tema.

14.4 Teoremas de punto fijo

La trascendencia del teorema de existencia del punto fijo en economía hace que le dediquemos un espacio relativamente amplio en estas notas.

El teorema es elemental cuando trabajamos con funciones continuas de un compacto en sí mismo en R. Para ver esto considere la función $f:[-1,1]$ en sí mismo y defina $g(x)=f(x)-x$. Esta función es no negativa en $x=-1$ y no positiva en $x=1$. Como $g(x)$ es continua, debe existir un punto c tal que $g(c)=0$. Luego $f(c)=c$. Luego c es el punto fijo.

La situación es bastante más complicada cuando trabajamos en dimensiones mayores que uno. Daremos una prueba general para estos casos para correspondencias y luego obtendremos como corolario el teorema para funciones.

Las correspondencias juegan un papel importante en teoría económica, por ejemplo la región presupuestaria es una correspondencia que asocia un conjunto de cestas del espacio de consumo con un precio dado. En teoría de juegos el conjunto de mejores réplicas es una correspondencia entre los conjuntos de estrategias de un jugador y los del resto. La mayor diferencia entre funciones y correspondencias aparece en el momento de definir la imagen inversa. Para la función f la imagen inversa de un cierto conjunto A es el conjunto $f^{-1}(A) = \{x : f(x) = a\}$. Para una correspondencia ϕ hay dos razonables generalizaciones: *inversa superior* de A que está definida como $\{x : \phi(x) \subset A\}$, y *la inversa inferior* de A, que es $\{x : \phi(x) \cap A \neq \emptyset\}$. Cuando ϕ es una función ambos conjuntos coinciden con la inversa de la función.

Habiendo dos definiciones de imagen inversa, hay dos definiciones de continuidad: Una correspondencia es *Semicontinua Superiormente* cuando la preimagen superior de un abierto es abierto, y es *Semicontinua Inferiormente* cuando la preimagen inferior de un abierto es un abierto.

Daremos a continuación las definiciones formalmente:

Definición 14.6 *Una* **correspondencia** ϕ *de un conjunto* X *en un conjunto* Y *asigna a cada* $x \in X$ *un subconjunto* $\phi(x)$ *de* Y*. También puede ser considerada* ϕ *como una función de* X *en* 2^Y *el conjunto potencia de* Y*.*

La imagen de un conjunto $C \subset X$ para una correspondencia ϕ con domino en X y recorrido Y se define como

$$\phi(A) = \cup_{x \in C} \phi(x).$$

Definición 14.7 *Se definen los siguientes dos conceptos de imagen inversa:*

- **Inversa superior, o inversa fuerte**

$$\phi^u(A) = \{x \in X : \phi(x) \subset A\}$$

- **Inversa inferior, o inversa débil**

$$\phi^l(A) = \{x \in X : \phi(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

- *Se cumplen las siguientes relaciones:*

$$\phi^u(A) = \left[\phi^l(A^c)\right]^c \quad \phi^l(A) = [\phi^u(A^c)]^c$$

Entenderemos por entorno de un conjunto A cualquier subconjunto B que contiene un abierto V tal que : $A \subset V \subset B$. Cualquier conjunto abierto V para el que $A \subset V$ es llamado entorno abierto de A.

Definición 14.8 Continuidad de correspondencias

- *Una correspondencia es* **semicontinua superior** *en un punto x si para todo entorno abierto U de $\phi(x)$, la imagen inversa fuerte $\phi^u(U)$ es un entorno de x Diremos que ϕ es Semicontinua Superior, si lo es para todo $x \in X$.*

- *Una correspondencia es* **semicontinua inferior** *en un punto x si para todo entorno abierto U cuya intersección con $\phi(x)$ sea no vacía la imagen inversa débil $\phi^l(U)$ es un entorno de x.*

- *Una correspondencia es* **continua** *si es superior e inferiormente continua.*

Ejemplo 14.9 *Sean $\phi, \psi : [0,1] \to [0,1]$ correspondencias definidas por:*
$$\phi(x) = \begin{cases} \{0\} & si\ x < 1 \\ [0,1] & si\ x = 1 \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} [0,1] & si\ x < 1 \\ \{0\} & si\ x = 1. \end{cases}$$

Puede verificarse que ϕ es semicontinua superior, pero no es semicontinua inferior en el punto $x = 1$. Mientras que ψ es semicontinua inferior, pero no es semicontinua superior en $x = 1$.

La correspondencia $\gamma[0,1] \to [0,1]$ definida por $\gamma(x) = [0,x]$ es continua.

Ejemplo 14.10 *Sea X un conjunto de consumo donde está definida una relación de preferencias $\succeq$, y sea $\phi : X \to 2^X$ la correspondencia que a cada cesta $x \in X$ asigna el conjunto de las cestas que son preferibles a x :*

$$\phi(x) = \{z \in X : z \succeq x\}.$$

Encuentre los conjuntos preimágenes y muestre que el concepto de continuidad definido para correspondencias, coincide con el definido en el capítulo (3) para preferencias.

Diremos que una correspondencia $\phi : X \to Y$ entre espacios topológicos es **cerrada** si $\phi(x)$ es un conjunto cerrado para cada x.

Análogamente a lo ya hecho para funciones puede definirse para correspondencias el concepto de grafo.

Definición 14.11 *Se define como* **grafo** *de la correspondencia* $\phi : X \to Y$ *al conjunto:*

$$G_\phi = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \phi(x)\}.$$

Teorema 14.12 *Una correspondencia cerrada* $\phi : X \to Y$ *con codominio compacto y Hausdorff tiene el grafo cerrado si y solamente si es semicontinua superiormente.*

Demostración Sea ϕ semicontinua superiormente, veamos que en las condiciones del teorema su gráfico es cerrado. Supongamos que las sucesiones $\{x_n\} \in X$ e y_n con $y_n \in \phi(x_n)$ convergen a x e y respectivamente y que la que $y \notin \phi(x)$. Por ser Y espacio de Hausdorff compacto existen entornos abiertos V de y y W de $\phi(x)$ tales que $V \cap W$ es vacío. Por ser ϕ semicontinua superior, se tiene que $U = \phi^u(W)$ es abierto. Por lo tanto $U \times V$ es entorno abierto de (x, y) en $X \times Y$ disjunto de G_ϕ. *Recíprocamente :* Supongamos por contradicción que ϕ no es semicontinua superiormente. Entonces, existen x y V conjunto abierto, tales que $\phi(x) \subset V$, y además para todo entorno U de x existe $x_U \in U$ e $y_U \in \phi(x_U)$ con $y_U \notin V$. Por la compacidad de Y existe una subred de $\{y_U\}$ convergente, supongamos a y. Como $y_U \in V^c$ (que es un subconjunto cerrado) se tiene que $y \in V^c$. Como x_U converge a x por ser G_ϕ cerrado se tiene que: $y \in \phi(x) \subset V$ una contradicción.[]

El siguiente ejemplo muestra que la compacidad es necesaria para obtener la conclusión del teorema.

Ejemplo 14.13 *Sea la correspondencia* $\phi : R \to R$ *definida como:*

$$\phi(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\} & si\ x \neq 0 \\ \{0\} & x = 0. \end{cases}$$

Tiene grafo cerrado pero no es semicontinua superior en $x = 0$.

Los siguientes teoremas permiten en muchos casos una fácil caracterización de la semicontinuidad de las correspondencias en términos de redes. No daremos aquí las demostraciones de dichos teoremas, pero el lector puede encontrarlas en [Aliprantis, C.D.;Border, K. C.]

Teorema 14.14 *Sea* $\phi : X \to Y$ *una correspondencia cerrada entre espacios topológicos siendo* Y *Hausdorff y compacto, sea* $x \in X$ *entonces son equivalentes las siguientes dos afirmaciones:*

1) Si $x_\alpha \to x$ *e* $y_\alpha \in \phi(x_\alpha)$ *para cada* α, *entonces la red* y_α *tiene límite en* $\phi(x)$.

2) La correspondencia ϕ *es semicontinua superior en* x.

Teorema 14.15 *Sea* $\phi : X \to Y$ *una correspondencia entre espacios topológicos, sea* $x \in X$ *entonces son equivalentes las siguientes dos afirmaciones:*

1) Si $x_\alpha \to x$ entonces para cada $y \in \phi(x)$ existe una subred $\{y_{\alpha_\lambda}\}$ con elementos en $\phi(x_\alpha)$ tal que $y_{\alpha_\lambda} \to y$.

2) La correspondencia ϕ es semicontinua inferior en x.

Teoremas de punto fijo

Presentaremos primeramente un resultado simple sobre puntos fijos.

Lema 14.16 *Si A es un conjunto cerrado de un espacio topológico X y una correspondencia $\phi : A \to X$ tiene el grafo cerrado, entonces el conjunto de los puntos fijos de ϕ es cerrado.*

Demostración La demostración se sigue de la observación de que x es un punto fijo para ϕ si y solamente si $(x, x) \in G_\phi$ y del hecho de G_ϕ es cerrado.

La demostración del teorema de existencia del punto fijo, requiere del concepto de *correspondencia hacia adentro.*

Definición 14.17 *Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X. Decimos que una correspondencia $\phi : A \to X$ apunta* **hacia adentro** *(resp.* **hacia afuera** *) si para cada $x \in A$ existe $y \in \phi(x)$ y $\lambda > 0$ (resp $\lambda < 0$) tales que : $x + \lambda(y - x) \in A$.*

Obsérvese que si ϕ *mapea* A en sí mismo entonces es automáticamente, una correspondencia hacia adentro. (Basta elegir $y \in \phi(x)$, y $\lambda = 1$.)

Diremos que una correspondencia tiene valores cerrados y convexos si para cada x, $\phi(x)$ es cerrado y convexo.

Teorema 14.18 *Sea K un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio de Hausdorff, localmente convexo X. Sea $\phi : K \to X$ una correspondencia hacia adentro semicontinua superior con valores cerrados y convexos no vacío. Entonces ϕ tiene un punto fijo.*

Un espacio topológico se dice **localmente convexo** si todo entorno del cero, incluye un entorno convexo del cero. En particular R^n con la topología generada por la métrica Ciertamente es un espacio localmente convexo.

La demostración de este teorema es muy técnica y no la daremos en estas notas. Puede encontrarse en [Aliprantis, C.D.;Border, K. C.]

Teorema 14.19 (Teorema de Kakutani) *Sea K un conjunto compacto, convexo y no vacío de un espacio de Hausdorff localmente convexo. Sea $\phi : K \to K$ una correspondencia cuyo grafo es cerrado convexo y no vacío. Entonces el conjunto de los puntos fijos es compacto y no vacío.*

Demostración: La demostración de este teorema sale inmediatamente del teorema anterior, basta recordar que, para conjuntos compactos de Hausdorff, una correspondencia con gráfico cerrado es semicontinua superior. Por el teorema 14.4 el conjunto de puntos fijos es cerrado y entonces compacto. Para ver que el conjunto de puntos fijos es no vacío basta ver que un mapa ϕ en sí mismo es hacia adentro.

El siguiente teorema es inmediata consecuencia del hecho de que toda función continua es una correspondencia semicontinua superior.

Teorema 14.20 (Teorema de Brouwer) *Sea K un conjunto compacto, convexo y no vacío de un espacio de Hausdorff localmente convexo. Sea $f : K \to K$ una función continua. Entonces el conjunto de los puntos fijos es compacto y no vacío.*

15 Parte II. Introducción

En esta segunda parte introducimos algunos temas relacionados con los trabajos de investigación del autor. Los capítulos correspondientes deberán ser leidos con extremo cuidado, tanto por la dificultad de la matemática utilizada como por lo abstracto de la teoría económica presentada.

El asunto central de este curso es el de le eficiencia paretiana de los equilibrios walrasianos y en general el concepto de asignación de recursos Pareto optimal o Pareto eficiente a la vez que servir de introducción natural a las llamadas economías con infinitos bienes.

En la primera parte discutiremos la existencia y propiedades de los óptimos de Pareto, cuya existencia será demostrada como consecuencia del lema de Zorn. Analizaremos también la posibilidad de definir precios soporte para asignaciones de recursos eficientes en el sentido de Pareto (a las que llamaremos indistintamente alocaciones Pareto optimales), es decir precios que hacen que toda cesta de bienes que sea preferible para un agente a la correspondiente en la asignación eficiente, sea al menos tan costosa como ésta. Nuestra herramienta matemática más importante será el teorema de Hahn- Banach en su versión geométrica, nuestro interés se centra básicamente en la existencia de hiperplanos separadores de conjuntos convexos disjuntos.

La segunda parte la dedicaremos al análisis de la función exceso de utilidad, la que es un instrumento de gran valor cuando pretendemos extender el análisis económico a economías en las que la función demanda no está definida, [Araujo, A. (89)]. Esta función, que tiene propiedades análogas a la de la función exceso de demanda permite probar la existencia del equilibrio wlarasiano con gran generalidad sin abandonar la conocidas técnicas del cálculo diferencial aun cuando trabajamos en modelos de economías con infinitos bienes contingentes. Su desventaja está en que depende fuertemente de las funciones de utilidad y al utilizarla para probar la existencia del equilibrio walrasiano, debemos asegurar primeramente que el conjunto de los óptimos de Pareto es no vacío y que se satisface el primer teorema del bienestar económico. En esta segunda parte utilizaremos herramientas provenientes de la topología diferencial, particularemente el teorema de Poincaré-Hopf, y el teorema de transversalidad. Finalmente a partir de la llamada teorí de las catástrofes avanzaremos en el estudio de las características de las llamadas economías singulares. La utilización de la función exceso de utilidad permite dar un enfoque unificado para economías con finitos como con infintos bienes, no obstante en el marco de estas notas no saldremos del estudio de las primeras. Es esta quizás la parte novedosa de este texto.

16 Existencia del óptimo de Pareto y el lema de Zorn

Consideraremos economías con un número finito de agentes n y bienes l cada agente será representado por la letra $i = 1, 2, ...n$ y cada bien por la letra $j = 1, 2, ..., l$, como habitualmente con el símbolo $\succeq_i$ representaremos las preferencias del agente i. Todos los agentes, a menos que se explicite otra cosa, tendrán el conjunto R^l_+ como espacio de consumo. Las dotaciones iniciales de cada agente estarán representadas por w_i un elemento del espacio de consumo, por lo tanto un vector de R^l_+. De esta forma una economía quedará representada por $\mathcal{E} = \left\{R^l_+, \succeq_i, w_i, i = 1, 2, ..., n\right\}$.

Definición 16.1 *a) Una asignación de recursos o alocación es un vector de R^{ln}_+ la que se dirá* **factible** *si $\sum_{i=1}^n x_i \leq w$, donde $w = \sum_{i=1}^n w_i$.*

b) Una asignación de recursos factible x es **racional** *si $x_i \succeq_i w_i$ para todo i, es decir si para cada agente resulta ser al menos tan buena cuanto su dotación inicial.*

c) Diremos que una asignación de recursos factible x es **Pareto óptima** *si no existe otra asignación factible y tal que $y_i \succeq x_i$ para todo i a la vez que estrictamente preferida para al menos un agente.*

El criterio de Pareto optimalidad es un criterio mínimo de eficiencia, supone la no posibilidad de repartir los recursos de una nueva forma sin perjudicar a alguien, si hacer esto fuera posible implicaría la posibilidad de hacer más feliz a la sociedad en su conjunto aumentando el bienestar de algunos (eventualmente todos) los integrantes de la sociedad sin perjudicar a ninguno. No obstante no es un criterio de justicia social, lejos de esto observe el lector que una sociedad que asigne todos sus recursos a uno de sus integrantes y cero a todos los demás es Pareto eficiente, no obstante parecería no ser muy *justa* en el sentido de la distribución social de la riqueza.

Nuestra afirmación siguiente dice que en economías como la que presentamos al comienzo el conjunto de los óptimos de Pareto es no vacío. Para demostrar esta afirmación nos valdremos del lema de Zorn al que dedicaremos la subsección siguiente. De todas formas [Halmos, R.P.] es una excelente referencia para entender el lema de Zorn sus implicancias y equivalencias así como su ubicación central aunque generalmente oculta en la matemática moderna.

16.1 Lema de Zorn

Una serie de axiomas equivalentes, aparentemente ingenuos y triviales juegan en la matemática moderna un papel central y generalmente oculto, uno de ellos es el lema de Zorn. Cada uno de ellos puede ser demostrado a partir de otro, no obstante alguno debemos aceptar con valor de axioma. En estas notas admitiremos como axioma el llamado **axioma de elección**. Este dice que un producto cartesiano formado por infinitos subconjuntos no vacíos es él mismo no vacío, es decir que es posible *elegir* un elemento en cada uno de los infinitos subconjuntos.

A partir de aceptar el axioma de elección, podemos demostrar aunque no lo haremos en estas notas el lema de Zorn.

Lema 16.2 (Lema de Zorn) *si toda cadena en un conjunto parcialmente ordenado X tiene una cota superior, entonces X tiene un elemento maximal*

Nota 16.3

- *Recordamos que una cadena C en un conjunto X parcialmente ordenado, es un subconjunto totalmente ordenado.*

- *Un conjunto X está* **parcialmente ordenado** *cuando existe un preorden ϕ (ver definición (3.2) que es antisimétrico, esto es si (x, y) e (y, x) pertenecen a ϕ, entonces $y = x$. En términos de preferencias: si cada vez que $x \in X$ es indiferente a $y \in X$ entonces $x = y$. Recordamos que una relación de preferencias es un preorden completo que define un orden en el espacio de clases de indiferencia (es decir una relación binaria completa reflexiva, antisimétrica y transitiva).*

- *Un elemento $x \in X$ es una cota superior (inferior) para $A \subset X$ si no existe $a \in A$ tal que a siga (anteceda) a x según el orden definido en X.*

- *Un elemento $x \in X$ es* **maximal (minimal)** *para X si no existe $y \in X$ sucesor (antecesor) de x en el orden de X*

Si bien nuestro interés se centra en la existencia del óptimo de Pareto que demostraremos a partir del lema de Zorn indiquemos el siguiente resultado de valor en Teoría Económica:

Diremos que una relación binaria S en X es una **extensión compatible** de una relación binaria R si considerados como subconjuntos de $X \times X$, R es subconjunto de S y la parte asimétrica de R es subconjunto de la parte asimétrica de S.

Teorema *Una relación binaria, irreflexiva y transitiva, tiene una extensión total, irreflexiva y transitiva compatible.*

- Decimos que una relación binaria ϕ es irreflexiva si $(x, x) \notin \phi$

El valor de esta afirmación desde el punto de vista de la economía está en que si recordamos la definición (4.1), una relación de preferencias define un orden total en el espacio de las clases de indiferencia, si de esta relación eliminamos los elementos del tipo (x, x) obtendremos una una relación binaria irreflexiva, (es decir una relación de preferencias estricta $\succ$), podemos concluir en que aunque un agente sea capaz de ordenar solamente una parte de su espacio de bienes es posible extender el orden definido por las preferencias del agente a todo el conjunto de cestas posibles. Notemos que es un supuesto fuerte el que considera a cada agente capaz de ordenar todas sus posibles elecciones, este teorema permite debilitar el supuesto original, aunque introduciendo cierta arbitrariedad en el conjunto de cestas que el agente no es capaz de ordenar.

16.2 Existencia del óptimo de Pareto

El teorema de existencia que aquí vamos a probar para economías como las indicadas en la primera parte de estas notas, vale en casos más generales, particularmente para aquellas economías cuyos espacios de consumo son espacios de Riesz, con intervalos del tipo $[0, w]$ compactos en alguna topología de Hausdorff, la demostración de la existencia del óptimo de Pareto es para estos casos totalmente análoga que la que aquí desarrollaremos para un modelo más restringido.

El concepto de espacio cociente será necesario para la demostración del siguiente teorema. Recordamos que una relación de equivalencia particiona al conjunto en el que está definida en clases de equivalencia, (ver sección (3.3)). Llamaremos **espacio cociente** al espacio conformado por dichas clases. Cualquier elemento de una clase puede ser considerado como representante de la misma, en el sentido de que todos los de su clase y solamente estos estarán relacionados con él a través de la realción de equivalencia considerada. En el caso del teorema de existencia del óptimo de Pareto, particionaremos el conjunto de asignaciónes factibles mendiante la relación de indiferencia.

Teorema 16.4 (Existencia del óptimo de Pareto) *Para toda economía de intercambio puro, existe una alocación Pareto optimal que es individualmente racional.*

Demostración: Sea A el conjunto de todas las asignaciones factibles, notemos como

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in A : x_i \succeq_i w_i \; para \; cada \; i\}.$$

Consideremos el espacio de las clases de indiferencia $\mathcal{H}/\sim$ (o espacio cociente) quedando dos elementos x e y de $\mathcal{H}$ en la misma clase si $x_i \sim_i y_i$ (es decir si $x_i \succeq_i y_i$ y además $y_i \succeq_i x_i$) para cada i. Definiendo como $x \geq y$ dos elementos de $\mathcal{H}/\sim$ cada vez que $x_i \succeq_i y_i$ para cada i, tendremos un orden parcial en dicho espacio de clases. Es claro que el conjunto de los Pareto óptimos coincide con la clase de los maximales del espacio cociente. Si probamos que cada cadena en este espacio tiene una cota superior en H, usando el lema de Zorn podemos la existencia de un maximal en el espacio cociente, es decir que el conjunto de cotas superiores en H es no vacío.

Para probar la existencia de una cota superior para cada cadena C en $\mathcal{H}/\sim$ basta con considerar a C como una red, como H es compacto, existe un punto límite c para una subsucesión de elementos en la red, sin dificultad se ve que este elemento es una cota superior para C **.**[]

Observemos que la misma prueba vale en cualquier espacio topológico de Hausdorff, en el que se pueda afirmar la existencia de subredes convergentes en toda red del espacio, particularmente vale en espacios de Riesz con intervalos compactos y topologías de Hausdorff. lo que nos permite extender el teorema de existencia a un conjunto de modelos de economías más amplio que el aquí considerado.

17 El óptimo de Pareto y el bienestar económico

Esta sección está destinada a los llamados teoremas del bienestar económico, dichos teoremas relacionan el concepto de equilibrio walrasiano y el concepto de optimalidad en el sentido de Pareto.

Comenzaremos con un teorema que afirma que toda asignación de recursos en equilibrio walrasiano, satisface las propiedades de eficiencia paretiana. Este es conocido como el primer teorema del bienestar. Su única exigencia es la de que cada agente tenga preferencias continuas y localmente no saciables, este último supuesto es a los efectos de que se satisfaga la ley de Walras necesaria para la prueba del teorema.

Teorema 17.1 (Primer teorema del bienestar) *Para economías con agentes cuyas preferencias son continuas y localmente no saciables, toda asignación de recursos que forma parte de un equilibrio walrasianos es un óptimo de Pareto.*

Demostración: Sea x una asignación de recursos de un equilibrio walrasiano. Supongamos que no es óptimo de Pareto, es decir que existe otra alocación factible y tal que $y_i \succeq_i x_i$ para todo i y además con preferencia estricta para al menos un agente, sea este representado por $h \in \{1,2,...,n\}$. Siendo las preferencias localmente no saciables, se verifica que $p\sum_{i=1}^{n} y_i = p\sum_{i=1}^{n} x_i = p\sum_{i=1}^{n} w_i$. donde w_i representa las dotaciones iniciales del agente i. Dado que x_h verifica el programa de optimización del agente h, siendo $y_h \succ x_h$ debe verificarse que $py_h > pw_h$. Luego por ser p un elemento del interior de R_+^l debe existir al menos un agente $k \in \{1,2,...,n\}$ para el que a precios p se verifique la estricta desigualdad, $py_k < pw_k$. Por lo tanto y_k pertenece al interior de la región presupuestaria del agente k, por ser las preferencias localmente no saciables, existe z_k presupuestariamente factible para el agente k, tal que z_k es estrictamente preferible a y_k y por lo tanto a x_k, esto junto al hecho de ser z_k presupuestariamente factible, contradice el hecho de ser x_k la solución del programa optimizador del agente k . []

La siguiente pregunta aparece naturalmente, *¿ será posible construir a partir de alguna redistribución de los recursos, un equilibrio walrasiano cuya asignación de recursos sea coincidente con cualquier alocación Pareto eficiente?* Es decir dada una asignación y Pareto eficiente, ¿ será posible encontrar un sistema de precios p tal que el par (y,p) sea un equilibrio walrasiano? O bien más concretamente ¿ existe un recíproco para el teorema que acabamos de demostrar? El respuesta es que existe pero *sólo parcialmente.* Requeriremos para la demostración de este recíproco, conocido como segundo teorema del bienestar, hipótesis más restrictivas que las contenidas en el anterior teorema, particularmente precisaremos de la convexidad de las preferencias, y aun así veremos que no es tan fácil extenderlo a tipos más generales de economías.

El contenido en el fondo de este segundo teorema puede interpretarse por la pregunta de si es posible para un planificador central hacer que la sociedad se ubique en uno cualquiera de los óptimos de Pareto, de manera tal que le permita al planificador elegir por ejemplo equilibrios eficientes y con algún criterio adicional de justicia, a cambio de una redistribución de los recursos iniciales. Ciertamente esta posibilidad es solamente teórica, pues requeriría del planificador el conocimiento de las preferencias de todos y cada uno de las agentes económicos. Veremos el teorema que justifica esta posibilidad teórica, pero también veremos que existen limitaciones en los modelos las que no permiten que esto sea una verdad universal..

Para resolver esta importante interrogante de la Teoría Económica, necesitaremos de un importante instrumental matemático que desarrolaremos en la siguiente subsección.

17.1 El segundo teorema del bienestar y el teorema de Hahn-Banach

El teorema de Hahn-Banach del que haremos aquí importante utilización no lo demostraremos por entender que no es este el lugar adecuado, una referencia interesante es [Schaffer, H.H] cuya lectura recomendamos fuertemente pero requiere de cierta preparación matemática. No obstante daremos alguna idea sobre la prueba y demostraremos algunos corolarios del referido teorema que son de gran utilidad para nuestros objetivos. Discutiremos también las hipótesis del teorema y su cumplimiento o incumplimiento en economía.

Nuestro interés en el teorema de Hahn-Banach, radica en el hecho de que es un teorema de separación, afirma como veremos que dados dos conjuntos convexos A con interior no vacío y $B \neq \emptyset$ que no intersecta al interior de A, pueden *separarse* por un funcional lineal de manera tal que en los elementos de A el funcional tome por ejemplo, valores positivos y en los de B negativos. Como todo funcional, éste puede ser interpretado como un precio ver subsección (13.1), y en este caso tal que hace que cestas de bienes preferibles a las respectivas de un cierto óptimo de Pareto, las que estarán, por ser las preferencias convexas ubicadas en un conjunto convexo como el A, sean mas costosas que el óptimo así, si podemos redistribuir los recursos de la sociedad de forma tal que el óptimo en cuestión resulte presupuestariamente factible para cada uno de los agentes, el funcional cuya existencia el teorema de Hahn-Banach asegura y el óptimo de Pareto que sabemos existe por el Lema de Zorn conforman un equilibrio walrasiano con transferencias.

Daremos a continuación la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach la que muchas veces es llamada como teorema de Mazur.

Teorema 17.2 (Teorema de Hahn-Banach) *Sean E un espacio vectorial topológico, M una variedad afín en E y sea A un conjunto convexo no vacío, abierto de E que no intersecta a M. Entonces existe un hiperplano en E que contiene a M y no intersecta a A.*

Definición 17.3 *Siendo E un espacio vectorial definimos como:*

- **Variedad afín** *es un subconjunto de E que es una traslación de un subespacio M, es decir es un subconjunto F cuya forma es $\{x_0 + M\}$ para algún $x_0 \in E$.*

- **Hiperplano** *Es una variedad afín cuya codimensión es 1. Entendiendo como codimensión la cantidad de elementos del espacio E necesarios para completar la dimensión del espacio. Equivalentemente, un subconjunto $H \in E$ es un hiperplano si y solamente si existe un funcional f y un real α tal que:*

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

- *Un hiperplano H es llamado* **hiperplano soporte** *de un conjunto A si $A \cap H \neq \emptyset$ y si A está contenido en uno de los subespacios cerrados*

$$H_1 = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}\,, \ o\ H_2 = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$$

- *Diremos que los conjuntos A y B de E están separados por H si A está incluído en H_1 y B en H_2.*

Ejemplo 17.4 *Sea $A = \{x \in R^2_+ : \ x_2x_1 \geq 1\}$ el conjunto*

$$H = \{x \in R^2_+ : \ x_2 + 9x_1 = 6\}$$

es un hiperplano soporte para A. en efecto:

- $A \cap H = (\frac{1}{3}, 3)$.

- *El funcional lineal f queda representado por el vector $(1, 9)$ y $\alpha = 6$. (Recuérdese que en R^n todo funcional lineal es representado por un vector del mismo espacio).*

Obsérvese que si (x_1^*, x_2^*) es tal que $x_2^*x_1^* > 1$, entonces $x_1^* + x_2^* > 6$, luego $A \subset H_1$[]

El siguiente teorema de separación es consecuencia directa del teorema de Hahn-Banach.

Teorema 17.5 (de separación)*Sea A un subconjunto convexo en el espacio vectorial topológico E, con interior no vacío. Sea B un conjunto convexo no vacío en E sin puntos comunes con el interior de A. Entonces existe un hiperplano H que separa A de B, si además A y B son abiertos entonces H los separa estrictamente.*

Demostración: Siendo el interior de A al que denotaremos como A^0 convexo, también lo será $A^0 - B$; $\{0\}$ es un subespacio disjunto del conjunto convexo $A^0 - B$. Luego por el teorema de Hahn-Banach, existe $H_0 = \{x \in E : f(x) = 0\}$ disjunto con $A^0 - B$. Cambiando el signo si fuera necesario, se concluye con que $f(A^0 - B) > 0$. Sea $\alpha = \inf f(A^0)$, $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ separa A^0 y B pues $A \subseteq H_1$ mientras que $B \subseteq H_2$ **.**[]

Si bien no de nuestra atención inmediata el siguiente corolario es de gran utilidad en Teoría Económica y por ese motivo lo enunciamos aquí, por otra parte el lector puede demostrarlo como una aplicación directa del teorema de separación.

Corolario 17.6 *En un espacio vectorial topológico localmente convexo, la clausura de un conjunto convexo es la intersección de todos los semiespacios que lo contienen.*

Nota 17.7 *Un espacio vectorial topológico es* **localmente convexo** *si todo entorno del cero contiene un entorno convexo de cero. Obsérvese que el hecho de contener cada entorno del cero un entorno convexo, en un espacio vectorial topológico hace que cada entorno de cada punto del espacio goce de la misma propiedad.*

Recordamos que la calusura de un conjunto es la unión de los puntos del interior y de la frontera del cojunto.

La importancia de este corolario radica en que muestra que para un espacio vectorial topológico con topologías cuyos espacios duales sean los mismos, los conjuntos convexos cerrados y acotados con interior no vacío serán los mismos. Luego el conjunto de las cestas individualmente racionales, bajo el supuesto de que su interior es no vacío por ejemplo, no varía si se cambia la topología del espacio, siempre que se mantengan los mismos funcionales lineales y continuos y naturalmente bajo el supuesto de preferencias convexas.

Observemos que si bien en espacios vectoriales con como R^l con una topología de Hausdorff, es cierto que conjuntos convexos como el cono positivo R^l_+, son de interior no vacío no es cierto que esto se mantenga en otros espacios, (caso los llamados espacos L^p para $1 \leq p \leq \infty$), esta carencia de interior no permite aplicar el teorema de Hahn-Banach para definir precios soporte.

Consideraremos ahora el segundo teorema del bienestar.

Teorema 17.8 (Segundo teorema del bienestar) *Para economías con agentes cuyas preferencias son continuas, estrictamente crecientes y convexas con dotaciones iniciales $w_i \in R^l_+ - \{0\}$, se cumple que si $\bar{x}$ es un óptimo de Pareto entonces existe p estrictamente positivo, tal que el par $(\bar{x}, p)$ es bajo una determinada redistribución de las dotaciones iniciales un equilibrio walrasiano.*

Obsérvese que en el primer teorema del bienestar solamente requerimos preferencias continuas y localmente no saciables, aquí pedimos que además sean estrictamente crecientes y convexas. El supuesto de convexidad es inevitable, no obstante el supuesto de ser crecientes estrictamente puede cambiarse por el supuesto más débil de existir una cesta de bienes estrictamente deseable.

Demostración: Sean los conjuntos convexos:

$$A = \left\{ z \in R^l_+,\ z = \sum_{i=1}^{n} z_i,\ z_i \succeq_i \bar{x}_i \forall i;\ y\ z_k \succ_k \bar{x_k}\ para\, al\ menos\ un\ k \in \{1, 2, ...n\} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in R^l_+,\ x = \sum_{i=1}^{n} w_i \right\}$$

Como puede comprobarse ambos conjuntos son convexos y disjuntos, el teorema de separación asegura la existencia de un hiperplano soporte para A, es decir que existe un funcional f tal que $f(z) \geq f(x)$ para todo $z \in A$ y para todo $x \in B$.

Recordamos que en R^l_+ todo funcional puede ser representado por un elemento p del propio espacio tal que su producto interno $pz = f(z)$ (ver sección 13.1). Por lo tanto se tiene que $pz \geq px$ para todo $z \in A$ y para todo $x \in B$.

Si conseguimos probar que el funcional es estrictamente positivo, en el sentido de que $f(y) > 0$ para todo $y \neq 0, \in R^l_+$ habremos probado que p su representante, puede ser interpretado como un precio. Recurriremos para probar que $p \gg 0$ a la hipótesis de preferencias estrictamente crecientes. Considere $z' = \sum_{i=1}^n \bar{x_i'}$ donde $\bar{x_i'} = \bar{x}_i$ para todo $i \neq k$ y $\bar{x_k'} = \bar{x_k} + e_j$ donde $e_j \in R^l_+$ con ceros en todas sus coordenadas distinta de la j-ésima, a la cual le asignamos el valor 1. Por la estricta monotonía de las preferencias se cumple que $z' \in A$ y $\bar{x} \in B$, por lo tanto $pz' \geq p\bar{x},'$ luego $p_j > 0$. Como j es arbitrario esto vale para toda coordenada de p.

Podemos afirmar además que el vector p es un soporte para $\bar{x}$, es decir cada vez que para algún i se verifique que: exista una cesta de bienes x_i' tal que $x_i' \succeq_i \bar{x}_i$ entonces $px_i' \geq px_i$. Efectivamente, por las propiedades de p se verifica que $p\left(x_i' + \sum_{h \neq i} \bar{x}_i\right) \geq p\left(\bar{x}_i + \sum_{h \neq i} \bar{x}_i\right)$. Luego $px_i' \geq p\bar{x}_i$.

Probamos entonces que p es un sistema de precios soporte para $\bar{x}$, debemos probar ahora que efectivamente bajo una determinada redistribución del ingreso (dotaciones iniciales), el par $(\bar{x}, p)$ es un equilibrio walrasiano.

Consideremos dotaciones iniciales $\bar{w}_i$ tales que aseguren para cada agente, niveles de riqueza $p\bar{w}_i = p\bar{x}_i$, las que pueden lograrse con transferencia de riqueza entre los agentes de la economía. De esta forma para la economía $\mathcal{E} = \{\succeq_i, \bar{w}_i, i = 1, 2, ..., n\}$, se tiene que si $x_i \succ_i \bar{x}_i$ entonces $px_i \geq p\bar{w}_i$. Para que el par $(\bar{x}_i, p)$ sea un equilibrio walrasiano hace falta probar la estricta desigualdad. Comencemos para esto observando el hecho de que por ser p un vector con coordenadas estrictamente positivas y $\bar{x}_i$ no nulo, (esto último queda asegurado desde que consideremos que cada agente tiene dotaciones iniciales no nulas) existe una cesta de bienes x_i'' para cada agente, tal que $px_i'' < p\bar{x_i'} = p\bar{w}_i$. Supongamos ahora que $px_i = pw_i$ y consideremos la combinación convexa $y_i = \alpha x_i + (1-\alpha)x_i''$, a partir de la continuidad de las preferencias podemos concluir que si α es próximo a 1, entonces $y_i \succ_i \bar{x}_i$. Por otra parte se verifica que $py_i \leq p\bar{w}_i$ con lo cual se niega la optimalidad de $\bar{x}_i$, pues y_i le gusta a i más que $\bar{x}_i$, y le cuesta menos. .[]

La existencia de espacios para los que existen conjuntos convexos con interior vacío invalidan la aplicación del teorema de Hahn-Banach para encontrar precios soportes. En estos casos se hace necesario la introducción de nuevos supuestos en las preferencias de los agentes. El concepto de *properness* introducido en [Mas-Colell, A. 1986] ha sido de gran utilidad en la teoría económica.

17.2 La optimalidad de Pareto y las condiciones de primer orden.

En esta sección analizaremos la relación entre el concepto de Pareto optimalidad y la maximización de una cierta función de bienestar social. Veremos que existe una relación estrecha entre cada óptimo de Pareto y la ponderación o peso social de cada agente económico, de forma tal que según sea la *importancia social* asignada a los distintos agentes serán los posibles óptimos de

Pareto correspondientes a esa sociedad. automáticamente a cada asignación de recursos que sea un optimo de Pareto factible, corresponde una determinada ponderación social del conjunto de agentes.

Nota 17.9 *Comenzaremos señalando que para economías con n agentes cuyas preferencias son estrictamente monótonas (definición (11.2)), y están representadas por utilidades convexas, dos veces continuamente diferenciables, el problema de identificar los óptimos de Pareto puede reducirse al de la elección de asignaciones de recursos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, donde cada $x_i \in R^l_+$, que resuelvan el siguiente problema:*

$$\begin{array}{rll} Max & u_1(x_{11}, ..., x_{1l}) & . \\ s.a: 1) & u_i(x_{i1}, ..., x_{il}) \geq \bar{u}_i & i = 2, ..., n. \\ 2) & \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq \sum_{i=1}^n w_{ij} & j = 1, ...l \end{array} \tag{3}$$

Al modificar los niveles mínimos de utilidad $\bar{u}_i$ requeridos obtenemos todos los posibles óptimos de la economía. Esta solución hace fuertemente uso de que preferencias recíprocamente monótonas se representan por utilidades recíprocamente crecientes, lo que supone que cada derivada parcial es estrictamente positiva, esto es que el gradiente

$$\nabla u_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right) \gg 0, \ \forall i.$$

Las condiciones de primer orden (Kuhn-Tucker) para este problema son para todo i, j :

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(x_i(\lambda))}{\partial x_{ij}} - \gamma_j = \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \\ = 0, \ si \ x_{ij}(\lambda) > 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

Nota 17.10 *La llamada condición de Inada sobre las utilidades (derivada infinita en la frontera de R^l_+, así como la condición (neoclásica, página 39, vol1), todo punto en el interior es preferible a cualquier punto en la frontera, son suficientes cada una de por sí, para asegurar la igualdad a cero en la ecuación anterior.*

Considere ahora la siguiente función de bienestar social: $W_\lambda : R^{ln}_+ \to R$

$$W_\lambda(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(x_i). \tag{5}$$

Donde u_i son las funciones de utilidad de cada agente, mientras que

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Delta_+ = \left\{ \lambda \in R^n_{++} : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Cada λ_i representa el peso del agente i en la economía.

Puede comprobarse que si $x^* \in R_+^{nl}$ resuelve el problema de maximización de $W_\lambda(x)$ restringido a ser x una asignación de recursos factible, es decir tal que $x \in \mathcal{F} = \left\{x \in R_+^{nl} : \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n w_i\right\}$ entonces x^* es un óptimo de Pareto. Para verificarlo basta ver que las condiciones de primer orden de este problema son las mismas que las usadas anteriormente para definir el concepto de óptimo paretiano. Recíprocamente puede verse que se una asignación de recursos factible x^* es óptimo de Pareto, entonces existe $\lambda' \in \Delta$, donde

$$\Delta = \left\{\lambda \in R_+^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right\},$$

tal que para λ', x^* maximiza la función $W_{\lambda'}(x)$ restringido a las asignaciones factibles. Obsérvese que si queremos considerar todos los óptimos de Pareto posibles, no podemos evitar el caso de algún λ_i nulo. El caso en que $\lambda_j = 0$ el agente j quedaría fuera de la economía, como nuestro interés se centrará en aquellas asignaciones de recursos que permitan la participación de todos los agentes de la economía nos restringiremos a elegir solamente entre aquellos óptimos de Pareto que suponen $\lambda \in \Delta_\epsilon$, donde

$$\Delta_\epsilon = \{\lambda \in \Delta : \lambda_i \geq \epsilon > 0 \ \forall i\}.$$

Esto no supone pérdida de generalidad debido a que suponemos que cada agente tiene dotaciones iniciales en $R_+^l - \{0\}$ y sus utilidades son monótonas crecientes, por lo tanto en el momento de decidirse por una cesta de bienes no elegirán la cesta nula la cual representa una utilidad menor que la representada por sus dotaciones iniciales.

A partir del primer teorema del bienestar sabemos que todo equilibrio walrasiano es óptimo de Pareto. Nuestro siguiente paso será entonces elegir dentro del conjunto de óptimos de Pareto aquellos x^*, que puedan ser soportados por un sistema de precios p tales que para todo agente se cumple que $px_i^* = pw_i, \ \forall i = 1, 2, ..., n$. Dada la correspondencia biunívoca existente entre óptimos de Pareto y aquellos $\lambda \in \Delta_\epsilon$ haremos la elección de nuestros óptimos indirectamente, es decir elegiremos valores adecuados $\bar{\lambda} \in \Delta_\epsilon$, de forma tal que aquellas asignaciones de recursos que maximicen $W_{\bar{\lambda}}(x)$ restringida a la región factible $\mathcal{F}$, sean los que tengan la propiedad exigida sobre los precios soporte. Para esto definiremos, en la subsección siguiente la llamada función de exceso de utilidad.

18 La función exceso de utilidad y el equilibrio

El método que daremos a continuación para encontrar equilibrios walrasianos presenta ventajas y desventajas sobre el método definido en la parte 1 que utiliza la función exceso de demanda.

La ventaja más clara es cuando no es posible definir la función exceso de demanda, esto sucede generalmente cuando trabajamos con economías cuyos espacios de bienes están modelados en espacios de dimensión infinita. Por otra parte presenta ventajas cuando el número de agentes es apreciablemente menor que el número de bienes, obviamente en el caso de economías con infinitos bienes y un número finito de consumidores, en este caso la utilización de este método nos permite trabajar con un conjunto de finito de ecuaciones a pesar de la infinitud del problema de la asignación óptima de bienes subyacente. Sus desventajas radican en su dependencia fuerte de las funciones de utilidad, lo que puede depender la resolución de problemas concretos por la complejidad de las cuentas a realizar, y además su posible utilización depende fuertemente de la existencia de óptimo de Pareto y de la satisfacción del primer teorema del bienestar.

El origen de la llamada función exceso de utilidad como instrumento para obtener equilibrios walrasianos se remonta a [Karatzas, I; Lakner, P; Lebocky, J.; Shreve, S.] aunque es Negishi quien presenta el método de manera natural en la teoría económica ver [Negishi, T.], la mayor difusión es debida a los trabajos de Mas-Colell. particularmente [Mas-Colell, A.], también puede verse un ejemplo de su utilización para extender a economías infinitas las técnicas del cálculo diferencial en [Accinelli, E.(99)].

Definición 18.1 *Sea* $e_i : \Delta_\epsilon \to R, i = 1, 2, ..., n$ *la función*

$$e_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial u_i(x_i(\lambda))}{\partial x_{ij}} \left(x_{ij}(\lambda) - w_{ij}\right). \tag{6}$$

donde w_{ij} *representa la dotación inicial del agente* i *en el bien* j, *y* $x_i(\lambda)$ *es la cesta proveniente de la asignación de recursos* $x(\lambda)$ *que maximiza* $W_\lambda(x)$ *en* $\mathcal{F}$, *con* $i = 1, 2, ..., n$ *y* $j = 1, 2, ..., l$. *Llamaremos* **función exceso de utilidad** *a la función* $e : \Delta_\epsilon \to R^n$ *que define al vector de* R^n : $e(\lambda) = (e_1(\lambda), e_2(\lambda), ..., e_n(\lambda))$.

Bajo las hipótesis consideradas en este trabajo que hacen que las condiciones de primer orden que definen al óptimo de Pareto se cumplan con igualdad, (ver nota en subsección 17.2) es posible sustituir $\frac{\partial u_i(x_i(\lambda))}{\partial x_{ij}}$ por el correspondiente multiplicador de Lagrange $\gamma_j(\lambda)$ dividido por el peso social λ_i del i-ésimo agente, ver ecuación (4.) De esta manera sustituyendo en la ecuación (6), obtenemos:

$$e_i(\lambda) = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{l} \gamma_j(\lambda) \left(x_{ij}(\lambda) - w_{ij}\right). \tag{7}$$

Definición 18.2 *Consideremos el conjunto de los que llamaremos* **Pesos Sociales de Equilibrio**

$$\mathcal{E}q = \{\lambda \in \Delta_\epsilon : e(\lambda) = 0\}$$

Podemos entonces enunciar el siguiente teorema:

Teorema 18.3 *Para economías en que las condiciones de primer orden verificadas por los óptimos de Pareto (4) se satisfacen con igualdad, el par* $(\gamma(\bar{\lambda}), x^*(\bar{\lambda}))$ *conforma, para todo* $\bar{\lambda} \in \mathcal{E}q$ *un equilibrio Análogamente y recíprocamente, para todo par* (p, x) *que sea un equilibrio Análogamente existe* $\lambda \in \mathcal{E}$ *tal que* x *maximiza* W_λ *restringido a las asignaciones factibles, y* $\gamma(\lambda) = p$*. Siendo* $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), ..., \gamma_l(\lambda))$ *donde* $\gamma_j(\lambda)$ *son los correspondientes multiplicadores de Lagrange de las ecuaciones 4.*

Demostración: A cargo del lector.

Nuestro siguiente paso es demostrar que el conjunto $\mathcal{E}q$ es no vacío. Estudiaremos en la subsección siguiente algunas propiedades de la función exceso de utilidad en base a las cuales podremos demostrar que $\mathcal{E}q \neq \emptyset$.

18.1 El teorema de la función implícita y la función exceso de utilidad

Comenzaremos esta sección con una formulación clásica del teorema de la función implícita, por su importancia en el contexto de estas notas y en contextos más generales daremos más adelante otra formulación dependiente del concepto de transversalidad. El Teorema de la función implícita, tiene en economía un importante papel, precisamente es a partir de él que podemos concluir en la existencia de relaciones funcionales entre diferentes tipos de variables económicas y obtener condiciones que posibilitan explicar la economía en su conjunto a partir de algunas de sus variables.. En esta sección aplicaremos el teorema al sistema de ecuaciones de primer orden definido para la función de bienestar social (5), lo que nos permitirá mostrar que la relación que a cada λ asigna la distribución de bienes Pareto optimal $x = x(\lambda)$ es continua, derivable y localmente única. En esta sección supondremos que las utilidades son funciones con derivadas segundas continuas en todas sus variables..

Consideremos un conjunto de N ecuaciones dependientes de N variables *endógenas* $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ y M parámetros, $q = (q_1, q_2, ..., q_M)$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, ..., x_N, q_1, q_2, ..., q_M) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad &\;\vdots \\ f_N(x_1, x_2, ..., x_N, q_1, q_2, ..., q_M) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

El dominio de las variables endógenas es $A \subseteq R^N$ y el dominio de parámetros es $B \subseteq R^M$, consideraremos A y B conjuntos abiertos. Sean $\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, ..., \bar{x_N})$ y $\bar{q} = (\bar{q_1}, \bar{q_2}, ..., \bar{q_M})$ tales que $f_i(\bar{x}, \bar{q}) = 0$ para todo i. Estamos interesados en encontrar una función $\eta : R^M \to R^N$, definida localmente, alrededor de $\bar{q}$, es decir en un entorno $U_{\bar{q}}$ de $\bar{q}$ tal que tome valores en un entorno $V_{\bar{x}}$ de $\bar{x}$. y tal que $\eta(\bar{q}) = \bar{x}$.

Definición 18.4 *Supongamos que $\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, ..., \bar{x_N}) \in A$ y $\bar{q} = (\bar{q_1}, \bar{q_2}, ..., \bar{q_M}) \in B$ resuelven el sistema de ecuaciones (8). Decimos que existe una* **solución local** *de (8) en $(\bar{x}, \bar{q})$ si existen entornos $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$ de $\bar{x}$ y $\bar{q}$, respectivamente y N funciones unívocamente, implícitamente determinadas de $B' \to A$ tales que*

$$f_i(\eta_1(q), \eta_2(q), ..., \eta_N(q), q) = 0 \quad \forall q B' \text{ y } \forall i.$$

con

$$\eta_i(\bar{q}) = \bar{x}_i, \ \ \forall i.$$

Como se muestra a continuación el teorema de la función implícita da una condición suficiente para la existencia de relaciones funcionales *implícitamente determinadas* entre las diferentes variables.

Teorema 18.5 (Teorema de la función implícita I) *Supongamos que toda función $f_i(.)$ es continuamente diferenciable con respecto a las $N + M$ variables y sea $(\bar{x}, \bar{q})$ una solución del sistema (8). Si el Jacobiano del sistema (8) con respecto a las variables endógenas, evaluado en $(\bar{x}, \bar{q})$ es no singular esto es, si :*

$$detJ_x f(\bar{x}, \bar{q}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x},\bar{q})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{x},\bar{q})}{\partial x_N} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_N(\bar{x},\bar{q})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N(\bar{x},\bar{q})}{\partial x_N} \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces el sistema puede ser localmente resuelto en $(\bar{x}, \bar{q})$ por un conjunto de funciones implícitas $\eta_i : B' \to A', \ i = 1, 2, ..., N$ continuamente diferenciables. Más aún la matriz de derivadas de η evaluada en $\bar{q}$ queda definida por:

$$D_q \eta(\bar{q}) = -[D_x f(\bar{x}, \bar{q})]^{-1} D_q f(\bar{x}, \bar{q}).$$

Demostración: La demostración la daremos más adelante y la presentaremos como corolario del teorema de la función inversa.

Definición 18.6 *Dados los conjuntos abiertos $A \subseteq R^N$ y $B \subseteq R^M$ el sistema de ecuaciones continuamente diferenciables, $f(\cdot, \hat{q}) = 0$ definido en A es* **regular** *en $\hat{q} \in B$ si para toda solución $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}, \hat{q}) = 0$ implica que $|D_x f(\bar{x}, \bar{q})| \neq 0$.*

Nuestro interés se centra ahora en analizar la relación de dependencia funcional que se establece a través del sistema (4) que representa a las condiciones de primer orden. Bajo condiciones que aseguren que cada agente maximiza en el interior de R^l_{++} (condiciones de Inada, o condiciones que aseguren que el agente prefiere cualquier punto en el interior a un punto en la frontera) la igualdad a cero se establece en (4) . Para completar las condiciones de existencia de la función implícita la estricta concavidad de las funciones de utilidad es suficiente, no obstante como veremos hay condiciones más generales que nos dejan en las condiciones del teorema. Consideremos el lagrangiano del programa de optimización definido por la maximización de la función de bienestar social (5) restringido a la región $\mathcal{F}$. Este puede escribirse como:

$$\Phi(x(\lambda), \gamma(\lambda), \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i(\lambda) + \gamma \sum_{i=1}^{n} (x_i(\lambda, t) - w_i(t)). \tag{9}$$

Escribamos las ecuaciones de primer orden como:

$$\Phi_x(x(\lambda), \gamma(\lambda), \lambda) = 0 \tag{10}$$

$$\Phi_\gamma(x(\lambda), \gamma(\lambda), \lambda) = 0 \tag{11}$$

Aquí Φ_x representa una matriz cuya i-ésima fila está formada por el gradiente de la función $u_i(x_i)$, de esta manera Φ_x es una matriz cuyas entradas son: $a_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ij}}$. unívocamente Φ_γ. Para poder aplicar el i teorema de la función implícita es necesario que la matriz

$$H = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{x\gamma} \\ \Phi_{\gamma x} & 0 \end{bmatrix}$$

sea invertible. La matriz H posee esta propiedad por ejemplo en el caso en que: Φ_{xx} es definida negativa en $\{z \in R^l : \Phi_{\gamma x} z = 0\}$ ver [Mas-Colell, A. Whinston, M.]. La estricta concavidad de las funciones de utilidad asegura esto, no obstante la condición puede cumplirse en casos en que las utilidades i sean cuasi-cóncavas sin ser cóncavas. Recordamos que una función de utilidad cuasi-cóncava representa una preferencia convexa y , ver teorema (10.3) y ésta es la condición más general que le pedimos a una relación de preferencia en el marco de estas notas. Por otra parte la estricta cuasi-concavidad de las funciones implicadas en un programa de optimización asegura que se cumplan las condiciones suficientes de maximización, (condición de Arrow-Enthoven) [Takayama, A.]. Por lo que estaríamos en condiciones de obtener la relación de dependencia funcional entre las variables que representan a las cestas de bienes Pareto optimales y los pesos sociales buscada, en condiciones bastante generales dentro de las habituales en la teoría del equilibrio general cuando se utilizan herramientas provenientes del Análisis Diferencial.

Como H invertible, el teorema de la función implícita asegura la existencia de funciones diferenciables $x_i : A' \to R^l$ y $\gamma_j : A' \to R^l$ donde las derivadas de cada x_i y γ_j con respecto a λ_j $i = \{1, 2, ..., n\},\ j = \{1, 2, ..., l\}$ se pueden escribir a partir del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{x\gamma} \\ \Phi_{\gamma x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\lambda)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial \gamma(\lambda)}{\partial \lambda_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{x\lambda_k} \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Siendo H una matriz invertible, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x(\lambda)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial \gamma(\lambda)}{\partial \lambda_k} \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_{x\lambda_k} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Se representa como Φ_{xx} a la matriz de derivadas segundas de Φ con respecto a las variables x_{ij}.

$$\Phi_{xx} = \begin{bmatrix} \Phi^1_{xx} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi^2_{xx} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi^n_{xx} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Donde $\Phi^i_{xx} = \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_{ij} \partial x_{ik}} \right\}$.

Mientras que $\Phi_{\gamma x}$ representa la matriz compuesta por $m_{ij} = \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial x_{ij}}$. y $\frac{\partial x}{\partial \lambda_k}$ representa la matriz cuya i-ésima columna es el vector de coordenadas $\frac{\partial x_{ij}}{\partial \lambda_i},\ j = \{1, 2, ...n\}$

De esta manera concluimos en que es posible establecer a partir de $x(\lambda)$ solución del problema de maximizar la función de bienestar social en la región $\mathcal{F}$ una relación funcional derivable $x : \Delta \to R^{ln}$ entre los óptimos de Pareto y los posibles pesos sociales definida a partir de las condiciones de primer orden (10) y (11) la que además es localmente unívoca.

18.2 Propiedades de la función exceso de utilidad

Las siguientes propiedades de la función exceso de utilidad nos serán de utilidad en las subsecciones siguientes.

1) La función exceso de utilidad está acotada superiormente.

2) Para funciones de utilidad que verifican la condición de Inada, la norma de la función exceso de utilidad crece infinitamente para una sucesión de pesos sociales que converjan a la frontera de R^n_+.

3) Es homogénea de grado cero.

4) Para cada $\lambda, e(\lambda)$ es un vector tangente al ortante positivo de la esfera de dimensión $(n-1)$, subconjunto de R^n_{++} que representaremos como

$$E^{n-1}_{++} = \left\{ \lambda \in R^n : |\lambda| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} = 1 \right\},$$

es decir: $\lambda e(\lambda) = 0 \ \ \forall \lambda \in E^{n-1}_{++}$.

Demostración:

1) La concavidad de las funciones de utilidad permiten escribir:

$$\bigtriangledown u_i(x)\,(x_i - w_i) \leq u_i(x_i) - u_i(w_i) \leq u_i\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right).$$

2) Para verificar esta propiedad basta observar que si $\lambda_h \rightarrow 0$ entonces $x_h(\lambda) \rightarrow 0$, luego las condiciones Inada prueban la afirmación. Para verificar la afirmación sobre la convergencia a cero de la cestas asignadas en el óptimo a un agente cuyo peso social decrece a cero, suponga por absurdo que para alguna coordenada k de esta cesta $x_{hk}(\lambda_n) > a > 0$ para todo λ_n de una sucesión en la que $(\lambda_h)_n$ converge a cero. La monotonía de las utilidades asegura que $u_h(x_h(\lambda)) \geq t > u_h(0) = 0$. Definimos ahora la asignación de recursos factible y que asegura al agente h $x_{hk} - \epsilon$ con $\epsilon < a$ mientras que a los demás agentes le asigna $x_{ik} + \frac{\epsilon}{n-1}$ Existen ϵ_i tales que las utilidades respectivas podrán representarse entonces como $u_h(y_h) = u_h(x_h) - \epsilon_h$ para el agente h, mientras que para los demás agentes tendremos: $u_i(y_i) = u_i(x_i) - \epsilon_i, \forall i \neq h$. Luego a partir de la desigualdad $-\lambda_h \epsilon_h + \sum_{i \neq h} \lambda_i \epsilon_i > 0$ la que se verifica para λ_h suficientemente pequeño, concluimos en que para $y \neq x(\lambda)$ el bienestar asociado a $W(x)$ es mayor para la asignación factible y que para la $x(\lambda)$ la que supuestamente maximiza $W(x)$ restringido a $\mathcal{F}$. La contradicción demuestra el acerto **.**[]

3) Basta ver que la solución del problema de maximizar (5) no se modifica si multiplicamos al vector $\lambda \in \Delta$ por p real positivo.

4) Utilizando la homogeneidad de grado cero de la función e podemos restringirnos a trabajar sobre $E^{n-1}_{++} = \{\lambda \in R_{++} : |\lambda| = 1\}$. Además com es fácil de verificar se cumple que $\lambda e(\lambda) = 0 \ \ \forall \lambda$ esto será particularmente cierto para aquellos λ con norma 1, es decir en la esfera unitaria de dimensión $n-1$.

18.3 Una relación binaria en el espacio de los pesos sociales

Mostraremos que es posible definir a partir de la función exceso de utilidad una relación binaria en el conjunto Δ_ϵ de los pesos sociales, para la que el conjunto de maximales es no vació. En subsecciones siguientes probaremos que dichos elementos maximales satisfacen la ecuación $e(\lambda) = 0$. y daremos una condición suficiente para la existencia de un único $\lambda \in \Delta_\epsilon$ para el que $e(\lambda) = 0$.

Sea $e : \Delta_\epsilon \to R^n$ la función de exceso de utilidad. Definimos en $\Delta_\epsilon \times \Delta_\epsilon$ la relación binaria

$$\phi = \{(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1 e(\lambda_2) < 0\}.$$

Dicha relación binaria es:

1) irreflexiva, pues $(\lambda, \lambda) \notin \phi$ por ser

$$\lambda e(\lambda) = \gamma(\lambda) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} w_i \right) = 0.$$

2) convexa, pues si $(\lambda_1, \lambda) \in \phi$ y además $(\lambda_2, \lambda) \in \phi$ entonces:

$$(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2, \lambda) \in \phi.$$

3) semicontinua superiormente, pues la continuidad de la función e asegura que el conjunto

$$\{\alpha \in \Delta_\epsilon : (\lambda, \alpha) \in \phi_i\}$$

es abierto.

Definición 18.7 *Un elemento $\gamma \in \Delta\epsilon$ es* **maximal** *para ϕ si no existe $\lambda \in \Delta\epsilon$ tal que $(\lambda, \gamma) \in \phi$*

Como puede verse un elemento $\gamma \in \Delta\epsilon$ es maximal para ϕ si y solamente si $\forall \lambda \in \Delta_\epsilon,\ \gamma \in F(\lambda)$ donde

$$F(\lambda) = \Delta_\epsilon - \{\alpha \in \Delta_\epsilon : (\lambda, \alpha) \in \phi\}. \tag{14}$$

En la medida en que las dotaciones iniciales de los agentes determinan la función exceso de utilidad, para cada posible distribución de las dotaciones iniciales existe una relación binaria correspondiente a esta distribución de la riqueza. En tanto que como veremos los elementos maximales de estas posibles relaciones definen los equilibrios walrasianos a que una sociedad puede aspirar, la riqueza y su distribución serán determinantes en la definición de tales equilibrios.

Enunciaremos sin demostrarlo un lema que presenta importantes aplicaciones a diferentes áreas de la matemática y la economía matemática, en particular el teorema de punto fijo de Brower es una aplicación inmediata de este teorema.

Nota 18.8 Notación: *Represeentaremos por* $co\{x_i : i \in A\}$ *al conjunto de combinaciones convexas que pueden lograrse con elementos* x_i *con* i *elegido en un conjunto* A.

Lema 18.9 Lema K-K-M *Sean* F_i n *subconjuntos cerrados de* $\Delta = \{x \in R+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ *tales que para todo subconjunto de índices* $A \subset \{1, 2, ...n\}$*se verifica*

$$co\{x_i : i \in A\} \subset \cup_{\{i \in A\}} F_i,$$

entonces

$$\cap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset.$$

Nota 18.10 *La demostración del teorema de Brower ver sección 14.3 a partir del lema anterior es sencilla. Considere*

$$F_i = \{x \in \Delta : x_i \geq f_i(x)\}$$

siendo f *una función continua de* Δ *en sí mismo. Si para todo* i *fuese cierto para algún* $x \in \Delta$ *que para todas las coordenadas* $x_i < f_i(x)$ *entonces sumando en* i *obtendríamos la contradicción* $1 < 1$. *La continuidad de* f *asegura que cada* F_i *es cerrado. Entonces por el teorema K-K-M se cumple que existe al menos un* $x \in \Delta$ *para el que* $x_i \geq f_i(x)$ *para todas sus coordenadas, si la desigualdad fuese estricta alguna vez, obtendríamos sumando en* i *nuevamente* $1 > 1$, *por lo tanto* $x_i = f_i(x)$ *para todo* i.

Como se muestra en el siguiente teorema las propiedades indicadas anteriormente para la función exceso de utilidad y el lema K-K-M nos permitirán concluir que el conjunto de elementos maximales en Δ_ϵ es no vacío.

Teorema 18.11 *El conjunto intersección* $\cap_{\lambda \in \Delta_\epsilon} F(\lambda)$ *es no vacío.*

Demostración: Cada uno de los conjuntos $F(\lambda)$ en (14) es cerrado. Además si existiese un elemento γ combinación convexa de elementos λ_i, del simplex, $\gamma = \sum_{i \in A} \alpha_i \lambda_i$ donde $\sum_{i \in A} \alpha_i = 1,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1$ tal que $\gamma \notin \cup_{\lambda \in A} F(\lambda)$ entonces verificaría para todo $i \in A$ la relación $(\lambda_i, \gamma) \in \phi$, la convexidad de ϕ implica entonces que $(\gamma, \gamma) \in \phi$ lo que no es posible por ser ϕ una relación binaria irreflexiva. Luego por el lema K-K-M, la intersección de los $F(\lambda)$ es un conjunto no vacío.

18.4 Un teorema de existencia del equilibrio walrasiano

En esta subsección probaremos que todo elemento maximal $\gamma \in \Delta_\epsilon$ de ϕ, para economías en las que las utilidades satisfacen la condición de Inada, verifica la ecuación $e(\lambda) = 0$. A partir entonces del teorema (18.3) podemos concluir en la existencia de un equilibrio walrasiano.

Es interesante destacar que si bien la elección de uno u otro óptimo Pareto implica una elección determinada de los pesos sociales de los agentes económicos, los posibles óptimos de Pareto a los que la sociedad puede aspirar dependen solamente del monto total de las dotaciones iniciales, sin depender de la distribución de la riqueza entre los integrantes de la sociedad. No obstante no sucede lo mismo con los posibles equilibrios en los que una sociedad determinada puede encontrarse, estos dependen tanto de la riqueza agregada como de su distribución por cuanto de ella depende el conjunto de pesos sociales, representados por vectores $\lambda \in \Delta$, en los que se anula la función exceso de utilidad. De alguna forma entonces la distribución inicial de la riqueza ordena a los individuos en el mercado, orden que se refleja en el equilibrio existente.

El siguiente teorema es un paso previo en nuestra demostración de la existencia del equilibrio walrasiano, pero una vez demostrado el rompecabezas quedará armado, solamente faltará hacer referencia al teorema (18.3).

Teorema 18.12 *Sea γ un elemento maximal para la relación $\phi \in \Delta \times \Delta$ ya definida, entonces γ tiene todas sus coordenadas estrictamente positivas y $e(\gamma) = 0$.*

Demostración: Consideremos una sucesión $\{\epsilon_n\}$ de reales positivos convergentes a cero, la colección $\Delta_{\epsilon_n} \subset \Delta$ puede ser ordenada por inclusión. Sea γ_n un elemento maximal en Δ_n, por ser Δ compacto, existe una subsucesión $\gamma_{n'}$ en γ_ϵ convergente. Sea γ el punto límite de esta subsucesión. La continuidad de e garantiza que γ es maximal en Δ. Mostremos a continuación que $\gamma \gg 0$. Supongamos que γ tuviera alguna coordenada nula, de acuerdo a (18.2 item (2)) tenemos que $lim_{n\to\infty}|e(\gamma_n)| = \infty$. Por lo tanto por ser e acotada superiormente, (18.2 item (1)) para alguna coordenada i y n suficientemente grande tendremos $e_i(\gamma_n) < 0$, por la continuidad de la función exceso de utilidad existe n_0 tal que $\forall n > n_0$ y $\xi \in \Delta_n$ se cumple que $\xi e(\gamma_n) < 0$ lo que contradice la maximalidad de γ_n. Se sigue entonces que γ es positivo en todas sus componentes Además $e(\gamma) \gg 0$ pues en otro caso existiría $\xi' \in \Delta_n$ tal que $\xi' e(\gamma_n) < 0$ para n suficientemente grande, lo que nuevamente contradiría la maximalidad de γ_n. Finalmente como $\gamma e(\gamma) = 0$ se concluye en que $e(\gamma) = 0$ **.**[]

Esta demostración puede extenderse a modelos más generales de economías, permitiendo descubrir propiedades del conjunto de los equilibrios walrasianos de forma totalmente análoga a como lo haríamos a partir de la función exceso de demanda. De esta manera podemos transportar a las economías con infinitos bienes los elementos de la topología diferencial y del análisis propios del estudio de los modelos finitos.

19 Unicidad del equilibrio walrasiano

En esta sección analizaremos una condición suficiente para la existencia de un único equilibrio análogamente. Para economías que cumplan con esta condición el equilibrio estará totalmente determinado por la distribución inicial de la riqueza, pues en este caso será posible la elección de un único vector $\lambda \in \Delta$ de pesos sociales, en los que la función exceso de utilidad se anule. Consecuentemente una única ponderación de los agentes económicos será posible en el equilibrio. Cualquier modificación en el equilibrio supondría necesariamente una redistribución de la riqueza en la sociedad.

Supongamos que la función exceso de utilidad cumple la siguiente **propiedad de antisimetría:**

$$\lambda_2 e(\lambda_1) \geq 0 \ \rightarrow \ \lambda_1 e(\lambda_2) < 0.$$

Obsérvese que si se cumple la propiedad anterior si $(\lambda_2, \lambda_1) \notin \succeq$ entonces $(\lambda_1, \lambda_2) \in \succeq$ y además la relación binaria es completa

Esta propiedad asegura que el orden introducido en el espacio de los pesos sociales es completo.

Teorema 19.1 *Si la función exceso de utilidad satisface la propiedad de antisimetría entonces el equilibrio es único.*

Demostración: Sea $\bar{\lambda}$ tal que $e(\bar{\lambda}) = 0$ luego para todo elemento λ del simplex se verifica que; $\lambda e(\bar{\lambda}) = 0$. Por la propiedad de antisimetría se verifica que: $\bar{\lambda} e(\lambda) < 0$, es decir $\bar{\lambda} \succeq \lambda$, $\forall \lambda$ del simplex .[]

Ejemplo 19.2 *Si la función exceso de utilidad es un operador monótono en algún hiperespacio, entonces la propiedad de antisimetría se verifica.*

Sea $\bar{\lambda} \in E_{++}^{n-1}$ definimos:

$$T_{\bar{\lambda}} = \left\{ \lambda \in R^n : \lambda \bar{\lambda} = 0 \right\}.$$

Definición 19.3 *Diremos que e es monótono en $T_{\bar{\lambda}}$ si cada vez que $\lambda_1 - \lambda_2 \in T_{\bar{\lambda}}$ se verifica que* $(\lambda_1 - \lambda_2)\left(e(\lambda_1) - e(\lambda_2)\right) > 0$.

Teorema 19.4 *Si e es monótona en algún $T_{\bar{\lambda}}$ entonces e verifica la propiedad de antisimetría.*

Demostración: Supongamos que $\lambda_2 e(\lambda_1) \geq 0$, por ser λ_1 y λ_2 elementos del simplex se verifica que $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, existe entonces $\alpha > 0$ tal que $\lambda_1 - \alpha\lambda_2 \in T_{\bar{\lambda}}$. Se tiene entonces que:

$$(\lambda_1 - \alpha\lambda_2)\left(e(\lambda_1) - e(\alpha\lambda_2)\right) > 0.$$

Usando la homogeneidad de grado cero de e y la propiedad 4 de (18.2) obtenemos que: $\lambda_1 e(\lambda_2) \leq 0$.

19.1 Unicidad local del equilibrio walrasiano

Habiendo establecido las condiciones que aseguran la existencia del equilibrio análogamente, el tema que sigue es el relacionado con la unicidad o multiplicidad del equilibrio. Sería deseable que fuera único. Esta unicidad global, no obstante sólo es posible de obtener, si se exigen condiciones muy restrictivas, como por ejemplo la ya vista en la sección anterior en la que se exige que la relación binaria ϕ en el espacio de los pesos sociales sea completa, obsérvese que por cuanto esta relación depende de la función exceso de utilidad, las propiedades impuestas sobre la relación binaria, en definitiva, radican en el conjunto de utilidades. No siendo en general posible esta unicidad la siguiente deseable propiedad es la de local unicidad. Diremos que un vector de precios o una cesta de equilibrio es localmente única si en un entorno suyo no es posible hallar otro vector o cesta de equilibrio. Si el conjunto de equilibrios es compacto, local unicidad equivale a finitud. Esto nos lleva entonces a investigar condiciones que aseguran la finitud del conjunto de equilibrios.

Siguiendo nuestro esquema de trabajo consideraremos una economía de intercambio puro, donde cada agente es representado por sus preferencias y dotaciones iniciales, $(\succeq_i, w_i)$, siendo $\succeq_i$ una relación de preferencias continua y estrictamente monótona en R^l_+ mientras que $w_i >> 0$ es decir la dotación inicial de cada agente, es una cesta de bienes representada por un vector de R^l con todas sus coordenadas estrictamente positivas, estas condiciones se deben verificar para todo agente $i = 1, 2, ...n$. Debemos buscar condiciones que garanticen la existencia de un conjunto finito de soluciones de la ecuación $e_w(\lambda) = 0$ donde e_w es la función exceso de utilidad para la economía de intercambio pura considerada y λ un elemento con todas sus coordenadas positivas del simplex de dimensión $n-1$.

Dado que la función exceso de utilidad es homogénea de grado cero, 18.2 podemos restringirnos a trabajar con $\lambda \in R^n$ tales $|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2} = 1, \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., n$, es decir a elementos en la parte positiva de la esfera $n-1$ dimensional, a la que representaremos por E^{n-1}_{++}. Obsérvese que $e(\lambda) = 0$ si y solamente si $e(\lambda') = 0$ donde $\lambda' = \frac{\lambda}{|\lambda|}$.

Llamaremos conjunto de equilibrio a:

$$\mathcal{E}q' = \{\lambda \in E^{n-1}_{++} : e(\lambda) = 0\}.$$

Definición 19.5 *Decimos que un elemento $\lambda \in \mathcal{E}q'$ es regular si la matriz $(n-1) \times (n-1)$, de derivadas parciales $De(\lambda)$ tiene rango $n-1$. Una* **economía será llamada regular** *si todo $\lambda \in \mathcal{E}q'$ es regular.*

Veremos en la siguiente sección que casi toda economía es regular. La importancia de las economías regulares radica en el hecho de que tales economías tienen un conjunto finito de equilibrios, equivalentemente que sus equilibrios son localmente únicos o puntos aislados. Más formalmente:

Teorema 19.6 Unicidad local: *En una economía regular todo equilibrio es localmente único (o aislado). Esto es para todo* $\lambda \in \mathcal{E}q'$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que si* $\lambda \neq \lambda'$ *y tal que* $|\lambda - \lambda'| < \epsilon$, *entonces* $e(\lambda') \neq 0$. *Más aún el conjunto de los equilibrios es finito.*

La demostración de este teorema es conclusión del teorema de la *Función Inversa* al que dedicaremos atención en la siguiente subsección. La referencia principal es [Lima, E.].

19.2 El teorema de la función inversa.

El teorema de la función inversa como el de la función implícita son dos herramientas de gran potencia en la Teoría Económica, por este motivo les dedicaremos una atención preferente. A lo largo de esta sección el concepto de diferenciabilidad jugará un papel básico, la obra de referencia básica será [Lima, E.]. Comenzaremos con el primero de los teoremas mencionado, dando primeramente una definición de diferenciabilidad.

Decimos que una función $f : U \to R^n$ definida en el abierto $U \subseteq R^m$ se dice **diferenciable en el punto** $a \in U$ cuando existe una aplicación lineal $T : R^m \to R^n$ tal que:

$$f(a+v) - f(a) = Tv + r(v), \quad con \quad \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Aquí suponemos que $(a+b) \in U$ La transformación lineal $T : R^m \to R^n$ que aparece en la definición es la matriz de derivadas parciales evaluada en el punto a, $f'(a) \in \mathcal{M}_{n\times m}$ cuyos elementos son: $\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right\}$ $i = \{1, 2, ..., m\}$; $j = \{1, 2, ..., n\}$.

Sean U y V conjuntos abiertos en R^n. Un **difeomorfismo** $f : U \to V$ es una biyección diferenciable cuya inversa es diferenciable. En particular f es un homeomorfismo entre U y V, es decir una biyección continua con inversa continua. El ejemplo clásico de $f(x) = x^3$ muestra que un homeomorfismo puede ser diferenciable sin que su inverso lo sea.

Algunas consideraciones sobre el espacio de las transformaciones lineales

En general el conjunto de las transformaciones lineales de R^m en R^n al que denotaremos como $\mathcal{L}(R^m, R^n)$, desempeñan un importante rol en la teoría económica. Particularmente el conjunto de los llamados funcionales lineales, esto es el conjunto de las transformaciones líneales de R^m en R. Este conjunto es interpretado como el conjunto de los precios, por cuanto un sistema de precios asigna a toda cesta de bienes un número real, su valor, en forma lineal y continua, ver subsección (13.1). Dada una transformación lineal $T : V \to W$ se denomina **dominio de** T al espacio vectorial V. Por **imagen de** T se entiende un subconjunto $Z \subset W$ tal que para todo $y \in Z$ existe $x \in V$ tal que $y = T(x)$. El **núcleo de** T es un subconjunto $Ker(T) \subset V$ tal que $Ker(T) = \{x \in V; T(x) = 0 \in W\}$.

El conjunto $\mathcal{L}(R^m, R^n)$ puede ser interpretado como un espacio vectorial isomorfo a R^{mn} representando a cada transformación lineal por su matriz asociada $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Como en todo espacio vectorial E, es posible definir aquí una **norma.** De modo general una norma en un espacio vectorial es cualquier función real $|| : E \to R$ que cumple las siguientes condiciones:

- N 1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- N 2. $|\alpha x| = |\alpha||x|$
- N 3. $x \neq 0$ implica $|x| > 0$.

Una norma como puede verificarse fácilmente es una de función de distancia ver definición (5.1) o métrica que sea invariante por traslaciones $d(x + y.z + y) = d(x, y)$ y Walrasiano en las dos variables $d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x, y)$.

En el espacio de las transformaciones lineales se puede definir una norma asociando a cada transformación lineal L su matriz A y definiendo

$$|A| = sup\left\{|Ax|; x \in R^m, |x| = 1\right\}.$$

El lector puede verificar a esta función $A \to |A|$ cumple las condiciones, N 1., N 2., y N 3.) Esto hace que sea posible definir en dicho espacio una noción de proximidad, la que por otra parte es independiente de cual en particular haya sido la función elegida como norma, pues por ser en R^{nm} todas ellas equivalentes en el sentido de la topología que definen.

Un subconjunto de transformaciones lineales que nos resultará de interés en esta sección es el conjunto de las transformaciones lineales invertibles, (isomorfismos): $GL(R^m) \subseteq \mathcal{L}(R^m, R^m)$. Resulta interesante observar que si $f : U \to W,\ \ U,\ W \in R^m$ es un **difeomorfismo,** *esto es una biyección de* U *en* V *diferenciable cuya inversa* $f^{-1} : V \to U$ *también lo es,* entonces la matriz de derivadas parciales de f evaluada en algún $a \in U,\ \ f'(a)$ define una matriz invertible, y por lo tanto ella misma puede ser considerada como un elemento de $\mathcal{L}(R^m, R^m)$. La inversa de esta matriz coincide con la derivada de f^{-1} evaluada en $f(a)$. Observemos que la derivada f' puede ser considerada como una aplicación tal que a todo $a \in U$ le hace corresponder un elemento L, representado por la matriz $f'(a)$ del espacio $\mathcal{L}(R^m, R^m)$. El conjunto $GL(R^m) \subset R^{m^2}$ es abierto pues este es el conjunto de las matrices invertibles y el determinante es una función continua, obsérvese que $L \in GL(R^m)$ si y solamente si el determinante de L es distinto de cero.

Basaremos la prueba del teorema en el llamado *método de las aproximaciones sucesivas.* Esto requiere un conjunto de definiciones y teoremas previos los que a continuación presentaremos.

Sea $X \subseteq R^m$. Una aplicación $f : X \to R^n$ se llama una **contracción** cuando existe $\lambda \in R,\ 0 < \lambda < 1$, tal que $|f(x) - f(a)| \leq \lambda |x - a|$ para cualesquiera x e $y \in X$.

Por ejemplo: Sea $U \subseteq R^m$ abierto y conexo, si $f(x)$ es una aplicación diferenciable $f : U \to R^n$ para la que $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ el teorema del valor medio asegura que f es una contracción.

Recordemos la definición de punto fijo de una función (definición (14.3)). Un punto $x \in X$ es un punto fijo para $f : X \to R^m, (X \subseteq R^m)$ si $f(x) = x$.

El siguiente teorema de existencia de puntos fijos es de gran utilidad en la demostración del teorema de existencia de la función inversa, si bien un caso particular del teorema de Brower, teorema (14.4), por su importancia lo enunciaremos aquí y haremos su demostración, sugiriendo al lector la consulta al texto [Lima, E.].

Teorema 19.7 (Teorema de punto fijo para contracciones) *Sea $F \subseteq R^m$ un subconjunto cerrado y $f : F \to F$ una contracción. Dado cualquier punto $x_0 \in X$ la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ converge para un punto $a \in F$ que es el único punto fijo de f.*

Demostración: De $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ se sigue que $|x_{k+1} - x_k| \leq \lambda^k |x_1 - x_0|$. Por lo tanto:

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |x_{k+i-1} - x_{k+i}| \leq \left[\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{k+i} \right] |x_1 - x_0| \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} |x_{k+p} - x_x| = 0,\ \forall p \in N$. Siendo F cerrado y la sucesión de Cauchy, existe a en F tal que

$$a = \lim_{k\to\infty} (x_k).$$

La continuidad de f asegura que

$$f(a) = \lim_{k\to\infty} (x_{k+1}) = a.$$

Por lo tanto a es un punto fijo para f. La unicidad se prueba por el absurdo. Suponga que existe $b \neq a$ tal que $b = f(b)$ se concluye que $|b - a| \leq \lambda |b - a|$, lo cual por ser $0 \leq \lambda < 1$, es absurdo.[]

El teorema siguiente así como su corolario son versiones no diferenciables del teorema de la función inversa, y al mismo tiempo partes cruciales de la prueba. En ellos se aplicará el teorema ya visto de las contracciones. Su papel más importante está en que ellos permiten probar que siendo f una función diferenciable en un a existe U abierto que contiene a a tal que $f(U)$ es abierto.

Teorema 19.8 (Perturbación de la identidad) *Sea $\phi : U \to R^m$ una contracción definida en un abierto $U \subseteq R^m$. Entonces $f(x) = x + \phi(x)$, es un homeomorfismo de U sobre el conjunto abierto $f(U) \subseteq R^m$. Si $U = R^m$ entonces $f(U) = R^m$.*

Demostración: A partir de la definición de f, siendo ϕ una contracción, podemos escribir que

$$|f(x) - f(y)| \geq (1 - \lambda)|x - y|.$$

De aquí resulta que f es una biyección de U sobre $f(U)$, y que la aplicación inversa $f^{-1} : f(U) \to U$ cumple al condición: $|f^{-1}(w) - |f^{-1}(z)| \leq c|w - z|$, con $c = \frac{1}{1-\lambda}$, de donde se sigue que f es un homeomorfismo de U sobre $f(U)$. Queremos probar ahora que $f(U)$ es abierto en R^m, es decir que para $b \in f(U)$, b es del interior de $f(U)$. Para esto alcanza con probar que para todo y en un entorno de b, existe $x \in U$ tal que $y = x + \phi(x)$. Consideremos la función $\psi(x) = y - \phi(x)$, siendo y fijo ψ es una contracción, por lo tanto en una bola cerrada $B_r(a) \subseteq U$ tiene un punto fijo, sea este x_y. Luego para toda $y \in U$ existe solución para la ecuación $y = f(x)$ definida por el punto fijo x_y de ψ.[]

Corolario 19.9 (Perturbación de un isomorfismo) *Sea $U \subseteq R^m$ abierto, y $f : U \to R^m$ una función de la forma $f(x) = Tx + \phi(x)$, donde $T : R^m \to R^m$ es una transformación lineal invertible y $\phi : U \to R^m$ satisface $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \lambda|x - y|$, con $\lambda|T^{-1}| < 1$. Entonces f es un homeomorfismo de U sobre el conjunto abierto $f(U) \subseteq R^m$. Si $U = R^m$ entonces $f(U) = R^m$.*

Demostración: La prueba sigue del teorema anterior, basta considerar la función $(T^{-1}f)(x) = x + \phi(x)$, la cual cumple con la propiedad de ser una perturbación de la identidad y por lo tanto es un homeomorfismo del abierto U sobre el abierto $(T^{-1}f)(U)$.

Por la composición de homomorfismos se tiene aplicando T al homeomorfismo anterior que f es homeomorfismo de U sobre el abierto $f(U)$.[]

Lema 19.10 (Diferenciabillidad de homeomorfismo inverso) *Sea $f : U \to V$ un homeomorfismo entre los abiertos $U, V \subseteq R^m$. Si f es diferenciable en $a \in U$ y la derivada $f'(a) : R^m \to R^m$ un isomorfismo, entonces el homeomorfismo inverso $f^{-1} : V \to U$ es diferenciable en el punto $b = f(a)$. Si f es continuamente diferenciable en a entonces f^{-1} también lo será en b.*

Demostración: Escribamos

$$f^{-1}(b + w) - f^{-1}(b) = [f'(a)]^{-1}w + s(w) \quad (*)$$

y verifiquemos que $lim_{w \to 0} \frac{s(w)}{|w|} = 0$. Sea $v = f^{-1}(b+w) - f^{-1}(b),\ y\ a = f^{-1}(b)$. Entonces $f(a+v) - f(a) = w$, por la continuidad de f y f^{-1} se sigue que $w \to 0$ si y solamente si $v \to 0$. Por ser f diferenciable podemos escribir:

$$f(a+v) - f(a) = f'(a)v + r(v) \quad (**)$$

Sustituyendo en (*) el primer miembro por v y en el segundo $w = f(a+v) - f(a)$ por el segundo miembro de (**) obtenemos: $v = v + [f'(a)]^{-1} r(v) + s(w)$. Luego se obtiene la igualdad:

$$\frac{s(w)}{|w|} = -f'(a)^{-1} \frac{r(v)}{v} . \frac{|v|}{|w|}.$$

Como ya fue visto, cuando $w \to 0,\ v \to 0$, se sigue que $\lim_{w \to 0} \frac{r(v)}{v} = 0$. Además $\frac{|v|}{|w|} = \frac{v}{f(a+v) - f(a)}$ se mantiene acotado en un entorno de a, por lo tanto se tiene que cuando $w \to 0,\ \ \frac{s(w)}{|w|} \to 0$, y por lo tanto f^{-1} es diferenciable en $b = f(a)$.[]

Teorema 19.11 (Teorema de la función inversa) *Sean $f : U \to R^m$ definido en el abierto $U \subseteq R^m$ continuamente diferenciable en el punto $a \in U$ y $f'(a) : R^m \to R^m$ un isomorfismo, (equivalentemente: el determinante del jacobiano $detJf(a) = det \left[\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right\} \right]; i, j = 1, 2, \ldots, m$ es diferente de cero.) Entonces f es un homeomorfismo de un abierto V que contiene a a sobre un abierto W que contiene a $f(a)$. El homeomorfismo inverso $f^{-1} : W \to V$ es continuamente diferenciable en $f(a)$ y su derivada en ese punto es: $[f'(a)]^{-1}$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer $0 = a = f(a)$. Por ser f diferenciable se puede escribir: $f(x) = f'(0)x + r(x)$ donde por ser continua la derivada en 0 se tiene que existe un abierto V con centro en cero tal que $|r(x) - r(y)| \leq \lambda |x - y|$ para todo $x, y \in V$, y $\lambda |f'(0)^{-1}| < 1$ con λ positivo (ver corolario (perturbación de un isomorfismo). Por lo tanto f es una perturbación del isomorfismo $f'(0)$. De esta forma f es un homeomorfismo de V sobre el abierto $W = f(V)$. Por el lema del difeomorfismo inverso se tiene que $f'^{-1} : W \to V$ es diferenciable con continuidad en $f(0)$. Como el conjunto $GL(R^m)$ es abierto en $\mathcal{L}(R^m, R^m)$ de esta forma si f es diferenciable con continuidad en 0 se puede elegir un entorno V de 0 suficientemente pequeño, tal que para todo $b \in V$, $f'(b)$ sea un isomorfismo y por la diferenciabilidad del homeomorfismo inverso $f^{-1} : W \to V$, es diferenciable en todos los puntos de W luego, f es un difeomorfismo. []

En principio el teorema no afirma nada sobre la finitud o no del conjunto de preimágenes de $f(a)$. Si nos dice que son aislados, pues f^{-1} en las condiciones del teorema de inversión es un homeomorfismo local, por lo tanto una biyección entre determinados entornos W de $f(a)$ y U de $x \in f^{-1}(f(a))$. Una condición que asegura la finitud de las preimgénes de $f(a)$ es que el dominio de f sea un conjunto compacto. Pues en este caso, si el conjunto de preimágenes fuera infinito existiría un cubrimiento del cual no es posible extraer un subcubrimiento finito.

Antes de continuar con el estudio de las propiedades del conjunto de equilibrios, daremos una demostración del teorema de la función implícita.

Demostración del teorema de la función implícita: Sea $\phi : A \times B \to R^m \times R^n$, tal que $\phi(x,q) = (f(x,q),q)$. Por ser $\bar{det} J_x f(\bar{x},\bar{q}) \neq 0$, (equivalentemente el rango de $J_x f(\bar{x},\bar{q})$ es igual a n), tenemos que

$$\partial\phi(\bar{x},\bar{q}) = \left[\begin{array}{c|c} J_x\phi(\bar{x},\bar{q} & * \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right]$$

es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa, existen entornos $U \subset A \times B$ y V de $(\bar{x},\bar{q})$ y de $(0,\bar{q})$ respectivamente, donde ϕ es un difeomorfismos y tales que $U = \psi(V) = \phi^{-1}(V)$. Sea $\psi(x,q) = (\psi_1(x,q), \psi_2(x,q))$ en $R^n \times R^m$, como $\phi(\psi) = Id_U$, se sigue que:

$$(x,q) = \phi(\psi(x,q)) = (f(\psi_1(x,q)), \psi_2(x,q)), \psi_2(x,q)),$$

por lo tanto

$$x = f(\psi_1(x,q)), \psi_2(x,q)), \;\; y \;\; q = \psi_2(x,q). \quad (*)$$

Sea $T_0 = \{q : q \in R^n, \quad (0,q) \in V\}$, para cada q en T_0 definimos $\eta(q) = \psi_1(0,q)$. Luego considerando $x = 0$, en (*) obtenemos $0 = f(\eta(q),q)$.[]

19.3 El jacobiano de la matriz exceso de utilidad

Nuestro interés ahora, es el de resolver el sistema de n ecuaciones, con n variables:

$$\begin{array}{rl} e_1(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = & 0 \\ e_2(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e_n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = & 0. \end{array} \tag{15}$$

Donde e_i representa la función exceso de utilidad del agente i, $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ es un vector de pesos sociales y $w = (w_1,w_2,\ldots,w_n)$ representa las dotaciones iniciales de los agentes las que consideramos dadas..

La propiedad (4) de la sección (18.2), permite establecer una relación de dependencia lineal entre las ecuaciones (18) de forma tal que sólo $n-1$ de ellas son linealmente independientes, es decir resueltas $n-1$ ecuaciones la solución hallada será también solución para la n-ésima ecuación, esta hace que la función exceso de utilidad sea para w dado, una función de dominio en R^{n-1} y codominio en R^{n-1} $e_w(\cdot) : C \to R^{n-1}$.

De esta manera de acuerdo al teorema de la función inversa, el sistema 15 tendrá soluciones determinadas por el teorema de la función inversa si $\bar{det} J_\lambda e_w(\lambda)|_{\forall\lambda:e(\lambda)=0} \neq 0$ es decir si el rango del jacobiano evaluado en cada λ de $\mathcal{E}q'$ es $n-1$, lo que se expresa diciendo que cero es un **valor regular** de la función e.

Nota 19.12 *La expresión $\bar{det} J_\lambda e_w(\lambda)|_{\forall\lambda:e(\lambda)=0} \neq 0$ hace referencia al determinante del jacobiano de la función exceso de utilidad restringido a $n-1$ filas y columnas linealmente independientes. Pues considerando la matriz $Je(\lambda)$ como matriz de n filas por n columnas su determinante será cero cada vez que λ verifique $e(\lambda) = 0$ pues, como fácilmente puede comprobarse $\lambda Je(\lambda) = 0$ lo que implica la existencia de al menos una fila o columna de la matriz jacobiana linealmente dependiente, y por lo tanto su determinate será cero.*

El jacobiano de la función exceso de utilidad, presenta la siguiente forma:

$$J_\lambda e(\lambda) = \left[\frac{\partial e_i(\lambda)}{\partial \lambda_k}\right];\ i = \{1, 2, ...n\},\ k = \{1, 2, ...n\}.$$

$$\frac{\partial e_i(\lambda)}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k}\left\{\partial^2 u_i(x_i(\lambda), t)[x_i(\lambda) - w_i(t)]^{tr} + [\partial u_i(x_i(\lambda), t)]^{tr}\right\}. \tag{16}$$

Donde por la trasposición del vector a está representada por a^{tr}. Indica la escritura del vector como un vector columna. Además $\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} = \left(\frac{\partial x_{i1}}{\partial \lambda_k}, ..., \frac{\partial x_{il}}{\partial \lambda_k}\right)$, $\partial^2 u_i(x_i(\lambda), t)$ es la matriz de derivadas segundas de la función $u_i(x, t)$, donde sus entradas son $a_{jk} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_{ij} \partial x_{Ik}}$.

La diferenciabilidad de x_i como función de λ se obtiene a partir de las condiciones de primer orden para la maximización de la función de bienestar ver (12).

Definición 19.13 *Fijadas las preferencias de los agentes, diremos que una economía es* **regular** *si para las dotaciones iniciales w se tiene que el cero es un valor regular de $e_w(\cdot) : C \to R^{n-1}$.*

Mostraremos a continuación el teorema de unicidad local, que afirma la unicidad local de las soluciones de 15 para una economía regular.

Demostración del teorema de Unicidad Local. Básicamente la prueba ya está hecha. Sea $E_\epsilon^{n-1} = \{\lambda \in E_{++}^{n-1} : \lambda_i \geq \epsilon > 0\ \forall i\}$. Sea $e_{E_{\epsilon_m}^{n-1}}$ la restricción de la función exceso de utilidad a $E_{\epsilon_m}^{n-1}$. Siendo el cero un **valor regular** para e, es decir un valor tal que $\bar{det} Je_w(\lambda)|_{\{\forall\lambda:e(\lambda)=0\}} \neq 0$, el teorema de la función inversa asegura que $e^{-1}_{E_{\epsilon_m}^{n-1}}(0)$ está formado por puntos aislados, es decir que para cada unos de ellos existen entornos reducidos suyos (es decir todos los puntos del entorno menos el punto mismo) en los cuales la función e es distinta de cero. Como el dominio es compacto, estos son en cantidad finita. Consideremos $\epsilon_m \to 0$ y ordenemos $E_{\epsilon_m}^{n-1}$ por inclusión, dada la compacidad de $E^{n-1} = \{\lambda \in R^n : \|\lambda\| = 1; \lambda_i \geq 0\}$ si existiese una sucesión λ_m de elementos de $E^{n-1}_{\epsilon_m}$, existiría un punto de acumulación λ^* el que necesariamente debe pertenecer a la frontera de E^{n-1}, la continuidad de la función exceso de utilidad implica que $e(\lambda^*) = 0$ lo que contradice ((18.2) item (2)). Por lo tanto el conjunto la cardinalidad de $\mathcal{E}q'$ es finita.[]

Con la demostración de este teorema concluimos que si en cada $\lambda \in \mathcal{E}q'$ la matriz jacobiana de la función exceso de utilidad $J_\lambda e_w(\lambda)|_{\forall \lambda \in \mathcal{E}q'}$, es de rango $n-1$, es decir *si la economía es regular* entonces, el conjunto $\mathcal{E}q'$ es finito y por lo tanto lo será el conjunto de equilibrios walrasianos de la economía $\mathcal{E}$ definida a partir de $(\succeq_i, w_i)$, más adelante veremos que además toda economía regular presenta una cantidad impar de ellos. Una particularidad más podemos resaltar del conjunto de equilibrios de una economía regular y es el hecho de que *toda economía regular tiene una cantidad impar de equilibrios.* La demostración de esta afirmación requiere técnicas avanzadas de topología diferencial sugerimos como bibliografía los [Guillemin, V. Pollak, A.] y [Milnor, J.]. Daremos en la siguiente sección algunos elementos necesarios para la demostración, no obstante algunos teoremas serán simplemente enunciados.

20 Elementos de la topología diferencial

En esta subsección el concepto de *variedad* jugará un papel central. La generalidad del concepto explica la vasta clase de aplicaciones en las que está presente, entre ellas en economía. Su origen está en la cartografía, ciencia en la que en el asentamiento de sus bases matemáticas Gauss jugó un importante papel. Analicemos brevemente como trabajan los cartógrafos:

a) A diferentes equipos de trabajo se le asigna una porción de territorio a cartografiar a la que se le asigna un índice i.

b) Cuando dos porciones del territorio diferentes por ejemplo h y k tienen puntos comunes ambos equipos deben marcarlos claramente a los efectos de poder fácilmente encontrar estas correspondencias.

Cada carta esta trazada en un papel cuadriculado munido de coordenadas, el conjunto de estas hojas cartográficas constituye un atlas.

De manera similar podemos trabajar con un conjunto abstracto de puntos, dividiendo a éste en subconjuntos a los que podamos mapear biunívocamente sobre subconjuntos abiertos de R^n por ejemplo, es decir hacer cartas locales, cuya unión completa formará el atlas de M. Cuando este procedimiento sea válido diremos que M es una variedad de dimensión n. Formalmente:

Definición 20.1 *Un subconjunto $M \subset R^n$ es una C^r* **variedad de dimensión n** *(*con bordes*) si para cada $x \in M$ existe un difeomorfismo de clase C^r (esto es un difeomorfismo cuyas derivadas hasta las r-ésimas son continuas) $\phi : U \to R^s; U \subset R^s$, que lleva al conjunto abierto $U \cap (R^n \times \{0\}^{s-n})$ (resp. $U \cap R^{n-1} \times R_+ \times \{0\}^{s-n}$) sobre $V_x = V \cap M$, donde $V \subset R^s$ es un entorno de x, llamaremos a V_x* dominio coordenado *de M. De forma tal que $M = \cup_x V_x$ y además la intersección de dos distintas dominios coordenados de M cuando es no vacía es un dominio coordenado de M*

Las funciones $\phi : U \to R^s$ definidas anteriormente son llamadas *funciones de pasaje*

El borde o frontera ∂M de una variedad C^r de dimensión n, es una variedad sin borde de dimensión $n-1$, formada por aquellos puntos $x \in M$ tales que ningún entorno suyo en M es homeomorfo a R^n

Ejemplo 20.2 *La bola unitaria B de dimensión n es una variedad de dimensión n, representada por:*

$$B = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

y su frontera es el conjunto que representaremos como:

$$\partial B = E^{n-1} = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

es decir la esfera de dimensión $(n-1)$.

Definición 20.3 *Una variedad se dice* **orientada** *si el jacobiano de las funciones de pasaje son positivas para cualesquiera dos dominios coordenados cuya intersección sea no vacía.*

Sea $M \subset R^n$ variedad de dimensión n, y sea ϕ una función de pasaje. Para $z = \phi^{-1}(x)$ el subespacio lineal $\partial\phi(z)\left(R^n \times \{0\}^{s-n}\right)$, es llamado **Espacio Tangente** de M en x y se representa por $T_x M$.

Ejemplo 20.4 *Para $x \in E^{n-1}, T_x E^{n-1} = \{v \in R^n :< v, e >= 0\}$.*

Si $f : M \to N$ es una función entre las variedades M y N tal que $y = f(x)$, la transformación lineal $\partial f(x)$ lleva el espacio tangente en de M en x en el espacio tangente de N en $f(x)$.

Definición 20.5 *Sean M y N variedades orientadas cerradas y conexas y sea $f : N \to M$ diferenciable, definimos* **grado** *de la aplicación diferenciable con respecto a un valor regular y_0 al número :*

$$degf = \sum_{f(x_i)=y_0} sgn\left(det\ Jf(x_i)\right)$$

Siendo la función $sgn(x)$ la función cuyo valor es 1 si $x > 0$ y -1 si $x < 0$. Por ser y_0 un valor regular $degf$ está bien definido. Obsérvese que

$$sgn\,(det\ Jf(x)) = sgn(\lambda_1...\lambda_n) = -1^{i(x)}$$

siendo $\lambda_1, ..., \lambda_n$ los valores propios de la matriz $Jf(x)$ y $i(x)$ la cantidad de valores propios negativos.

Puede probarse que el $degf$ no depende del valor regular considerado, [Milnor, J.].

Índice de un campo de vectores en un punto singular

Sea $N \subset R^s$ una C^r variedad de dimensión n con borde. Un **campo de vectores tangente** a N es una función $\xi : N \to R^s$ con $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), ..., \xi_n(x)) \in T_xN$ para todo $x \in N$. Usando la terminología habitual diremos que x_0 es un **punto singular** del campo ξ si se verifica que: $\xi(x_0) = 0$. Diremos que es un punto singular no degenerado si el determinante del jacobiano $\bar{det}\ J_x\xi(x_0) \neq 0$. De acuerdo a nuestras definiciones anteriores si cero es un valor regular, entonces todos los puntos singulares serán no degenerados. Recordamos que como consecuencia del teorema de la función inversa éstos serán aislados y en cantidad finita si el campo es propio o su dominio es una variedad compacta.

El siguiente teorema nos llevará directamente al punto de la existencia y de la cardinalidad impar del conjunto de equilibrios.

La **característica de Euler** $\chi(V)$, representa propiedades topológicas muy generales de las variedades, y clasifica a estas en clase de equivalencia dejando de lado propiedades geométricas particulares de las mismas. Aplicado a superficies el concepto fue introducido por Euler en 1752, aunque posiblemente en el siglo II a.c. Arquímedes ya la utilizara. En el caso de superficies la característica de Euler relaciona vértices, aristas y triángulos inscritas en ellas y puede mostrarse que para toda superficie V,

$$\chi(V) = v - a + t$$

es independiente de la triangulación siendo propia de la superficie, v es el número de vértices, a el número de aristas y t el de triángulos. Como una introducción atrayente para la clasificación topológica de superficies, cuya lectura apela solamente a la intuición espacial del lector recomendamos [Zeeman, C.]

En su forma general la característica de Euler es un invariante topológico asociada a cada variedad compacta según el siguiente teorema:

Teorema 20.6 Teorema de Poincare-Hopf *La suma de los índices en los puntos singulares no degenerados de un campo vectorial ξ definido en una variedad compacta M, y que en el caso* *de ser la variedad con borde, apunte hacia afuera es igual a la característica de Euler:*

$$\xi(M) = \sum_{x_j} (-1)^{i(x_j)},$$

siendo $i(x_j)$ el índice de cada punto singular x_j del campo. Esta suma es un invariante de la variedad que no depende del campo particular elegido.

El **índice** de un campo ξ en un punto singular no degenerado x_0 es el grado de la función $h(v) = \frac{1}{\|\xi(x_0+v)\|}\xi(x_0 + v)$. (Informalmente podemos decir que el índice mide la cantidad de veces que de manera absoluta el campo rodea al punto singular. De esta manera el valor absoluto del índice mide la cantidad de imágenes del campo en un entorno pequeño del punto singular). Si el punto singular es no degenerado el índice solamente puede tomar valores 1 o -1 (según mantenga o invierta el sentido del giro), de acuerdo a la cantidad de valores propios negativos del jacobiano del campo evaluado en el punto sea par o impar.

El siguiente teorema relaciona el concepto de índice con el concepto de grado de una función. Consideremos una esfera de radio ϵ pequeño Q_ϵ entorno de x_0 punto singular aislado. Considere la aplicación

$$f_{x_0} : Q_\epsilon \to E^{n-1}$$

donde S^{n-1} es la esfera unitaria, y $f(x_0) = \frac{1}{\|\xi(x_0+\epsilon v\|)}\xi(x_0 + \epsilon v)$. entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 20.7 *En un punto singular aislado x_0 de un campo $\xi(x)$ se verifica la igualdad:*

$$deg f(x_0) = sgn\left(det\ J\xi(x_0)\right).$$

Para la demostración del teorema recomendamos las obras ya citadas [Milnor, J.] o bien [Guillemin, V. Pollak, A.].

Nota 20.8 *En el caso particular en que el campo ξ tiene en x un punto singular no degenerado siendo $J\xi(x)$ una aplicación lineal que lleva T_xN en sí mismo el índice de ξ en x es igual al signo del determinate del jacobiano de ξ evaluado en x.*

Ejemplo 20.9 *Para la bola unitaria de dimensión n y un campo que en su frontera apunta hacia afuera, la característica de Euler es* 1*, luego el grado de cualquier campo que lleve la frontera de B en sí misma* hacia afuera *es 1.*

20.1 Imparidad del conjunto de equilibrios

Mostraremos como aplicación del teorema de Poincaré-Hopf, que el conjunto de equilibrios $\mathcal{E}q'$ es impar. Esto se deduce de que para una economía regular, los puntos singulares de la función exceso de utilidad son no degenerados, y por lo tanto aislados, del hecho que dicha función corta a la frontera de la bola unitaria *hacia afuera* y que $Je(\lambda)$ aplica $T_\lambda B$ en sí misma.

Veremos que el hecho de que la función exceso de utilidad e, es un campo *hacia afuera* en el borde de B se sigue como conclusión del hecho de ser e una función propia.

Definición 20.10 *Una función $f : X \to Y$ se dice* **propia** *cuando la preimǵen $f^{-1}(K)$, de un conjunto compacto $K \subset Y$ es un conjunto compacto de X.*

El siguiente lema será de interés para probar que la función exceso de utilidad es propia.

Lema 20.11 *Las siguientes dos afirmaciones referidas a funciones $f : X \to Y$ continuas son equivalentes:*

1) *Para todo conjunto compacto $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ es compacto.*

2) *Si $\lim x_k = \infty$ entonces $\lim f(x_k) = \infty$. Debe entenderse que $\lim x_k = \infty$ cuando (x_k) no posee subsucesiones que converjan para puntos de X. En el caso particular en que $X = R \quad \lim x_k = \infty$ significa que $\lim |x_k| = \infty$.*

Demostración: Comencemos probando que 1 implica 2: Si alguna subsucesión de $f(x_k)$ convergiese a algún punto $y \in Y$ entonces el conjunto de los puntos $f(x_k)$ mas y sería compacto, luego su preimagen lo sería y en ese caso la sucesión x_k tendría subsucesiones convergentes en K. Ahora mostremos que 2 implica 1: Sea $K \subset Y$ compacto, luego por tener su imagen contenida en $f(K)$, toda subsucesión $x_k \in f^{-1}(K)$ posee una subsucesión x'_j convergente a un punto $x \in K$ (si tal subsucesión no existiera entonces, $\lim f(x_k) = \infty$.) Como $f(x) = \lim f(x'_k)$ y K es compacto, se tiene que $f(x) \in K$ por lo tanto $x \in f^{-1}(K)$ luego $f^{-1}(K)$ es compacto.

Teorema 20.12 *La función exceso de utilidad es propia.*

Demostración: La prueba sigue de ((18.2) item (2)). Allí se muestra que cuando una sucesión λ_n a la frontera del simplex la correspondiente sucesión $(e(\lambda_n))$ crece en norma indefinidamente. Luego se sigue que la función exceso de utilidad es propia.[]

Como la función e es acotada por arriba en cada coordenada ver 18.2 item 1 se sigue que al llegar a la frontera del ortante positivo, donde algunas coordenadas $\lambda_j, \quad j \in I \subset \{1, 2...., n\}$ de

$\lambda \in E^{n-1}$ se anulan, las coordenadas $e_h(\lambda_m)$ $h \in I$ deben tender hacia menos infinito. Por lo tanto $z_{hm} = e_h(\lambda_m)$ para $\lambda_m \to \lambda$ en la frontera del ortante positivo (∂E^{n-1}) debe ser negativo. Como λ en un vector no negativo con algunas coordenadas estrictamente positivas, precisamente aquellas que no pertenecen a I, de la igualdad $\lambda z = 0$ y como e_h apunta en la dirección negativa para cada $h \in I$ se sigue que z es un vector *hacia afuera.*

La continuidad de la función exceso de utilidad hace que su condición de vector *hacia afuera* se siga manteniendo también en el borde de $E_\epsilon^{n-1} = \{\lambda \in E^{n-1}; \lambda_i \geq \epsilon > 0, \ \forall i\}$.

Siendo $e(\lambda)$, la función exceso de utilidad de una economía regular, un campo de vectores tangente a la esfera (ver 18.2 item 4,) cuyos puntos singulares son finitos y no degenerados y que *apunta hacia afuera* en el borde del ortante positivo de la esfera E_ϵ^{n-1} de dimensión $n-1$, está en las condiciones del teorema de Poincare-Hopf ver 20.8 y por lo tanto vale la siguiente identidad:

$$1 = grad\ e = \sum_{\lambda : e(\lambda)=0} sign\left(\bar{det}\ Je(\lambda)\right). \tag{17}$$

Se deduce de la fórmula anterior que el número de puntos singulares no degenerados de e cuando la economía es regular es impar. Es decir que se tiene probado el teorema siguiente:

Teorema 20.13 *El conjunto de equilibrios de una economía regular tiene una cantidad impar de elementos.*

Corolario 20.14 (Una prueba más de la existencia del equilibrio) *Toda economía regular tiene al menos un equilibrio.*

Demostración: Debiendo ser el conjunto de puntos singulares impar debe existir al menos uno.

Como otra aplicación inmediata del teorema de Poincare-Hopf a la función exceso de utilidad obtenemos la siguiente **condición suficiente para la unicidad del equilibrio herramientas:** Si el determinante del jacobiano de la función exceso de utilidad e_w para dotaciones iniciales w es de signo constante entonces el equilibrio es único.

20.2 Ejemplos de economías con unicidad de equilibrios

Si bien la unicidad global del equilibrio es una propiedad altamente deseable por un economista, las economías en general no parecen tener esta virtud. Asegurada con hipótesis relativamente generales la unicidad local, la unicidad global requiere fuertes restricciones. El índice nos dará una guía para saber que propiedades debemos buscar Por ejemplo aquellas economías para las cuales el signo del determinante del jacobiano de la función exceso de utilidad es constante, tendrán un único equilibrio, es decir un único valor de λ para el que $e(\lambda) = 0$. Como anteriormente aquí consideramos al jacobiano de la función exceso de utilidad como una transformación lineal $Je(\lambda) : T_\lambda E_{++}^{n-1} \to R^{n-1}$, cuyo rango es $n-1$ por ser la economía regular.

Ejemplo 20.15 *Veamos que economías con utilidades C^2 (es decir con derivadas segundas continuas) estrictamente monótonas, con n agentes (a los que indexaremos por $i \in \{1, 2, ..., n\}$) y l bienes (indexados por $j \in \{1, 2, ..., l\}$,) si además se verifica la condición:*

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\left(x_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_{ij}}\right) > 0 \ \forall i, \ y \ \forall j \quad (*),$$

tienen un único equilibrio herramientas.

Por **utilidades separables** *entendemos utilidades para la que se cumple que*

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_{is}\partial x_{it}} = 0 \ \forall s \neq t.$$

El teorema de **Hawkins-Simon:** afirma que *si una matriz H es tal que $a_{ij} \leq 0 \ \forall i \neq j$,* (matriz de H-S) y si *existe un vector $x = (x_1.x_2, ...x_n)$ tal que $x_j \geq 0$ para todas sus coordenadas y no nulo, para el que Hx es positivo estrictamente en todas sus coordenadas (condición de H-S), entonces el determinante de la matriz H es positivo.* Ver [Takayama, A.]

Mostraremos que bajo las condiciones del ejemplo $Je(\lambda)$ es una matriz de H-S y que además para todo $\lambda \in \mathcal{E}q'$ $Je(\lambda)$ restringida a sus $n-1$ filas y columnas cumple la condición H-S. Entonces (por el teorema de Hawkins-Simon) el determinante de dicha matriz será positivo para todo $\lambda \in \mathcal{E}q'$, luego por (17) se obtiene la unicidad del equilibrio.

En el caso general de utilidades C^2 separables, partiendo de las condiciones de primer orden podemos escribir las igualdades:

$$\lambda_i\frac{\partial U_i}{\partial x_{ij}} = \lambda_h\frac{\partial U_i}{\partial x_{hj}}, \ \forall h \in \{1, 2, ..., n\} \ y \ j \in \{1, 2, ..., l\}.$$

Derivando con respecto a λ_i y teniendo en cuenta la separabilidad de las funciones de utilidad obtenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_{ij}} + \lambda_i\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_{ij}^2}\frac{\partial x_{ij}}{\partial \lambda_i} = \lambda_h\frac{\partial^2 U_h}{\partial x_{hj}}\frac{\partial x_{hj}}{\partial \lambda_i} = \ldots = \lambda_i\frac{\partial^2 U_{ni}}{\partial x_{nj}}\frac{\partial x_{nj}}{\partial \lambda_i}, \quad \forall i, \ \ y \ \forall j.$$

A partir de la estricta concavidad de las funciones de utilidad podemos concluir que si: $\partial x_{hj}/\partial\lambda_i > 0$ para algún $h \neq i$ entonces $\partial x_{kj}/\partial\lambda_i > 0$ para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Lo cual es imposible pues $\sum_{i=1}^n x_{ij} = w$ por lo que $\partial(\sum_{i=1}^n x_{ij})/\partial\lambda_i = 0$. Por lo tanto $\frac{\partial x_{hj}}{\partial \lambda_i} < 0$ cada vez que $h \neq i$ mientras que $\frac{\partial x_{ij}}{\partial \lambda_i} > 0$. $(**)$

Entonces de (16) se tiene, la siguiente identidad:

$$\frac{\partial e_i}{\partial \lambda_j} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x_{i1}}\left(x_{i1}\frac{\partial U_i}{\partial x_{i1}}\right), \frac{\partial}{\partial x_{i2}}\left(x_{i2}\frac{\partial U_i}{\partial x_{i2}}\right), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{il}}\left(x_{il}\frac{\partial U_i}{\partial x_{il}}\right) - \sum_{j=1}^{l} w_{ij}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_{ij}^2}\right].$$

De $(*)$ y $(**)$ se sigue que $\frac{\partial e_i}{\partial \lambda_j} < 0$ cada vez que $i \neq j$ a la vez que $\frac{\partial e_i}{\partial \lambda_i} > 0$, por lo tanto $Je(\lambda)$ es una matriz H-S. Para obtener la unicidad del equilibrio, a partir del teorema del índice, basta entonces verificar que para todo $\lambda \in \mathcal{E}q'$ el signo del jacobiano de la función exceso de utilidad se mantiene constante.

Si λ verifica $e(\lambda) = 0$ se tiene que: $Je(\lambda)\lambda = 0$ y $\lambda Je(\lambda) = 0$, (ver nota en la sección 19.3), por lo tanto $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial e_i}{\partial \lambda_j} = 0$, y por ser $\frac{\partial e_n(\lambda)}{\partial \lambda_j} < 0 \ \ \forall\, j \neq n$ se verifica:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left(\frac{\partial e_i}{\partial \lambda_j}\right) > 0.$$

Como λ es un vector estrictamente positivo, se tiene que la matriz $Je(\lambda)$ restringida a sus $n-1$ primeras filas y columnas verifica la condición H-S luego, por el teorema Hawkins-Smon, su determinante será positivo. La matriz $Je(\lambda)$ tendrá entonces en cada λ de equilibrio, un determinante de signo constante, aplicando ahora (17) llegamos a que el equilibrio será único **.**[]

Nota 20.16 *Obsérvese que la condición de Mitjushim-Polterovich, (M-P):*

$$-\frac{< x, \partial^2 u_i(x) x >}{< x, \partial u_i(x) >} < 4 \ \ \forall i$$

es un caso particular de (*), no obstante para obtener unicidad bajo la condición (M-P) no es necesario la separabilidad de las funciones de utilidad, [Accinelli, E. (96)]:

Ejemplo 20.17 Caso particular: *En el caso de una economía con 2 agentes con utilidades separables se sigue inmediatamente que si (*) es verificada entonces el determinante del Jacobiano de la función exceso de utilidad tiene signo constante (en este caso basta con considerar el signo de* $\frac{\partial e_i}{\partial \lambda_i}$*).*

Sugerimos como ejercicio para el lector considerar la economía con dos agentes y dos bienes cuyas utilidades son:

$$u_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} \quad y \quad u_2(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} + x_2^{\frac{2}{3}}$$

y verificar que se obtiene unicidad del equilibrio.

Conocidas algunas propiedades de las economías regulares particularmente las explicitadas en el teorema de unicidad local, nos interesa saber que tan general es la regularidad. Veremos a continuación que esta situación es típica, es decir que a menos de casos accidentales fijadas las preferencias casi toda dotación inicial define una economía regular.

21 Economías regulares y singulares

Contrastando con el caso de economías que presentan unicidad local y finitos equilibrios, aquellas con infinitos equilibrios, o con puntos singulares degenerados, es decir aquellos en los que además de anularse un campo de vectores tangente (en nuestro caso el representado por el campo e) se anula también el determinate del jacobiano de dicho campo, conforman un conjunto atípico. La herramienta matemática central para establecer este resultado será en estas notas el *teorema de transversalidad de Thom*, el que asegura que la regularidad de un determinado valor, es una propiedad que se mantiene estable frente a perturbaciones de la función diferenciable que lo define como tal. Dicho teorema afirma que el conjunto de funciones diferenciables perturbadas a partir de una original, para las cuales un determinado valor deja de ser regular, es *pequeño* en el sentido de que encontrar una de ellas es un accidente cuya probabilidad de ocurrencia (en el caso de que este concepto se pueda definir) es cero, pero aún si esto no es posible, se puede probar que su complemento es un conjunto muy pequeño del que diremos que es *magro*, sin interior, El texto de referencia básico para esta parte es [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

En [Debreu, G.] la generalidad de las economía regulares es decir economías con un número finito de equilibrios localmente aislados y estables en el sentido de que sus características no cambian por pequeñas perturbaciones de sus dotaciones iniciales fue establecido a partir del teorema de Sard que afirma que el conjunto de valores críticos de una función diferenciables es de medida nula. Estas técnicas de la topología diferencial fueron aplicadas a la función exceso de demanda. En estas notas utilizaremos como herramienta básica la función excesos de utilidad.. Dicho método de trabajo tiene el valor de ser fácilmente generalizable a economías con infinitos bienes, mientras que como ya fue dicho en espacios de dimensión infinita no es inmediata la existencia de una función de demanda, a la vez que permite introducir técnicas de topología diferencial en espacios de dimensión infinita. Veremos que si una determinada economía es regular, es decir el cero es un valor regular de e_w, donde w representa a las dotaciones iniciales de los agentes de esa economía, tal propiedad no se pierde por modificaciones pequeñas de tales dotaciones, por lo tanto las economías perturbadas siguen siendo regulares. Contrariamente a este comportamiento estable de las economías regulares, las s economías singulares serán aquellas que muestran cambios abruptos en su comportamiento estructural, por ejemplo abruptos cambios de precios y demandas de equilibrio y en general en el *orden social*, cambio éste, representado por grandes modificaciones de los pesos sociales de equilibrio $\lambda \in \mathcal{E}q'$. frente a pequeñas modificaciones de sus dotaciones iniciales tanto debido a una redistribución de las mismas como por aumento o decrecimiento de la riqueza social agregada representada por $\sum_{i=1}^{n} w_i = W$.

21.1 Más elementos del análisis y de la topología diferencial

Nuestro interés es el de resolver el sistema de n ecuaciones, con n variables endógenas, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ y nl variables exógenas w_{ij} que representan las dotaciones iniciales de cada agente en cada bien:

$$\begin{array}{ll} e_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; w_1, w_2, \ldots, w_n) = & 0 \\ e_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; w_1, w_2, \ldots, w_n) = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; w_1, w_2, \ldots, w_n) = & 0. \end{array} \tag{18}$$

Donde e_i representa la función exceso de utilidad del agente i, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ es un vector de pesos sociales y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ representa las dotaciones iniciales de los agentes.

Como ya fue dicho existe una relación de dependencia lineal entre las ecuaciones de 18, 18.2 item (4), de forma tal que sólo $n-1$ de ellas son linealmente independientes, que nos permite reducir el sistema a $n-1$ ecuaciones: Por otra parte como nos restringimos a valores de $\lambda \in E^{n-1}_{++}$ es posible trabajar con $(n-1)$ variables endógenas, la solución hallada para este sistema reducido, será también solución para el sistema completo. Consideraremos a la función exceso de utilidad como una función con dominio en el espacio producto formado por la semiesfera positiva E^{n-1} y R^{nl} con recorrido R^{n-1} es decir: $e(\cdot,\cdot) : E_{n-1} \times R^{nl}_{+} \to R^{n-1}$. El sistema 18, puede ser escrito en forma reducida como:

$$e(\lambda, w) = 0.$$

21.2 El teorema de transversalidad

El teorema de transversalidad nos permitirá mostrar que con mucha generalidad este sistema es resoluble estableciendo relaciones funcionales en las que λ representará el vector de variables dependientes (endógenas) mientras que w representará al conjunto de variables independientes (exógenas). Este teorema dice que si la matriz $M \times N$ de derivadas de $f : U_1 \times U_2 \to R^M$ donde $U_1 \subset R^M$, $U_2 \subset R^N$ $Df(x;q)$ evaluada en $(x,q) : f(v,q) = 0$ tiene rango M entonces para casi todo q la matriz de derivadas respecto a x, $D_x f(x;q)$ evaluada en $(x,q) : f(x,q) = 0$ tiene rango M. Este teorema no lo demostraremos aquí por exceder ampliamente los márgenes de estas notas, su demostración puede encontrarse en por ejemplo [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

En nuestro caso el lugar de f lo ocupará la función exceso de utilidad, siendo las variables λ y w, respectivamente pesos sociales y dotaciones iniciales. Es fácil verificar que la matriz $n-1 \times nl$ que define $De(\lambda, w)$ tiene rango $n-1$. Basta para ello derivar respecto de las variables w_{ij} con $i = 1, 2, ...(n-1)$ y segunda coordenada j fija.

Ahora usando el teorema de transversalidad podemos concluir que para casi toda dotación inicial $w \in R^{nl}$ la economía definida por $\mathcal{E} = \{\succeq_i; w_i; i = 1, 2, ..., n\}$ es regular.

Como inmediata consecuencia de la continuidad de la función determinante se sigue que si w define una economía regular, el número de elementos en E^{n-1} que anulan a la función $e(\dot{,}w) = 0$ es localmente constante.

De esta forma el conjunto de economías regulares se puede considerar como la unión de los abiertos en los que el número de equilibrios es constante, por lo tanto el complemento de este conjunto, es decir aquellas economías en las en todo entorno suyo el número de equilibrios cambia es un conjunto cerrado y como consecuencia del teorema de transversalidad de medida cero. Estas economías representadas por sus dotaciones iniciales son las economías singulares.

Un concepto central en la topología diferencial es el de transversalidad.

Definición 21.1 Funciones sobre variedades *Sean M y N variedades C^r Toda función (o mapa) $f : M \to N$ de clase C^r define en cada $x \in M$ una función linea $\partial f(x)$ que lleva T_xM en $T_{f(x)}N$, si tiene el mayor rango posible, decimos que f es*

- **Inmersión** *en el punto p si $dimM \leq dimN$.*
- **Submersión** *en el punto p si $dimM \geq dimN$.*

El concepto de mapa se usará como sinónimo de función.

Definición 21.2 *Sean M y N variedades y $f : M \to N$ una función C^r. Sea Z una subvariedad de N y x un punto de M. Entonces f intersecta transversalmente a Z en x si una de las siguientes condiciones es satisfechas:*

(a) $f(x) \notin Z$, *o*

(b) $f(x) \in Z$ *y además* $T_{f(x)}N = T_{f(x)}Z + \partial f(x)T_xM$

- *Si $A \subseteq Z$ decimos que f intersecta a Z transversalmente si f es transversal a Z para todo $x \in A$.*

Si $Z = \{z\}$ f transversal a Z significa que z es un valor regular para f.

Ejemplo 21.3 *Sea $M = R = Z$, $N = R^2$, y $f(x) = (x, x^2)$. Entonces f es transversal a Z para todo $x \neq 0$.*

Teorema 21.4 *(***Teorema de transversalidad:)** *Sean M, P, N y $Z \subset N$. (Solamente M puede tener borde. Supongamos que $f : M \times P \to N$ es una función C^r con $r > max[0, dimM + dimZ - dinN]$. Para toda $p \in P$ obtenemos una función $f_p : M \to N$ definida como: $f_p(x) = f(p, x)$. Entonces si f es transversal a Z se tiene que el conjunto de los $p \in P$ para los cuales f_p es transversal a Z es denso en P.*

Aplicando este teorema a la función $e : E^{n-1}_{++} \times \Omega \to R^n$, donde por Ω representamos el conjunto de consumo en este caso: $(R^l_+)^n = R^{ln}_+$, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 21.5 *El conjunto de las economías regulares es abierto y denso en Ω, concomitantemente el conjunto de las economías singulares es magro (unión numerable de conjuntos con interior vacío).*

Demostración: La prueba se obtiene a partir de la observación trivial de que $rankJ_we(\lambda, w) = n - 1$, luego el teorema de transversalidad considerando $M = E^{n-1}_{++},\ P = \Omega,\ N = R^{n-1}$ y $Z = 0$ permite concluir con que para casi todo w, $\bar{d}etJ_\lambda e_w(\lambda) \neq 0$ y por lo tanto la economía $\mathcal{E} = \{\succeq_i, w_i\}$ es regular.

A continuación profundizaremos en la caracterización del conjunto de equilibrios y obtendremos nuevas propiedades de las economías singulares.

21.3 Economías singulares

Comenzaremos esta sección caracterizando el conjunto de los pares $(\lambda, w) \in E^{n-1} \times \Omega$ para los que se cumple que $e(\lambda, w) = 0$.

Definición 21.6 *Llamaremos* **variedad social de equilibrio** *al conjunto:*

$$\mathcal{V} = \left\{(\lambda, w) \in E^{n-1}_{++} \times \Omega : e(\lambda, w) = 0\right\}$$

donde e es la función exceso de utilidad.

En términos de transversalidad el teorema de la función implícita puede enunciarse como sigue:

Teorema 21.7 (Teorema de la función implícita II) *Sea $f : M \to N$ una función de clase C^r. Si $Z \subset N$ una variedad sin borde, es tal que tanto f, como f restringida a la homogénea de M, $f/\partial M : \partial M$ son transversales a Z, entonces $f^{-1}(Z)$ es una variedad C^r, $\partial f_{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial M$ y además $dimf^{-1}(Z) = dimM - (dimN - dimZ)$, esto es $f^{-1}(Z)$ tiene en M la misma codimensión que Z en N.*

Como consecuencia del teorema de la función implícita II, obtenemos:

Teorema 21.8 *El conjunto $\mathcal{V}$ es una variedad de dimensión nl.*

Demostración: Para probar este teorema basta aplicar el teorema anterior a la función $e : E^{n-1}_{++} \times \Omega \to R^{n-1}$ considerando $Z = \{0\}$. Luego $e^{-1}(\{0\})$ será una variedad en las condiciones indicadas en el teorema de la función implícita.

Teorema 21.9 *Para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ se tiene que:*

$$\mathcal{V}_K = \Big\{(\lambda, w) \in E^{n-1}_{++} \times K : e(\lambda, w) = 0\Big\}$$

es una variedad compacta.

Demostración: Considere la sucesión $\{(\lambda_n, w_n)\}$ convergente a (λ, w), con $\lambda \in \partial E^{n-1}_{++}, w \in K$ por ser la función e continua si $|e(\lambda_n, w_n)|$ se mantuviera acotada se obtendría una contradicción con el hecho de ser $e(\cdot, w)$ una función propia.

Una **economía** $\mathcal{E} = \{u_i, w_i\}$ es **singular** si existe $\bar{\lambda}$ para el que $e(\bar{\lambda}, w) = 0$ y $rank J_\lambda e(\bar{\lambda}, w) < n-1$. El teorema de transversalidad nos muestra que casi toda economía es regular, referido a las propiedades de diferenciación esto dice que la función exceso de utilidad es generalmente todo lo buena que puede ser como función diferenciable, es decir que su jacobiano es una matriz de rango máximo en la mayoría de los casos, y por lo tanto los equilibrios de la economía presentan un comportamiento en general (típicamente) similar. Ahora nos ubicaremos desde la perspectiva del conjunto *raro* de los equilibrios fuera de este conjunto mayoritario, Nuestro interés se centrará ahora en las economías singulares. Si bien un conjunto pequeño como se desprende del teorema de transversalidad, son la economías singulares las responsables por los grandes cambios en el comportamiento de las economías. También son ellas las responsables por la existencia de la no unicidad global del equilibrio herramientas. Pues el número de equilibrios se modifica únicamente si existe un par $(\bar{\lambda}, w)$ para el que el rango de la matriz $J_\lambda e(\bar{\lambda}, w)$ disminuye, y esto sólo sucede en las singularidades, por lo tanto ellas determinan el cambio en el signo del índice de la función exceso de utilidad y la consecuente multiplicidad del equilibrio, como se desprende de la igualdad a 1 de la suma de los índices de la función e. La necesaria existencia del equilibrio, asociada al hecho de que si las dotaciones iniciales representan un óptimo de Pareto entonces el equilibrio herramientas es único, prueban el papel que cumplen las economías singulares como desencadenantes de la multiplicidad de equilibrios. Una **condición necesaria y suficiente** para la existencia de unicidad global dei equilibrio herramientas es que la matriz jacobiana de la función exceso de utilidad, una vez definidas las preferencias se mantenga de rango constante $n-1$ para toda dotación inicial de los agentes.

Describiremos a las economías por sus funciones exceso de utilidad, $e: E_{++}^{n-1} \times \Omega \to R^{n-1}$, donde Ω como ya fue indicado es el espacio producto formado por los espacios de consumo de cada agente, en nuestro caso estos serán R_{+}^{l-1}. Llamaremos a las variables $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ variables de estado, mientras que $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ serán llamadas variables de control o exógenas. En estado de equilibrio, establecidos los parámetros w los posibles valores de λ para los que $e(\lambda, w) = 0$ determinan el estado del sistema (el equilibrio en el que se encuentra la economía). Perturbaciones externas sobre los parámetros pueden hacer cambiar el equilibrio del sistema, pero generalmente pequeñas modificaciones en estos parámetros no alterarán demasiado al equilibrio, esto es lo que sucede estrictamente, pues estrictamente las economías son regulares. No obstante en ciertos casos pequeñas modificaciones en los valores de w pueden producir grandes cambios, esto sucede en las proximidades de una singularidad. Llamaremos **catástrofe** a una transición brusca de un estado a otro de equilibrio producido por modificaciones pequeñas de los parámetros. Clasificaremos a las singularidades en primera aproximación en dos grandes clases, equilibrios singulares (o críticos) no degenerados, y equilibrios singulares (o críticos) degenerados. Esta distinción queda básicamente definida por el corango de la matriz jacobiana de la función exceso de utilidad. Mientras que los primeros son de corango 1, los restantes son de corango mayor que 1. En general el corango es una medida de cuan degenerado es un valor crítico. A los efectos de introducir la teoría de catástrofes en e conomía permitasenos considerar el siguiente ejemplo, de gran generalidad como luego veremos.

Ejemplo 21.10 *Consideremos una economía de dos agentes con dos bienes, con dotaciones iniciales* $w_i = (w_{i1}, w_{12})$; $i = 1, 2$. *Supondremos que la dotación inicial agregada (oferta agregada) está fija, sea esta* $W = (W_1, W_2)$. *Será entonces*

$$W_j = w_{1j} + w_{2j}, \ j = 1, 2 \ \ (*)$$

siendo w_{ij} *la dotación inicial en el bien* j *del agente* i. *Las dotaciones iniciales pueden sufrir redistribuciones pero supongamos momentaneamente que el total no puede ser modificado, es decir* W *es un vector cuyas coordenadas son constantes.*

La variedad de equilibrios quedará representada aquí por:

$$\mathcal{V}_W = \left\{ (\lambda, w) \in E_{++}^{n-1} \times \Omega, : e(\lambda, w) = 0, \ w_{1j} + w_{2j} = W_j; j = 1, 2 \right\}$$

El equilibrio quedará caracterizado por los $(\lambda, w_{i1}, w_{i2})$ *para los que* $e_i(\lambda, w_{i1}, w_{i2}) = 0$, *siendo suficiente considerar, por la ley de Walras, solamente la función exceso de utilidad de uno de* *los agentes. Además conocida una de las coordenadas de λ conoceremos la otra por ser λ es un elemento de E^1_{++} λ un elemento de E^1_{++}, por lo tanto consideraremos a la función exceso de utilidad del agente i como función solamente del correspondiente valor de λ. Conocidas las dotaciones iniciales de uno de los dos agentes la condición (*) permite determinar , las correspondientes dotaciones del otro agente.*

Supongamos que la función exceso de utilidad del agente 1 es:

$$e_1(\lambda_1, w_{11}, w_{22}) = 3W_1\lambda_1 - 3w_{11}(\lambda_1)^{\frac{1}{3}} + w_{22}. \tag{19}$$

En términos de la teoría de catástrofes λ_1 es la variable de estado mientras que w_{11} y w_{22} serán en este caso los parámetros.

Los equilibrios de esta economía serán entonces los valores de $(\lambda_1, w_{11}, w_{22})$ que anulen 19 y los correspondientes $(\lambda_2, w_{21}, w_{12})$ obtenidos a partir de ellos.

Llamaremos **superficie de catástrofe** a

$$C_F = \{(\lambda_1, w_{11}, w_{22}) : \bar{d}et J_{\lambda_1} e_1(\lambda_1, w_{11}, w_{22}) = 0\}.$$

Las economías cuyas dotaciones iniciales pertenezcan a este conjunto serán llamadas singulares. En este caso la superficie de catástrofes queda definida por:

$$C_F = \left\{(\lambda, w_{11}, w_{22}) : \frac{\partial e_1}{\partial \lambda_1} = 3W_1 - w_{11}\lambda_1^{-\frac{2}{3}} = 0\right\}.$$

Explícitamente:

$$C_F = \left\{\left(\frac{w_{11}}{3W_1}\right)^{\frac{3}{2}}, \;\; w_{11}, \;\; \frac{2(w_{11})^{\frac{3}{2}}}{(3W_1)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Proyectando en el espacio de parámetros obtendremos el llamado **Conjunto de Bifurcación:**

$$B_F = \left\{w_{11}, \; \frac{2(w_{11})^{\frac{3}{2}}}{(3W_1)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Este conjunto queda representado en el espacio de parámetros w_{11}, w_{22} por una parábola, al atravesar la cual el número de equilibrios de la economía cambia. Las economías cuyas dotaciones iniciales pertenecen a este conjunto son la economías singulares. Al atravesar esta curva la cantidad de equilibrios se modifica de 1 a 3 o recíprocamente.

El nḿero de equilibrios queda determinado por el discriminante

$$\Delta = 27\left(\frac{w_{11}}{W_1}\right)^2 - 4\left(\frac{w_{22}}{W_1}\right)^3$$

de esta manera obtenemos que si:

- $\Delta < 0$ existen tres equilibrios regulares.
- $\Delta > 0$ existe un equilibrio regular
- $\Delta = 0,\ w_{11}w_{12} \neq 0$ un equilibrio crítico (o singular) y uno regular.

La matriz hessiana de la función considerada es singular, como veremos más adelante esto prueba que el equilibrio crítico es degenerado.

La moderna teoría de catástrofes, nos muestra que es posible reducir el análisi s de las catástrofes a unos pocos casos típicos. Entendemos que conocer los posibles conjuntos de catástrofe que pueden aparecer en una economía en particular ayudaría a predecir las posibles modificaciones abruptas que dicha economía puede sufrir. Dedicaremos la siguiente sección a analizar algunos aspectos de dicha teoría y sus aplicaciones a la Economía.

22 Catástrofes y economía

La Teoría de Cataśtrofes muestra que es posible reducir a unos pocos casos paradigmáticos el comportamiento de sistemas *cuasiestáticos* en las proximidades de sus singularidades. Comenzaremos analizando el caso maś sencillo de funciones reales. En este caso las economías serán economías de dos agentes, que pueden ser caracterizadas plenamente por el comportamiento de una de las dos componentes de la función exceso de utilidad. Veremos que en este caso, el comportamiento de las economías en las proximidades de un equilibrio crítico no degenerado, queda totalmente determinado por el teorema de Morse, mientras que en el caso de equilibrios críticos o singulares degenerados, si los parámetros relevantes no son más de cuatro, una de las llamadas **7 catástrofes elementales** describen completamente dicho comportamiento, [Castrigiano, D.; Hayes, S.].

Luego analizaremos casos un poco más generales, especialmente las llamadas singularidades de tipo **con pliegues** y las de tipo **cúspide.** Entendemos que el estudio del comportamiento económico a partir de consideraciones provenientes de la teoría de catástrofes, puede ser de ayuda para comprender y prever posibles cambios bruscos futuros en el desarrollo de una economía. La descripción cuasi estática de los fenómenos propia de la teoría de catástrofes se adapta bien a las características similares de la teoría económica.

Nota 22.1 Notación: *A lo largo de esta sección diremos que una función ϕ es:*

- **suave** *o* **de clase** C^∞ *si para todo entero k es diferenciable k veces.*
- $C^\infty(X,Y)$ *si es diferenciables de cualquier orden de X en Y.*

22.1 Economías con dos agentes

Consideraremos economías con dos agentes y l bienes, en este caso la economía queda caracterizada por las dotaciones iniciales de los agentes w y basta considerar (por la l ey de Walras) una de las dos componentes (e_i por ejemplo) de la función exceso de utilidad como función de las dotaciones iniciales y (por la homogeneidad de grado cero de la función exceso de utilidad) el valor de λ correspondiente a uno de los agentes (por ejemplo λ_i).

Sea entonces $e_i.(0,1)\times\Omega \to R$ es decir e_i pone en correspondencia $(\lambda_i, w) \to e_i(\lambda_i, w)$.

Definición 22.2 *Una* **función** f *se dice* **de Morse** *si el conjunto de singularidades de* f *es no degenerado.*

Teorema 22.3 *Sea* X *una variedad diferenciable. Entonces el conjunto de funciones de Morse es un conjunto abierto y denso dentro del conjunto* $C^\infty(X, R)$*.*

Demostración: Es resultado inmediato del teorema de transversalidad.

A continuación veremos que el comportamiento de las economías de dos agentes en las proximidades de equilibrios críticos no degenerados, está totalmente determinado por el teorema de Morse.

Teorema 22.4 (Teorema de Morse) *Sea* $f : X \to R$*. Entonces* p *es un punto crítico no degenerado de* f *si y solamente si existe un difeomorfismo* ψ *local (en un entorno* U_p *de* p*) tal que:*

$$f\left(\psi(y)\right) = f(p) - y_1^2 - \ldots - y_s^2 + y_{s+1}^2 + \ldots + y_n^2 \tag{20}$$

se cumple para todo $y \in U_p$*.*

Nota 22.5 *Por definición:* s *y* n *son el índice y el rango de* f *en* p*.*

Aplicado a las economías que aquí estamos considerando, el teorema de Morse nos permite decir que en las proximidades de un equilibrio crítico no degenerado, el comportamiento de las funciones exceso de utilidad será análogo. Obsérvese que cambios en los parámetros que impliquen difeomorfismos no modifican el carácter de la singularidad de un punto, de ahí que pueda decirse que economías que no presenten equilibrios singulares degenerados se comporten similarmente (a menos de difeomorfismos) en las proximidades de la singularidad. La existencia y características particulares de los equilibrios críticos degenerados propios de cada economía, diferencian los comportamientos de los sistemas económicos en las vecindades de los equilibrios críticos. Veremos que es posible diferenciar grados de degeneración de los equilibrios críticos y que es posible clasificar a las economías según tal característica que depende verificarse de sus fundamentos, en particular de las preferencias de los agentes.

El teorema de Morse, nos permite decir entonces, que en las proximidades de un equilibrio crítico no degenerado $(\bar{\lambda}, \bar{w})$ existe un difeomorfismo ϕ, tal que localmente la función exceso de utilidad tiene la forma:

$$e_i(\psi(\bar{\lambda}_i, \bar{w})) =^{+} -\bar{\lambda}_i - \bar{w}_1^2 - \ldots - \bar{w}_s^2 + \bar{w}_{s+1}^2 + \ldots + \bar{w}_n^2.$$

Para las economías consideradas $n = 2l$, pues cada $\bar{w}_j$ representa a una de las coordenadas de las dotaciones iniciales de los agentes.

Como puede verificarse ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.] Un punto crítico p de f es no degenerado sí y solamente sí la matriz Hessiana es invertible. Por lo tanto esta caracterización da una forma sencilla de saber si un equilibrio crítico es o no degenerado.

Recordemos que la matriz hessiana de f es la matriz

$$\partial^2 f = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\}.$$

El siguiente teorema es un corolario del teorema de la función inversa.

Teorema 22.6 *Los puntos críticos no degenerados son puntos aislados.*

Demostración: Sea p un punto crítico no degenerado de f y sea $\phi = \partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$. Entonces $J\phi(p) = \partial^2 f(p)$ es invertible y por lo tanto ϕ es un difeomorfismo local en p. Luego por el teorema de la función inversa existen abiertos U que contiene a p y V de $\phi(p)$ donde phi es inyectiva. Esto implica que $\partial f(x) = \phi(x) \neq \phi(p) = \partial f(p) = 0$.

En consecuencia, como los equilibrios regulares, los equilibrios críticos no degenerados serán localmente únicos, y en cantidad finita si las dotaciones iniciales están definidas en un subconjunto compacto del espacio de consumo.

Para funciones de Morse vale que, el conjunto de ellas cuyos valores críticos son diferentes es residual, ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

Recordamos que un conjunto es llamado residual si es intersección numerable de conjuntos abiertos densos. De esta forma la probabilidad de economías con múltiples equilibrios singulares es nula. Más formalmente, el conjunto de las economías de dos agentes con múltiples equilibrios singulares. es *raro*, es decir es complementario de un conjunto residual.

22.2 Otras singularidades

A continuación consideraremos y posibilidades de ocurrencia de singularidades en casos más generales. La caracterización de los equilibrios de una determinada economía depende del comportamiento de la matriz jacobiana de la función exceso de utilidad en el punto en cuestión, en primer término, el hecho de que su rango sea menor que el esperado nos dice si el equilibrio es o no crítico. El grado en que disminuya el rango de dicha matriz, es una medida de la degeneración del equilibrio cr'ıtico.

Las similitudes en el comportamiento en un entorno de una punto, presentadas por funciones cuyos polinomios de Taylor coinciden en dicho punto, será la base para la clasificación de las singularidades.

Entramos aquí de lleno en un problema central de la Teoría de Catástrofes, a saber cuando una función $C^{\infty}(X,Y)$ está **determinada** en el entorno de un punto, es decir, cuándo funciones que tienen el mismo desarrollo de Taylor en un punto p coinciden, a menos de un cambio de coordenadas producido por un difeomorfismo en un entorno de un punto. En general esto no sucede, las condiciones necesarias y suficientes para que una función quede caracterizada por su k-ésimo polinomio de Taylor están dadas en [Mater, J.]. En estas notas no alcanzaremos a tratar este punto, no obstante veremos que funciones que presenten polinomios de Taylor iguales hasta cierto grado (a menos de difeomorfismos en sus coordenadas) presentarán un comportamiento similar en las proximidades de sus puntos críticos degenerados.

Daremos a continuación algunas definiciones y notación básica de la Teoría de Catástrofe, imprescindibles para continuar con nuestro trabajo de clasificación de singularidades.

Definición 22.7 Germen. *Sean X e Y variedades diferenciables $F_1,\ F_2 : X \to Y$ funciones diferenciables, tales que $F_1(p) = F_2(p) = q$. Diremos que ambas funciones son equivalentes si coinciden en un entorno de p, el espacio de clases de equivalencia así definido, será llamado espacio de Gérmenes, siendo $[F]_p$ el* **germen** *de F* **en p** *la clase de equivalencia correspondiente a F.*

Notaremos como **E** al espacio de gérmenes. La determinación es local, el punto en el que está considerado el germen será explicitado cuando haya riesgo de confusión

Definición 22.8

- *Sea k un entero no negativo. Dos gérmenes $[f]$ y $[g]$ en* **E** *se dicen* **k-equivalentes** *en p $D^h f(p) = D^h g(p)$ para todo h tal que $|h| < k$.*
- *La clase de los gérmenes k-equivalentes con $[f]$ es llamada el* **k-jet de** *$[f]$ y es denotada por $j^k[f(p)]$.*

- *Notaremos por* $J^k(X,Y)_{p,q}$ *al espacio de clases de gérmenes k-equivalentes en* p, *esto es el espacio de k- jets con fuente* p *y objetivo* q.

- *Un elemento*
$$\sigma \in \quad J^k(X,Y) = \cup_{(p,q)\in X\times Y} J^k(X,Y)_{p,q}.$$
es llamado **k-jet.**

Si X e Y son variedades diferenciables con $n = dimX$ y $m = dimY$ entonces $J^K(X,Y)$ es una variedad diferencial cuya dimension es igual a $n+m+\mathcal{P}$ donde $\mathcal{P}$ es la dimensión del espacio formado por la suma directa de todos los polinomios de grado menor o igual que k con no más de m variables.

Obsérvese que cualquier función exceso de utilidad, puede presentar valores críticos que no sean el cero, es decir un determinado valor $K \in R^{n-1}$ puede ser crítico para la función e en el sentido de que existan puntos , preimágenes por e de K donde el Jacobiano se anule. Únicamente serán equilibrios aquellos puntos $(\lambda, w) \in E^{n-1}_{++}$ que anulen a la función e. Es decir solamente los k-jet σ con objetivo cero, $\sigma \in J(X,Y)_{p,0}$ donde $X = E^{n-1}_{++} \times \Omega$ e $Y = R^{n-1}$. sean los que representan el comportamiento de la función exceso de utilidad en las proximidades de los equilibrios.

Nota 22.9 Notación

- *Aquí* $D^h f$ *define las derivadas* $\frac{\partial^{|h|} f}{\partial x_1^{h_1} ... \partial x_n^{h_n}}$ *donde* $|h| = \sum_{j=1}^{n} h_j$ *considerando todas las posibles formas de sumar* $|h|$ *con* $h_i \geq 0 \ \ i = 1,2,...,n$.

- *A los efectos de evitar confusiones con la notación representaremos de ahora en más a la matriz jacobiana de* f *evaluada en* p *por* $(\partial f)_p$.

- *Como rank*$(\partial f)_p$ *notaremos el rango de la matriz jacobiana en* p. *Representa el número máximo de columnas o filas linealmente independientes que la matriz posee.*

- *Definimos el rango de* σ *como rank* $\sigma = rank(\partial f)_p$ *y corank* $\sigma = q - rank\ \sigma$ *donde* $q = min\{dimX, dimY\}$.

Sea $f : X \to Y$ un elemento representativo de σ, existe un mapa $j^k f : X \to J^K(X,Y)$ tal que a cada punto $p \in X$ lo pone en correspondencia con $j^k f(p)$ la clase de equivalencia de f en $J^k(X,Y)_{p,f(p)}$. En nuestro caso nos interesa prestaremos especial atención a la clase de correspondencia $J^k e(p)$, que el mapa $J^k e$, asigna a cada punto $p = (\lambda, w)$ de equilibrio.

Cada $\sigma \in J^1(X,Y)$ define un único mapa lineal de $T_pX \rightarrow T_qY$, el que queda determinada por la transformación lineal que el jacobiano evaluado en $p \quad (\partial f)p$, de cualquier elemento $f \in C^\infty(X,Y)$, representativo deσ.

Sea:

$$S_r = \left\{ \sigma \in J^1(X,Y) : corank\ \sigma = r \right\}$$

el subconjunto de $J^1(X,Y)$ formado por las clases de equivalencia de todas las funciones $f : X \rightarrow Y$ suaves, cuyo corango es r, es decir por los jets de corango r. Puede probarse que este conjunto es una subvariedad de $J^1(X,Y)$, con $codim\ S_r = (n - \mu + r)(m - \mu + r)$, ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

La codimensión de las singularidades de tipo S_r descarta su ocurrencia en el caso de funciones entre variedades de rango menor que el corango de la variedad. De esta forma economías de dos agentes con a lo sumo dos parámetros no presentarán singularidades diferentes de las que en S_1 pueden existir. Veremos que estas sólo pueden ser o tipo pliegue o tipo cúspide.

El conjunto de singularidades de f en los que el jacobiano de f resulta de corango r se representará por $S_r(f) = (j^1 f)^{-1}(S_r)$. De esta manera $S_r(e)$ representará el conjunto de los puntos críticos de e nuestro interés radica en el estudio del comportamiento de la función exceso de utilidad en las proximidades de los equilibrios críticos, es decir de aquellos puntos de la variedad $X = E_{++}^{n-1} \times \Omega$ donde no solamente el jacobiano tiene determinante nulo (es decir el rango no es total), sino donde a la vez la función toma el valor cero.

Definición 22.10 *Sea $f : X \rightarrow Y$ tal que $(j^1 f)$ es transvesal a S_1. Entonces x en $S_1(f)$ es un punto de pliegue si $T_x S_1(f) \oplus Ker(\partial f)_x = T_x X$.*

El estudio de los equilibrios críticos no degenerados supone el análisis de $S_1(e)$ es decir del preimagen por $j^1 e$ del conjunto de jets de corango 1 con objetivo 0..

Sea $f : X \rightarrow Y$ siendo $dimX \geq dimY$ y $\mu = dimX - dimY$. En el caso de ser $j^1 f$ transversal a S_1 tendremos que $S_1(f)$ será una variedad cuya codimensión satisface:

$$codimS_1(f) = codimS_1 = \mu + 1$$

ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.]. Note que la dimensión en un punto x de $S_1(f)$ del $ker(\partial f)_p$ es $\mu + 1$. Es decir el espacio tangente a $S_1(f)$ y el $ker(\partial f)_p$ tienen dimensiones complementarias.

Siendo e la función exceso de utilidad tendremos que el conjunto de singularidades de la función exceso de utilidad es una variedad de $codimS_1(e) = nl + 1$, de la cual es subconjunto el conjunto de los equilibrios críticos no degenerados.

22.3 Economías con tres agentes

Obsérvese que a una economía con tres agentes corresponde una función exceso de utilidad que pone en correspondencia dos variedades de dimensión 2, el simplex 2-dimensional (como dominio de la función) con R^2 (su recorrido). En el caso de economías como las presentadas en el ejemplo de la sección (21.3) y en general para mapas entre variedades de dimensión 2, las únicas singularidades posibles son del tipo $S_1(e)$, pues $S_2(e)$ no puede ocurrir desde que su codimensión es 4. Es posible demostrar que genericamente, sólo pueden existir dos tipos de comportamientos en las proximidades de singularidades, o de equilibrios críticos:

- $T_pS_1(e) \oplus Ker(\partial e)_p = T_pX$.
- $T_pS_1(e) = Ker(\partial e)_p$

Luego de cambios de los cambios pertinentes en las coordenadas veremos que, la primera ocurrencia representará una singularidad de tipo pliegue y la segunda una de tipo cúspide. Las funciones que presentan solamente este tipo de singularidades son llamadas excelentes, la clasificación fué hecha por Whitney, y su papel en economías con tres agentes es el análogo al jugado por las funciones de Morse en el caso de economías con dos agentes. El ejemplo presentado en la sección (21.3) es representativo del comportamiento de las economías en las proximidades de sus equilibrios críticos degenerados.

El comportamiento de las fnciones en las proximidades de las singularidades tipo pliegue queda caracterizado por el siguiente teorema.

Teorema 22.11 *Sea $f : X \to Y$ una submersión con pliegues y sea $p \in S_{(f)}$. Entonces existe un sistema de coordenadas $x_1, x_2, ..., x_n$ centrado en p ye $y_1, y_2, ...y_n$ centrado en $f(p)$ tal que en estos sistemas f tiene la forma:*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to (x_1, x_2, ..., x_{m-1}, x_m^2 \pm ... \pm x_n^2)$$

La demostración puede verse en [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

La forma local que adquiere la función en un entorno de la singularidad p, justifica el nombre de pliegue. Obsérvese que en el caso de considerar solamente variedades de dimensión 2, la forma normal (local) de la función en el sistema de coordenadas señalado en el teorema , está dada por $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2^2)$. Esta transformación se puede obtener haciendo las siguientes operaciones geométricas:

1) Primeramente se mapea el plano (x_1, x_2) en el cilindro parabólico $x_3 = x_2^2$ del espacio (x_1, x_2, x_3) por el mapa $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2, x_2^2)$, es decir se **pliega** el plano,

2) y ahora proyectamos en el plano (x_1, x_3). Completando así el plegado.

Obsérvese que en este caso $S_1(f)$ será un variedad de dimensión 1 cuyo plano tangente se mantiene ortogonal al plano x_2, x_3 que coincide con el $ker(\partial f)_p$

Nótese también que en el caso de ser $Y = R$ el conjunto de las submersiones con pliegues son precisamente las funciones de Morse.

Si bien es posible continuar con el análisis de los equilibrios críticos mediante técnicas provenientes de la teoría de catástrofes, pondremos acá punto final a estas notas, pues proseguir supone la utilización de técnicas complejas de la teoría de catástrofes lo que escapa de los objetivos de perseguidos aquí.

Esperamos que las notas sean motivadoras del estudio de la economía y su formalización, y que hayan mostrado las posibilidades que abre al conocimiento del comportamiento de los sistemas económicos la utilización adecuada de técnicas matemáticas.

23 Conclusiones

Dado que el análisis de las singularidades es de entre todos los temas tratados en estas notas el menos conocido, incluiremos unas breves consideraciones finales sobre el mismo: En primer lugar hay que decir que no hay muchos trabajos que analicen las singularidades, el trabajo de [Balasko, Y.] es referencia obligada, más reciente es: [Accinelli, E. Puchet, M.]. Creemos que en general el estudio de los equilibrios críticos profundizaría nuestro conocimiento actual sobre el comportamiento de las economías, en particular la utilización para la consideración del tema, de la función exceso de utilidad da gran generalidad al análisis por su amplias posibilidades de aplicarse en forma análoga a economías con infinitos bienes. El método pone en evidencia además la fuerte relación existente entre las funciones de utilidad de los agentes y comportamientos inesperados, catastróficos, de las economías.

La teoría de catástrofes permite nuevas clasificaciones en las economías, mas allá de la división entre regulares y singulares, muestra la existencia de diferencias fuertes dentro de las economías singulares. Podemos caracterizar a las economías por medio de sus equilibrios críticos, hecho este que esperamos haber dejado entrever: *economías con el mismo tipo de equilibrios críticos presentan similitudes estructurales fuertes, que se reflejan en su comportamiento, en el momento de cambios abruptos.* Este hecho da la posibilidad de agrupar a las economías en tipos diferentes de acuerdo a sus singularidades. Agrupando en una misma clase de equivalencia, aquellas que presenten las mismas singularidades, pues su comportamiento será muy parecido. El conjunto de las economías posibles podría dividirse en clases según el tipo de singularidades presentes haciendo abstracción de otras diferencias. La presencia directa de las funciones de utilidad de los agentes en la función exceso de utilidad muestra que ellas son las responsables de última instancia del comportamiento de los sistemas económicos y sus modificaciones lentas o abruptas.

References

[Accinelli, E. Puchet, M.] "Could catastrophe theory become a new tool in understanding singular economies?" New tools of Economic Dynamics, Leskow Jacek, Puchet Martin and Punzo Lionello eds. Springer-Verlag 2005. Serie: Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, vol. 551, capítulo: 8.

[Accinelli, E. (2002)] *Existence of GE: Are the cases of non existence a cause of serious worry* General Equilibrium: Problems and perspectives, edited by F. Petri y F. Hahn. Ch. 1, pp 35-57. *Routledge Siena Studies in Political Economy* (2002).

[Accinelli, E.(99)] *On Uniqueness of Equilibrium for Complete Markets with Infinitely Many Goods and in Finance Models* Estudios de Economía, Vol 26. No 1 juno 1999.

[Accinelli, E. (96)] *Some Remarks on Uniqueness of Equilibrium in Economies with Infinitely Many Goods.* Estudios Económicos vol **6** 1996.

[Aliprantis, C.D.;Border, K. C.] *Infinite Dimensional Analysis.* Springer-Verlag, 1994.

[Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkinshaw, O.] *Existence and Optimality of Competitive Equilibrium.* Springer-Verlag, 1990.

[Araujo, A. (89)] *The Non-Existence of Smooth Demand in General Banach Spaces.* Journal of Mathematical Economics, **17,** 1 - 11.

[Araujo, A. (83)] *Introducao a Economia Matematica.* Proyecto Euclides.

[Arrow, K. J.] *Social Choice and Individual Values,* 2da ed. New York, Willey.

[Arrow, K. Debreu, G.] *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.* Econometrica 22, 265-290; 1954.

[Balasko, Y.] *Foundations of the Theory of General Equilibrium* Academic Press, INC. 1988.

[Berge, C.] *Topological Spaces.* N.Y Macmillan, 1963.

[Castrigiano, D.; Hayes, S.] *Catástrophe Theory.* Adisson-Wesley Publishing C. 1993.

[Debreu, G.] *Theory of Value.* Yale University Press, 1959.

[Fishburn, P.C] *Utility for Decision Making.* N.Y. Willey, 1970.

[Green, J.; Heller, W.P.] *Mathematical Analysis a Convexity with Applications to Economics.* Handbook of Mathematical Economy, vol 1. Elsevier 1981.

[Golubitsky, M. Guillemin, V.] *Stable Mappings and Their Singularities.* Springer-Verlag, New York -Hedelberg-Berlin, 1973.

[Guillemin, V. Pollak, A.] *Differential Topology.* Englegood Cliff, NJ: Prentice-Hall, 1974.

[Halmos, R.P.] *Naive Set Theory.* New Yoek, Springer-Verlag, 1974.

[Karatzas, I; Lakner, P; Lebocky, J.; Shreve, S.] *Equilibrium in a Simplified Dynamic, Stochastic Economy with Heterogeneous Agents* Stochastic Analysis, Academic Press Inc. 1991.

[Kelley, J.L.] *General Topology.* New York, Von Nostrand, 1955.

[Lima, E.] *Curso de Análise* Vol 2. Ed. IMPA, Projeto Euclides, 1981.

[Mas-Colell, A. Whinston, M.] *Microeconomic Theory.* Oxford 1995.

[Mas-Colell, A. Zame, W.] Handbook of Mathemaical Economy, vol 4. Elsevier 1991

[Mas-Colell, A. 1986] *The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Spaces.* Econometrica **54** 1039-1053.

[Mas-Colell, A.] *General Equilibrium: A Differentiable Approach.* Cambridge 1985.

[Mater, J.] Stability of c^∞ mappings: III. Publ. Math. IHES 35, 1968, 127- 156.

[Mendelson, B.] *Introduction to Topology.* Dover Publications Inc. (tercera edición) 1975.

[Milnor, J.] *Topology from the differentiable Viewpoint.* Charlottesville:University Press, Virginia, 1965.

[Negishi, T.] *Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.* Metroeconomica 12, 1960.

[Suppes, P.] *Teoría Axiomática de Conjuntos.* Editorial Norma, 1968.

[Sen, A.] *Social Choice Theory.* Ch 22 Handbook of Mathematical Economics, 1986. North Holland.

[Schaffer, H.H] *Topological Vector Sppaces.* Ed. Board, 1964.

[Takayama, A.] *Mathematical Economy.* Dryden Press, 1974.

[Walras, L.] *Elements d' Economie Politique Pure.* Lausanne, París, 1900.

[Zeeman, C.] *Uma Introducao Informal À Topología das Superficies.* Monografías de Matemática No. 20 IMPA.