UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSI
FACULTAD DE ECONOMÍA

CUADERNO DE TRABAJO
No. 23

Notas de clase para el curso de Dinámica de la Maestría en Economía Matemática

Junio 2019

ELVIO ACCINELLI GAMBA
ARMANDO GARCÍA MARTÍNEZ

Notas de clase para el Curso de Dinámica de la Maestría en Economía Matemática

Elvio Accinelli Gamba
Armando García Martínez
Facultad de Economía UASLP

Abril del 2019

Introducción

Durante los últimos años la teoría económica se ha orientado en forma creciente hacia los problemas de toma de decisiones, consumidores que maximizan utilidades, propietarios que maximizan beneficios, trabajadores que buscan las mejores oportunidades, planificadores que buscan las mejores oportunidades para sus empresas, etc... Consecuentemente la optimización, ya sea dinámica o estática, cobra un interés creciente en Economía. Esta tendencia es explicable y posible por la creciente formalización de la teoría económica y la posibilidad de obtener resultados relativamente precisos a partir de una técnica matemática cada vez más dúctil y rica.

Ciertamente la teoría económica requiere de suficiente generalidad en sus supuestos para que representen o se acerquen en forma satisfactoria a lo que se llama la realidad. En la medida en que la matemática consigue generalizar sus supuestos y resultados otras teorías encuentran en ella una posibilidad de explicar hechos que son propios no de la matemática sino de las teorías que buscan una expresión más formal de sus supuestos y conclusiones. Entre ellas la teoría económica.

El propósito de este texto es exponer de manera clara y asequible los temas del curso de Dinámica para los estudiantes de la maestría en Economía Matemática que se imparte en esta facultad.

Por la diversidad del origen y la formación académica previa, asumimos que los estudiantes no son especialistas en estos temas. El objetivo que buscamos es que cuenten con los elementos adecuados de (1) Ecuaciones diferenciales (con un enfoque cualitativo del comportamiento de las soluciones de las mismas) y de (2) Optimización estática y dinámica, para comprender, analizar y trabajar con muchos de los principales modelos dinámicos que aparecen en el estudio de la Economía Matemática.

Las ecuaciones diferenciales representan, muchas veces, una abstracción de importantísimo valor descriptivo y previsor de la evolución de sistemas que se modifican con el tiempo de acuerdo a leyes determinadas. Como toda teoría es un distanciamiento de la realidad, existente objetivamente, y por lo tanto perfectible. Hablamos de una evolución teórica que puede o no ser confirmada por la tozudez de los hechos llamados reales a los que dice representar.

Tanto en Macroeconomía como en Microeconomía, las ecuaciones diferenciales están presentes y son una importante herramienta para el análisis económico, particularmente en la Teoría del Desarrollo y en el análisis del comportamiento de la economía a partir de la llamada Ley de la Demanda, como en el estudio de políticas estabilizadoras. En tanto que dicha Ley aparece en populares teorías como rectora del devenir económico, parece coherente que una teoría económica le dedique algún capítulo de su discurso, aunque sea para rebatir su existencia como hecho real.

Resulta paradógico que no se pueda decir, en primera instancia, nada acerca del cumplimiento o no de una de las leyes más famosas de la teoría económica. Por otra parte, el hecho de ser muy amplia la clase de las funciones que cumplen con los requisitos esenciales para ser una función demanda, a saber cumplir con la ley de Walras y ser homogénea de grado cero, hace que restringirse al estudio de determinadas ecuaciones diferenciales, en la teoría económica, suponga despreciar una cantidad importante de información que está contenida en al función de demanda. Así, por ejemplo, las posibles trayectorias de un sistema dinámico $\dot{p} = kf(p)$ pueden ser muy complicadas, lo que hace que su análisis no siempre determine buenas aproximaciones, pues pequeños errores de medida en el momento inicial pueden conducirnos a desviaciones importantes del equilibrio, pues sin pérdida de generalidad, no hay seguridad en la convergencia de las soluciones.

De cualquier manera, las ecuaciones diferenciales han sido y son ampliamente usadas (y con éxito) en algunas áreas de la teoría económica, aunque en otros campos esta sea más estática que dinámica, poniendo más énfasis en las ecuaciones del equilibrios que en la dinámica. Lo anterior, entre otras cosas, porque los economistas son buenos en reconocer los estados de equilibrio, pero malos para predecir cómo una economía evoluciona desde el desequilibrio.

Vaya lo antedicho como advertencia para desprevenidos creyentes.

Aquí, más que en la técnica de resolución de las ecuaciones diferenciales, nos concentraremos en el análisis cualitativo de ciertos sistemas dinámicos. Veremos un teorema de existencia de la solución, resolveremos algún tipo elemental de ecuación para ilustrar la teoría, y nos concentraremos en el análisis de la estabilidad de la solución, particularmente el llamado método de Liapunov.

La optimización es una rama de la matemática que ha tenido aportes de muchos de los más destacados matemáticos de todos los tiempos, Bernoulli, Euler, Gauss, Lagrange, Hamilton, Pontriaguin, sólo para citar algunos de ellos, en los últimos años nuevos desarrollos teóricos, que extienden los resultados a condiciones menos restrictivas y las posibilidades computacionales hacen que sea posible y necesario su uso por otras ciencias. Dedicaremos estas notas a la optimización dinámica y sus aplicaciones a la economía. Más bien deberíamos decir que estas notas están dedicadas a la optimización en teoría económica, pues el objetivo es resolver problemas que parten de la realidad o de la teoría económica cuya resolución satisfactoria requiere técnicas propias de la optimización dinámica.

Comenzaremos con una breve presentación de la optimización estática como pretexto para avanzar hacia la optimización dinámica, analizaremos primeramente el cálculo variacional, una excelente referencia es [Elsgolts] y luego veremos métodos propios de la teoría del control dinámico, destacando aquellos aspectos que resulten de más interés para la resolución de problemas emergentes de la moderna teoría económica. La referencia clásica es [Lee, E. B. and Markus, L.]. La referencia fundamental para la escritura de este texto ha sido [Hirsch, Morris W. et al].

Deseamos agradecer a diversas personas que han contribuido a la realización de éste trabajo. A los estudiantes Jaime Velasco y Gustavo Benítez por su valiosa colaboración para la corrección e inclusión de imágenes en el sistema de LaTeX, así como en su configuración definitiva.

A los alumnos de la maestría en Economía Matemática, con quienes hemos trabajado en la impartición de los cursos que dieron origen a estas notas. A las autoridades de la Facultad de Economía de la UASLP por el apoyo brindado para éste y otros proyectos , así como para conseguir que la maestría sea reconocida dentro del registro PNPC de CONACYT.

San Luis Potosí, S. L. P. *Elvio Accinelli Gamba*

Marzo 2019 *Armando García Martínez*

Capítulo 1

Teoría de las Ecuaciones Diferenciales

1.1. Los ejemplos más sencillos

La ecuación diferencial

$$\dot{x} = ax, a \neq 0, \text{ donde } \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \tag{1.1}$$

es la más sencilla y también es un de las más importantes. Aquí $x = x(t)$ es una función incógnita con valores reales de una variable t y $\frac{dx}{dt}$ es su derivada. La letra a denota una constante.

Las soluciones de (1.1) se obtienen mediante argumentos del cálculo infinitesimal: si K es una constante cualquiera, la función $f(t) = Ke^{at}$ es una solución, ya que

$$f'(t) = aKe^{at} = af(t) , \tag{1.2}$$

y no hay otras soluciones. Para verlo, sea $u(t)$ una solución cualquiera y calculemos la derivada de $u(t)e^{-at}$:

$$\frac{d}{dt}\big(u(t)e^{-at}\big) = u'(t)e^{-at} + u(t)(-a)e^{-at}.$$

Sustituyendo u' obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\big(u(t)\big)e^{-at} = au(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} = 0.$$

Por lo tanto, $u(t)e^{-at}$ es una constante K, de modo que $u(t) = Ke^{at}$. Lo que demuestra la afirmación.

La constante K que aparece en la solución queda completamente determinada si se especifica el valor u_0 de la solución en un único punto t_0. Supongamos que a una función $x(t)$ que satisface (1.1) se le pide que $x(t_0) = u_0$; entonces K ha de satisfacer $Ke^{at_0} = u_0$ y la ecuación (1.1) tiene entonces una única solución que satisface la condición inicial $x(t_0) = u_0$ especificada. Esta es:

$$x(t) = u_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Por simplicidad se toma frecuentemente $t_0 = 0$, entonces $K = u_0$. No se pierde generalidad tomando $t_0 = 0$ ya que si $u(t)$ es una solución con $u(0) = u_0$, entonces la función $v(t) = u(t-t_0)$ es una solución con $v(t_0) = u_0$.

La constante a que aparece en la ecuación $x' = ax$, puede ser considerada como un parámetro: si a cambia, la ecuación cambia y lo mismo ocurre con las soluciones.

El signo de a, es crucial en este punto:

Si $a > 0$, $\lim_{t\to\infty} Ke^{at}$ es igual a ∞ cuando $K > 0$, y es igual a $-\infty$ cuando $K < 0$.

Si $a = 0$, $Ke^{at} =$ constante.

Si $a < 0$, $\lim_{t\to\infty} Ke^{at} = 0$.

La solución $x(t) \equiv 0$ es *estable* si $a \leq 0$ e *inestable* si $a > 0$. Sobre este concepto volveremos más adelante. Como adelanto, vemos que si $a \neq 0$ se reemplaza por una constante b suficientemente próxima a a, el *comportamiento cualitativo* de las soluciones no cambia en un entorno de la solución de equilibrio.

Ejercicio 1 *Considere la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = t^2.$$

1. *Encuentre las soluciones y grafíquelas para distintos valores de la constante.*

2. *Suponga que le interesa la solución que en el momento $t = t_0$ se encuentra en $x(t_0) = x_0$. Escriba la solución para este caso.*

Ejemplo 1 *Ajuste de oferta y demanda en el caso continuo*

$$\begin{aligned} q^d &= a + bp, \ \text{ con } b < 0,\ a > 0 \\ q^s &= c + dp, \ \text{ con } c > 0,\ d > 0 \end{aligned}$$

Siendo q^d la cantidad total demandada del producto, q^s la oferta y p el precio unitario. Supongamos que estas cantidades se modifican con el tiempo. La ecuación diferencial de ajuste de demanda y oferta es:

$$\dot{p} = \alpha \left(q^d - q^s \right),\ \alpha > 0.$$

Sustituyendo resulta

$$\dot{p} = \alpha \left[(a-c) + (b-d)p \right],\ \ \alpha > 0, \tag{1.3}$$

de donde obtenemos

$$\dot{p} - \alpha[b-d]p = \alpha(a-c). \tag{1.4}$$

Observe que esta ecuación corresponde a una ecuación lineal no homogénea de primer orden. Siendo lineal porque la variable p y su derivada sólo aparecen elevados al exponente 1. Resulta no homogénea, pues a diferencia de la ecuación (1.1), el segundo término no es cero, y es de primer orden, pues la derivada de mayor orden que aparece es la primera.

En general, una **ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes**, es de la forma

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_1 y + a_0 = f(t),$$

donde los coeficientes $a_n, \ldots, a_0$ son constantes. Si además $f(t) = 0; \forall t$ entonces se dirá homogénea y no homogénea en otro caso.

Nos concentraremos en lo que sigue en las ecuaciones diferenciales de primer orden. Dejaremos las de órdenes más elevado para más adelante.

La forma general de una ecuación lineal de primer orden, no homogénea como la ecuación (1.5) es :

$$a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{1.5}$$

para la cual, en el caso particular, $f(t)$ es constante y resulta $f(t) = \alpha(a-c)$.

Su solución puede encontrarse de la siguiente forma:

1. Se busca primeramente una solución de la ecuación homogénea correspondiente, es decir de la ecuación:

   $$a_1 y' + a_0 y = 0.$$

   Llamemos a esta solución y_h.

2. Esta solución, como ya sabemos, será de la forma $y = Ke^{-bt}$. A partir de esta buscamos una solución particular y_p. Obtendremos al solución en la forma $y_T = y_h + y_p$.

3. Obsérvese que si y_T es solución se verificará entonces que

   $$a_1 y'_p + a_0 y_p = f(t).$$

   a) En el caso en que el segundo miembro sea constante, es decir, de la forma $f(t) = C$ entonces $y_p = \frac{k}{a_1 + a_0}$.

   b) En otro caso, se podrá buscar la solución utilizando **el método de la variación de la constante**.

4. Considere $y_T(t) = K(t)e^{-bt}$, asumiendo que $C(t)$ es una función derivable, derive $y_h(t)$ y sustituya en la ecuación original. Obtendrá una ecuación del tipo:

   $$\dot{K} = Ce^{bt}.$$

5. Integrando obtendrá $K(t) = \int f(t)e^{bt} dt + K_0$.

6. Luego sustituyendo en Y_t obtendrá

   $$y_T(t) = e^{-bt} \int f(t)e^{bt} dt + K_0 e^{-bt}.$$

7. Verifique que efectivamente esta es una solución.

8. Si el valor de la variable y en el momento t_0 es conocido, $y(t_0) = y_0$ entonces podrá buscar la solución en la forma:

$$y_T(t) = e^{-bt} \int_{t_0}^{t} f(\tau) e^{b\tau} d\tau + y_0 e^{-bt}$$

9. Verifique que el método de la variación de la constante también puede ser usado para el caso en que $f(t)$ es constante.

Ejercicio 2 *Considere nuevamente la ecuación de ajuste de oferta y demanda.*

1. *Obtenga la solución para el caso de la ecuación (1.4).*

2. *Observe que si el valor de $p(t)$ es conocido en t_0, siendo $p(t_0) = p_0$, entonces, en el caso en que $b - d \neq 0$, la solución para esta ecuación será de la forma:*

$$p(t) = \frac{c-a}{b-d} + \left[p_0 + \frac{a-c}{b-d} \right] e^{-\alpha(b-d)(t-t_0)}.$$

3. *Discuta la solución para $t \to \infty$.*

1.1.1. Variación de Parámetros

Resolveremos una ecuación diferencial de grado superior.

Ejemplo 2 ***(de solución por el método de variación de parámetros)*** *Resuelva $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$.*

Puesto que la ecuación es no homogénea, primero se resuelve la ecuación homogénea asociada. De la ecuación auxiliar $(m-1)(m-3) = 0$ se encuentra $y_c = c_1x + c_2x^3$. Ahora, antes de usar la variación de parámetros para encontrar una solución particular $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, recuerde que las fórmulas $u_1' = \frac{W_1}{W}$ y $u_2' = \frac{W_2}{W}$, donde W_1, W_2, W son los determinantes wronskianos del método de solución de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, que se dedujeron bajo la suposición de que la ecuación diferencial se escribió en la forma estándar $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$. Por lo tanto, dividiendo por x^2 la ecuación dada,

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x$$

hacemos la identificación $f(x) = 2x^2e^x$. Ahora con $y_1 = x$, $y_2 = x^3$, y

$$W = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3,\ W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x,\ W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x$$

encontramos

$$u_1' = -\frac{2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x \text{ y } u_2' = \frac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x.$$

La integral de la última función es inmediata, pero en el caso de u_1' se integra por partes dos veces. Los resultados son $u_1 = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$ y $u_2 = e^x$. Por tanto $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ es

$$y_p = \left(-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x\right)x + e^x x^3 = 2x^2e^x - 2xe^x.$$

Finalmente,

$$y = y_c + y_p = c_1x + c_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x.$$

1.1.2. El modelo de Solow

Consideraremos solamente el caso continuo.

1. Sea $Y = F(K,L)$ la función de producción.
2. Se asume que F es homogénea de grado uno, por lo que haciendo $\frac{Y}{L} = \frac{1}{L}F(K,L)$ obtendremos entonces $y = f(k)$ siendo $y = \frac{Y}{L}$ y $k = \frac{K}{L}$.
3. El modelo asume además que f es derivable dos veces al menos y cóncava.
4. Supone la tasa de crecimiento de la población constante, es decir $\dot{L} = nL$ y $L(0) = L_0$.
5. Las ecuaciones del modelo son:

$$\begin{aligned} I &= \dot{K} + \delta K \\ S &= sY \\ sY &= \dot{K} + \delta K \end{aligned}$$

6. A partir de $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ obtenemos

$$\dot{k} = \frac{L\dot{K} - K\dot{L}}{L^2}$$

Equivalentemente:

$$\dot{k} = \frac{L}{L}\frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L}$$

es decir

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L}. \tag{1.6}$$

7. Siendo $\frac{\dot{K}}{L} = \frac{sY - \delta K}{L} = sy - \delta k$.
8. Sustituyendo en (1.6) obtenemos para el capital per cápita la ecuación diferencial

$$\dot{k} - (n+\delta)k = sf(k). \tag{1.7}$$

La ecuación anterior, en principio, no es fácil de resolver, no obstante considere el siguiente ejercicio:

Ejercicio 3 *Sea* $f(k) = ak^{\alpha}$ *donde* $a > 0$ *y* $0 < \alpha < 1$*. Obtendrá:*

$$\dot{k} - (n+\delta)k = sak^{\alpha}. \tag{1.8}$$

1. *Resuelva la ecuación diferencial anterior. (AYUDA: Divida ambos miembros entre k^{α} y considere el cambio de variable: $v = k^{1-\alpha}$. Resuelva ahora la ecuación diferencial lineal de primer orden que resulta).*

2. *Muestre que existen dos puntos estacionarios k_1 y k_2, es decir, dos soluciones de la ecuación anterior, para las que se verifican $k(t) = \text{constante}$ es decir $\dot{k}(t) = 0$. Estos puntos son llamados puntos fijos o de equilibrio del sistema.*

3. *¿Qué sucede si el sistema en el instante t_0 no está en equilibrio, es decir, si $k(t_0) \neq k_1, k_2$?*

NOTA: El hecho de ser posible encontrar una solución, y que cualquiera sea el mecanismo por el que la buscamos, si efectivamente la obtenemos, podemos estar seguros de que no hay otra, lo garantiza el teorema de existencia y unicidad de la solución que veremos más adelante.

1.1.3. Otros ejemplos

Ejemplo 3 *de modelos de difusión Los modelos de difusión, hacen referencia a innovaciones tecnológicas (como por ejemplo la adopción de la telefonía celular) y su adopción en la sociedad, o bien al contagio de una enfermedad, o al crecimiento de una población. Todos ellos presentan las siguientes principales características:*

1. *En el principio sólo afectan a unos pocos.*

2. *Paulatinamente se difunden en forma acelerada al conjunto de la sociedad.*

3. *Llega un momento de saturación y su difusión comienza a ser más lenta.*

4. *Existe una cantidad de saturación.*

Veamos como podemos, a partir de estos datos, hacernos una idea del comportamiento de un proceso de difusión. Claramente la caracterización realizada muestra un proceso de difusión en forma de S, pero veamos un poco más:

Supongamos que $N(t)$ sea el número de afectados por el proceso, las características enunciadas nos llevan a la siguiente ecuación:

$$\dot{N}(t) = g(t)\big(m - N(t)\big).$$

De esta forma resulta que

1. *m es el número máximo de posibles afectados.*

2. *$g(t)$ es el coeficiente de difusión, representa al tasa de difusión en el instante t. Si $g(t)$ es pensado como la probabilidad de adopción de la nueva tecnología, o enfermedad, en el momento t entonces $g(t)\big(m - N(t)\big)$ representa el valor esperado de nuevos afectados.*

Ejercicio 4 *Aunque $g(t)$ puede asumir formas muy diferentes, en muchas aplicaciones se considera*

$$g(t) = a + bN(t)$$

de donde resulta

$$\dot{N}(t) = m\left(\frac{a}{m} + b\frac{N(t)}{m}\right)\left(1 - \frac{N(t)}{m}\right)$$

Para resolverla, considere

1. $v(t) = \frac{N(t)}{m}$ *de donde resulta* $\frac{dN(t)}{dt} = \frac{1}{m}\frac{dv(t)}{dt}$.
2. *Sustituyendo, se sigue que:* $\dot{v}(t) = \left(\frac{a}{m} + bv(t)\right)\left(1 - v(t)\right)$.
3. *Hacemos ahora el cambio de variables:* $F(t) = 1 - v(t)$ *resulta entonces:* $\dot{F}(t) = b\Big(\left(\frac{a}{bm} + 1\right) - F(t)\Big)F(t)$
4. *Obtenemos entonces la igualdad:*

$$\int \frac{dF}{\Big(\left(\frac{a}{bm} + 1\right) - F(t)\Big)F(t)} = b\int dt + c_0.$$

Considere ahora la igualdad

$$\frac{1}{\Big(\left(\frac{a}{bm} + 1\right) - F(t)\Big)F(t)} = \frac{1}{\left(\frac{a}{bm} + 1\right)}\left[\frac{1}{F(t)} + \frac{1}{\left(\frac{a}{bm} + 1\right) - F}\right]$$

5. *Sustituya en la igualdad anterior, entre integrales e integre. Obtendrá la solución*

$$F(t) = \frac{\left(\frac{a}{bm} + 1\right)F(t_0)}{\left(\frac{a}{bm} + 1\right)e^{-\left(\frac{a}{m} - b\right)(t - t_0)} + F(t_0)}$$

siendo $F(t_0) = 1 - v(t_0) = \frac{N(t_0)}{m}$.

6. *Obtenga* $N(t)$.
7. *Grafique* $\dot{N}(t)$ *y* $N(t)$, *calcule* $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$.

Si bien para resolver las ecuaciones diferenciales lineales existen métodos propios, como veremos, estas pueden ser resueltas transfromándolas en sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

1.2. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, en general, tiene la forma $\dot{x} = f(t,x)$ con $x(t_0) = x_0$ donde $x : \mathscr{I} \to \mathbb{R}^n$ y $f : \mathscr{I} \times \mathscr{D} \to \mathbb{R}^n$, siendo $\mathscr{I}$ el intervalo en el que interesa encontrar las soluciones, asumimos que $x(t) \in \mathscr{D}$, $\forall t \in \mathscr{I}$.

En lo que sigue, en general, nos limitaremos a trabajar con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales puede representarse en la forma

$$\dot{x} = Ax + h(t)$$

donde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, A es una matriz $n \times n$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Si el dominio de h es un subconjunto de $\mathbb{R}$ entonces restringimos el estudios del sistema a este dominio. Si consideramos $h(t) = 0$ para todo t entonces tenderemos un sistema lineal de ecuaciones diferenciales homogéneo.

Consideremos para comenzar, un ejemplo sencillo que nos servirá como referente en lo que sigue. Es un sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales con dos funciones incógnitas en la forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_1 x_1 \\ x_2' &= a_2 x_2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Este es un sistema muy simple, pero muchos sistemas pueden reducirse a esta forma. Como no existe una relación especificada entre las dos funciones incógnitas $x_1(t), x_2(t)$, se dice que están *desacopladas* o bien que el sistema es desacoplado. Las soluciones podemos encontrarlas fácilmente.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= K_1 e^{a_1 t}, \ K_1 = \text{constante} \\ x_2(t) &= K_2 e^{a_2 t}, \ K_2 = \text{constante.} \end{aligned}$$

Las constantes quedan determinadas si se especifican las condiciones iniciales: $x_1(t_0) = u_1$, $x_2(t_0) = u_2$.

En general, desde un punto de vista geométrico las soluciones de un sistema de n ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(t,x)$ con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ determinan una curva solución $\Big\{ \big(t, x(t)\big) \in \mathscr{I} \Big\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que en el momento t_0 pasa por el punto x_0, y con la dirección $f(t,x)$ en cada punto (t,x) del dominio de f.

Precisamente, **resolver una ecuación diferencial con condiciones iniciales significa**: encontrar una curva $\big(t, x(t)\big)$ para todo t en un cierto intervalo especificado en el problema, satisfaciendo las ecuaciones y, además, que en $t = 0$ verifique las condiciones iniciales.

Muchas veces resulta de utilidad analizar la proyección de esta curva en $\mathbb{R}^n$, es decir considerar solamente los valores $x(t)$ para cada $t \in \mathscr{I}$. Esta proyección tiene sentido para el caso $n = 2$ o $n = 3$ pues en otro caso resulta imposible dibujar. El espacio en el que proyectamos se conoce como el **espacio de fases**, la curva correspondiente a la solución pasará por el punto $x(t)$ de dicho espacio en la dirección de la tangente definida por $f(t,x)$.

Para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{x} = Ax$, a cada punto x del plano, le asociamos el vector Ax basado en x. O bien, dicho de otra forma, a cada punto x del plano le asociamos el segmento dirigido que va desde x hasta $x + Ax$.

Ejemplo 4 *Considere $a_1 = 2$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. Al punto $x = (1,1)$ le asociamos*

$$(1,1) + A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1) + (2, -\frac{1}{2}) = (3, \frac{1}{2}).$$

Las condiciones iniciales, $u = (u_1, u_2)$ del sistema $\dot{x} = Ax$ representan un punto en el plano, y exigen que se seleccione aquella curva del plano, solución del sistema que en $t = t_0$ pasa por u en la dirección Au.

Para cualquier sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas, asociando a cada punto del plano x el vector Ax obtenemos el diagrama de fases correspondiente a las condiciones iniciales del problema. Para esto dibujamos una cantidad suficiente de vectores Ax con base en puntos x y fin en $x + Ax$. Luego es posible representar gráficamente la curva solución $x(t)$ considerada como una aplicación

$x : \mathscr{I} \to \mathbb{R}^2$, pues para cada t pasará por $x(t)$ con la dirección $Ax(t)$ verificando la condición $x(t_0) = x_0$.

1.2.1. Flujo de un sistema dinámico

Considere el sistema dinámico $\dot{x} = f(t,x)$ donde $f(t,x)$ es un campo vectorial. Fijadas las condiciones iniciales x_0 en cierto $t = t_0$ es decir $x(t_0) = x_0$ la solución del sistema describe la trayectoria de este punto inicial a lo largo de la solución hasta un momento final. Este proceso puede ser caracterizado por el flujo $\phi : \mathscr{I} \times \mathscr{D} \to \mathbb{R}^n$ que representa la solución del sistema, es decir:

$$x(t_0 + \tau) = \phi(\tau, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{\tau + t_0} f\big(s, x(s)\big) ds.$$

Dicho flujo verifica las siguientes propiedades (de grupo)

1. $\phi(0,t,x) = x$.
2. $\phi(\tau + \sigma, t, x) = \phi\big(\sigma, t, \phi(\tau, t, x)\big) \forall\ (t,x) \in \mathscr{I} \times \mathscr{D}$ siendo τ y σ incrementos de t, tales que $t + \tau$ y $t + \tau + \sigma \in \mathscr{I}$.

Flujo de un sistema dinámico autónomo: Dada la solución $x(t)$ de un sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos el flujo del sistema por una función $\phi : \mathscr{I} \times \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ continua, tal que:

1. $\phi(0,\cdot) = Id_{\mathscr{D}}$,
2. $\phi(t+s,x) = \phi\big(t, \phi(s,x)\big)\ \forall\, t,s \in \mathbb{R}, x \in M$,

de forma tal que $\phi(t,x)$ corresponde a la curva solución del sistema en (t,x). Obsérvese que si $x(0) = x_0$ entonces $\phi(0,x_0) = x_0$ y además $\phi(t+s,x_0) = \phi\big(s, \phi(t,x_0)\big)$.

Ejemplo 5 *Consideremos nuevamente el sistema* 2×2 *desacoplado*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 \end{aligned}$$

con $x_1(0) = u_1$ *y* $x_2(0) = u_2$. *La solución de este sistema tiene la forma* $\big(u_1 e^{a_1 t}, u_2 e^{a_2 t}\big)$. *El flujo es la familia de transformaciones lineales* $\phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $\phi(t,u) = \big(u_1 e^{a_1 t}, u_2 e^{a_2 t}\big)$. *Obsérvese que*

1. $\phi(0,u) = u$
2. $\phi(t+s,u) = \Big(u_1 e^{a_1(t+s)}, u_2 e^{a_2(t+s)}\Big) = \Big(\big(u_1 e^{a_1 t}\big) e^{a_1 s}, \big(u_2 e^{a_2 t}\big) e^{a_2 s}\Big) = \phi\big(s, \phi(t,u)\big)$.

Considere una familia de transformaciones dependiente del parámetro $t \in \mathscr{I}$, $\phi(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$\phi(t,u) = \big(\phi_1(t,u), \phi_2(t,u), \ldots, \phi_n(t,u)\big)$$

tal que $\phi_{it} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ representa la coordenada i-ésima de la curva $x(t)$ solución del sistema $\dot{x} = f(t,x)$ que en $t = 0$ pasa por u, es decir, $x(0) = u$. Esta familia monoparamétrica se denomina **flujo del sistema**.

Para cada $t \in \mathscr{I}, \phi(t,\cdot)$ es una transformación del espacio de fases en él mismo. Representa la posición de una partícula en el momento t cuya dinámica está dada por $\dot{x} = f(t,x)$, la que en el momento $t = 0$ se encuentra en el punto de coordenadas $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Observe que esta familia de transformaciones correspondiente al caso $f(t,x) = Ax$ es una familia de transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$.

1.2.2. Unicidad de la solución del sistema desacoplado

Considere el siguiente sistema desacoplado de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n \end{aligned}$$

Un sistema desacoplado presenta únicamente soluciones de la forma $x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$. Para ver esto considere una solución del tipo $v(t) = \big(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t)\big)$ para el sistema anterior. Sea $w_i(t) = v_i(t)e^{-\lambda_i t},\ i = 1,2,\ldots,n$. Se tiene que $\dot{w}_i(t) = \big(\dot{v}_i(t) - \lambda_i v_i(t)\big)e^{-\lambda_i t}$, teniendo en cuenta que $v(t)$ es solución, se sigue que: $\dot{w}_i(t) = \big(\lambda_i v_i(t) - \lambda_i v_i(t)\big)e^{-\lambda_i t} = 0$, es decir, que $w_i(t) = c_i,\ i = 1,2,\ldots,n$. Por lo tanto, $v_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$.

1.3. Sistemas lineales de Ecuaciones diferenciales con autovalores reales distintos

La idea es resolver un sistema de ecuaciones diferenciales transformándolo hasta llevarlo a una forma canónica, relativamente fácil de resolver. En particular, esto se logra cuando el sistema puede transformarse en un sistema desacoplado. Comenzaremos la sección repasando algunos conceptos de álgebra lineal.

1.3.1. Bases y cambio de base en $\mathbb{R}^n$

Sea E en espacio vectorial y sea $\mathscr{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base de E. Cada base en el espacio vectorial asigna a cada $z \in E$ un sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ donde $z = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$. Para cada vector z fijo, podemos considerar a cada coordenada x_i como una función lineal $x_{i\mathscr{B}} : E \to \mathbb{R}$, y consecuentemente considerar una aplicación $\phi_{\mathscr{B}} : E \to \mathbb{R}^n$ definida como $\phi_{\mathscr{B}}(z) = \big(x_{1\mathscr{B}}(z), \ldots, x_{n\mathscr{B}}(z)\big)$. Cada base elegida tendrá asociado un sistema de coordenadas único.

Ejemplo 6 *Si en particular elegimos $z \in \mathbb{R}^2$ tal que en la base canónica*

$$\mathscr{C} = \big\{e_1 = (1,0);\ e_2 = (0,1)\big\},$$

el vector z tiene las coordenadas $(3,-4)$, entonces

$$\phi_{\mathscr{C}}(z) = (3,-4).$$

Pero si en lugar de la base canónica elegimos la base

$$\mathscr{B} = \big\{b_1 = (1,1);\ b_2 = (2,1)\big\},$$

entonces ya no es tan sencillo.
En este caso debemos considerar el sistema de ecuaciones

$$(3,-4) = x_1(z)(1,1) + x_2(z)(2,1).$$

Luego tendremos que resolver el sistema lineal:

$$\begin{aligned} 3 &= x_1(z)1 + x_2(z)2 \\ -4 &= x_1(z)1 + x_2(z)1, \end{aligned}$$

de donde obtendremos que $x_1(z_{\mathscr{C}}) = -11$ *y* $x_2(z_{\mathscr{C}}) = 7$*. Por lo que* $\phi_{\mathscr{B}}(z_{\mathscr{C}}) = (-11,7)$*. Es decir que el vector* z *tendrá las coordenadas* $(3,4)$ *en la base canónica y* $(-11,7)$ *en la segunda base elegida. Equivalentemente* $z_{\mathscr{C}} = 2e_1 - 4e_2$ *y* $z_{\mathscr{B}} = -11b_1 + 7b_2$.

Nuestra primera pregunta es: *¿Cómo se relacionan los sistemas de coordenadas en bases diferentes?*

Para contestar a esta pregunta consideremos en un espacio vectorial E las bases $\mathscr{B}_v = \{b_1, \ldots, b_n\}$ a la que llamaremos vieja, y $\mathscr{B}_n = \{f_1, \ldots, f_n\}$ a la que llamaremos nueva, con sus respectivos sistemas de coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Cada vector $z \in E$ de la base nueva f_i, puede ser expresado en términos de la base vieja, supongamos que $f_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_j$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces:

$$f_i = p_{i1}b_1 + ... + p_{in}b_n,$$

es decir, que $x_j(f_i) = p_{ij}$, con $i, j = 1, \ldots, n$ o bien, $\phi_{\mathscr{B}_v}(f_i) = (p_{1i}, \ldots, p_{ni})$ con $i = 1, \ldots, n$. En forma simbólica (emulando la notación matricial) podemos escribir esto de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Resumiendo $f = Pb$.

A la matriz P^T la llamaremos matriz de cambio de base de la vieja a la nueva base: $P^T = M_v^n$.

Esta matriz es invertible (¿por qué?) y su inversa es la matriz de cambio de base de la base vieja a la nueva, es decir:

$$M_n^v = \left(M_v^n\right)^{-1} = \left(P^T\right)^{-1}$$

Procedimiento para el cambio de base

Expresemos a $z \in E$ mediante el sistema de coordenadas de la base nueva:

$$z = y_1(z)f_1 + y_2(z)f_2 + \ldots + y_n(z)f_n. \tag{1.11}$$

Expresamos cada elemento f_i de la nueva base por su sistema de coordenadas en la base vieja, es decir, $x_j(f_i) = p_{ij}$,con $i, j = 1, \ldots, n$, obtendremos:

$$z = y_1(z)\sum_j p_{1j}b_j + y_1(z)\sum_j p_{2j}b_j + \ldots + y_1(z)\sum_j p_{nj}b_j. \tag{1.12}$$

Ordenando términos obtendremos:

$$z = x_1(z)b_1 + x_2(z)b_2 + \ldots + x_n(z)b_n$$

Donde cada $x_i(z) = y_1(z)p_{1i} + y_2(z)p_{2i} + ... + y_n(z)p_{ni}$.

Lo que expresado en forma matricial luce como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1b} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Resumiendo y comparando las matrices en las ecuaciones (1.10) y (1.13) se tiene: $x = P^T y$, o bien: $(P^T)^{-1}x = y$, es decir que **la matriz de cambio de base** P^T es aquella cuya $j-$ésima columna corresponde a las coordenadas del vector $j-$ésimo de la base nueva, expresado en términos de la base vieja. Luego, para pasar del sistema de coordenadas viejo al nuevo, trasponemos e invertimos la matriz de cambio de base, y se la aplicamos al sistema de coordenadas de la base vieja.

Siguiente pregunta: *¿Cómo se relacionan las expresiones matriciales de una misma transformación lineal correspondientes a dos bases diferentes?*

Consideremos una transformación lineal $T : E \to E$ cuya matriz asociada en la base vieja es A y en la base nueva es B. Supongamos que T pone en correspondencia a cada vector $z \in E$ el vector $w \in E$ y que adquiere la forma $Tx(z) = x(w)$ en la base vieja y, consecuentemente, $Ty(z) = y(w)$ en la base nueva. Asumimos que que en forma matricial (en la base vieja) se expresará como: $Ax(z) = x(w)$ y respectivamente (en la nueva base) $By(z) = y(w)$, es decir, que A pone en correspondencia vectores cuyas coordenadas están expresadas en la base vieja con su transformado por T en la misma base. Análogamente para A.

La siguiente igualdad se sigue de lo anterior:

$$\left(P^T\right)^{-1}Ax(z) = \left(P^T\right)^{-1}x(w) = y(w) = By(z),$$

luego

$$\left(P^T\right)^{-1}AP^T y(z) = By(z) = y(w),$$

o bien

$$By(z) = M_n^v A M_v^n y(z) = y(w).$$

Dado que esta igualdad se cumple para todo $z \in E$ se llega a que:

1. $B = \left(P^T\right)^{-1}AP^T$ lleva vectores expresados en la base nueva a su transformado por T en la base nueva.

2. $A = \left(P^T\right)B\left(P^T\right)^{-1}$ lleva vectores expresados en la base vieja a su transformado por T en la base vieja.

En lo que sigue, vamos a tener interés solamente dos bases particulares: la canónica que será la vieja y la de vectores propios que será la nueva.

Teorema 1 *Sea A una matriz $n \times n$ que tiene n autovalores diferentes: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Entonces existe una matriz $n \times n$ invertible, Q, tal que:*

$$QAQ^{-1} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n.\}$$

Demostración: Sea $\{e_1, ...e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea T el operador de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ cuya matriz en la base canónica es A. Supongamos que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es una base de autovectores de A, de modo que $Af_i = \lambda_i f_i$, con $i = 1, \ldots, n$. Sea $f_i = (f_{i1}, \ldots, f_{in})$ el sistema de coordenadas de los vectores propios en la base canónica. Sea Q la inversa de la matriz cuya columna $j-$ésima está formada por las coordenadas de f_j en la base canónica (la base vieja). Resulta $Q = \left(P^T\right)^{-1}$, entonces QAQ^{-1} es la matriz de T en la base de vectores propios (la base nueva). Esta matriz tiene en esta base la forma $diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$[1]. •

Observación 1 *La Q se obtiene invirtiendo la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores propios expresados en la base canónica, es decir, invirtiendo la matriz de cambio de base de la canónica (base vieja) a la base de vectores propios (la nueva). Esto es $Q = \left(P^T\right)^{-1}$.*

1.3.2. Aplicación: Resolución de sistemas lineales con valores propios diferentes

El siguiente teorema es constructivo y muestra un método para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales para el que los valores propios de la matriz del sistema A sean reales y diferentes.

Teorema 2 *Sea A un operador sobre $\mathbb{R}^n$ que tiene n autovalores distintos. Entonces, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la ecuación diferencial lineal:*

$$x' = Ax; \text{ con } x(0) = x_0, \tag{1.14}$$

tiene una solución única.

Demostración: Por el teorema anterior, sabemos que existe una matriz Q invertible tal que la matriz QAQ^{-1} es diagonal:

$$QAQ^{-1} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = B$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de A. Introduciendo las nuevas coordenadas $y = Qx$ en $\mathbb{R}^n$ con $x = Q^{-1}y$, tenemos

$$y' = Qx' = QAx = QAQ^{-1}y,$$

de donde resulta el nuevo sistema:

$$y' = By.$$

Como B es diagonal, la solución de ese sistema es:

$$y_i' = \lambda_i y_i; \text{ con } i = 1, 2, ..., n. \tag{1.15}$$

[1] Esto resulta de que AP^T es una matriz B cuya $j-$ésima columna es $\lambda_j f_j$. Luego $\left(P^T\right)^{-1} B = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Sabemos que la ecuación anterior tiene una única solución para cada condición inicial y la sabemos calcular, pues es un sistema desacoplado:

$$y_i(t) = y_i(0)e^{\lambda_i t}.$$

Para resolver (1.14), sólo nos resta llevar la solución del sistema desacoplado expresado en la base (nueva) de vectores propios de A a la base (vieja) canónica. Pongamos: $y(0) = Qx_0$. Si $y(t)$ es la solución de (1.15), entonces la correspondiente solución para (1.14) es:

$$x(t) = Q^{-1}y(t).$$

Más explicitamente,

$$x(t) = Q^{-1}\left(y_1(0)e^{\lambda_1 t}, \ldots, \lambda_n(0)e^{\lambda_1 t}\right)^T.$$

Siendo Q^{-1} la traspuesta de la matriz cuyas columnas son "los vectores propios colgados". •

Ejemplo 7 *Encontrar la solución general del sistema:*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 \\ x_3' &= x_1 - x_3. \end{aligned}$$

La matriz correspondiente es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sus valores propios son 1, 2, -1. *Son por lo tanto reales y distintos. La matriz B para el nuevo sistema (desacoplado) es*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

El sistema desacoplado (expresado en la nuevas coordenadas) es:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= 2y_2 \\ y_3' &= -y_3 \end{aligned}$$

que tiene por solución:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= ae^t \\ y_2(t) &= be^{2t} \\ y_3(t) &= ce^{-t} \end{aligned}$$

Ahora debemos encontrar los autovectores, esto es, los $f_i \in \mathbb{R}^3$ *que verifiquen las siguientes igualdades:*

$$[A - \lambda_i I]f_i = 0.$$

El lector deberá comprobar que estos son:

$$f_1 = (2, -1, 2);\ f_2 = (0, 1, 0);\ f_3 = (0, 0, 1).$$

La matriz de cambio de base traspuesta se obtiene poniendo en las columnas las coordenadas de los autovectores:

$$Q^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De la igualdad $x = P^T y$ *se obtiene:*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2ae^t \\ x_2(t) &= -2ae^t + be^{2t} \\ x_3(t) &= ae^t + ce^{-t}. \end{aligned}$$

Para resolver el problema con condiciones iniciales

$$x_i(0) = u_i$$

hemos de seleccionar a, b y c apropiadamente:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 2a \\ x_2(0) &= -2a + b \\ x_3(0) &= a + c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, debe resolverse el sistema lineal:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2a \\ u_2 &= -2a + b \\ u_3 &= a + c \end{aligned}$$

con incógnitas a, b, c.

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del teorema anterior.

Teorema 3 *Sea A una matriz* $n \times n$ *con n autovalores diferentes y reales,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*. Entonces toda solución del sistema:*

$$x' = Ax; \text{ con } x(0) = u$$

es de la forma:

$$x_i(t) = c_{i1}e^{t\lambda_1} + \ldots + c_{in}e^{t\lambda_n}, \text{ con } i = 1, \ldots, n,$$

para unas ciertas constantes $c_{i1}, \ldots, c_{in}$ *unívocamente determinadas por las condiciones iniciales.*

Mediante este teorema obtenemos información sobre las características de las soluciones, aún sin obtenerlas explícitamente. Por ejemplo: si todos los autovalores son negativos, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

para toda solución. Volveremos sobre este tema más adelante.

Por otra parte el teorema (3) conduce a otro modo de resolución de un sistema con valores propios diferentes. Para ver esto, escribimos:

$$x_i(t) = \sum_j c_{ij} e^{t\lambda_j}, \quad \text{con} \quad i = 1,\ldots,n,$$

sustituimos en

$$x' = Ax, \quad \text{con} \quad x(0) = u.$$

y consideramos los c_{ij} como incógnitas.

A continuación, igualamos los coeficientes de $e^{t\lambda_j}$ y resolvemos los c_{ij}. Este método se denomina de los **coeficientes indeterminados**.

Ejemplo 8 *Consideremos el caso anterior:*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 \\ x_3' &= x_1 - x_3 \end{aligned}$$

con la condición inicial $x(0) = (1,0,0)$.

De acuerdo al teorema (3) y dado que los valores propios son 1, 2 *y* -1, *escribimos las soluciones en la forma:*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_{11}e^t + c_{12}e^{2t} + c_{13}e^{-t}, \\ x_2(t) &= c_{21}e^t + c_{22}e^{2t} + c_{23}e^{-t}, \\ x_3(t) &= c_{31}e^t + c_{32}e^{2t} + c_{33}e^{-t}. \end{aligned}$$

A partir de la identidad $x_1'(t) = x_1(t)$ *obtenemos:*

$$c_{12} = c_{13} = 0.$$

Basta derivar y reemplazar en la igualdad. De la identidad $x_2' = x_1 + 2x_2$ *igualando los coeficientes de los* $e^{t\lambda_j}$ *obtenemos el sistema lineal:*

$$\begin{aligned} c_{21} &= c_{11} + 2c_{21}, \\ 2c_{22} &= c_{12} + 2c_{22}, \\ -c_{23} &= c_{13} + 2c_{23}, \end{aligned}$$

resultando $c_{21} = -c_{11}$, *y* $c_{23} = 0$. *Trabajando análogamente con la ecuación* $x_3' = x_1 - x_3$ *obtenemos:*

$$c_{31} = \frac{1}{2}c_{11} \ \text{ y } \ c_{22} = 0.$$

Sin haber utilizado aun la condición inicial llegamos a:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= c_{11}e^t, \\
x_2(t) &= -c_{11}e^t + c_{22}e^{2t}, \\
x_1(t) &= \frac{1}{2}c_{11}e^t + c_{33}e^{-t}.
\end{aligned}$$

A partir de $\big(x_1(0), x_2(0), x_3(0)\big) = (1,0,0)$ *llegamos a que*

$$c_{11} = 1, \ \ c_{22} = 1, \ \ c_{33} = -\frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, la solución es:

$$x(t) = (e^t, -e^t + e^{2t}, \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}).$$

Observación 2 *La conclusión del teorema (3) es falsa para ciertos operadores, cuando existen valores propios reales repetidos.*

Para ver esto basta considerar el caso:

$$\begin{array}{rcl} x_1' &=& x_1 \\ x_2' &=& x_1 + x_2. \end{array} .$$

Obviamente se obtiene $x_1(t) = ae^t$, siendo a una constante. Pero no existe una solución $x_2(t) = be^t$. Puede comprobarse que la solución en este caso es de la forma:

$$x_1(t) = ae^t,$$

$$x_2(t) = e^t(at + b).$$

1.4. Exponenciales de operadores.

Con el objetivo de resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de orden n consideraremos la exponencial de un operador.

Definimos ahora una importante serie, que generaliza la serie exponencial usual. Para todo operador $T : R^n \to R^n$ se define:

$$exp(T) = e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$$

La siguiente proposición resultará de interés:

Proposición 1 *Sean* $A = \sum_{j=0}^{\infty} A_j$ *y* $B = \sum_{k=0}^{\infty} B_k$ *dos operadores absolutamente convergentes en* R^n*. Entonces* $AB = C\sum_{i=0}^{\infty} C_i$ *siendo* $C_l = \sum_{j+k=l} A_j B_k$ *resulta ser un operador absolutamente convergente.*

Demostración:

$$AB = \text{lím}_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{j=0}^{n} A_j\right) \left(\sum_{k=0}^{n} B_k\right) + \varepsilon_A \left(\sum_{k=0}^{n} B_k\right) + \varepsilon_B \left(\sum_{j=0}^{n} A_j\right) + \varepsilon_A \varepsilon_B \right] =$$

$$= \text{lím}_{n\to\infty} \left[\sum_{l=0}^{n} C_l + \varepsilon_n\right]$$

con $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$.$\bullet$

Proposición 2 *La serie exponencial $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{k!}$ es absolutamente convergente.*

Demostración Sea $\|T\| \leq \alpha$. se sigue que $\|T^k/k!\| \leq \alpha^k/k!$. Luego $\sum_{k=0}^{\infty}\|T^k/k!\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k/k!$ serie esta que converge a e^{α}. Ahora por el criterio de comparación se sigue la convergencia absoluta de e^T.

Ejemplo 9 *Sea T una transfrmación lineal, que en cierta base toma la forma diagonal, es decir:*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Su exponencial se obtiene tomando las exponenciales de cada uno de los elementos de la diagonal principal:

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Su exponencial toma la forma

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{1!} & \frac{e^{\lambda}}{2!} & \dots & \frac{e^{\lambda}}{n-1!} \\ 0 & e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{1!} & \dots & \frac{e^{\lambda}}{n-2!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda} & \dots & \frac{e^{\lambda}}{n-3!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5 *Comprobar las afirmaciones hechas en los dos último ejemplos.*

1.4.1. Propiedades del operador exponencial

Se pueden considerar a A y e^{tA} como matrices, en cuyo caso $e^{tA}A$ es su producto.

Las siguientes propiedades del operador exponencial pueden verificarse con relativa facilidad:

Sean P,S,T operadores en R^n. Entonces:

1) si $Q = PTP^{-1}$ entonces: $e^Q = Pe^TP^{-1}$

2) si $ST = TS$ entonces: $e^{S+T} = e^Se^T$

3) $e^{-s} = (e^s)^{-1}$

Proposición 3

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

$\lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{tA}\left[\frac{e^{hA}-I}{h}\right] = e^{tA}A.\bullet$

1.4.2. Ejercicios

Ejercicio 6 (Exponencial de un operador)[2]
Se define $exp(T) = e^T = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$. *La definición habitual para* $k!$ *factorial de* k.

(i) Muestre que si S *y* T *son operadores lineales en* R^n *entonces*

1. *Si* $ST = TS$ *entonces* $e^{S+T} = e^T e^S$.
2. $(e^S)^{-1} = e^{-S}$.
3. *Si* $Q = PTP^{-1}$ *entonces* $e^Q = Pe^T P^{-1}$

(ii) Muestre que $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$.

(iii) Obtenga los exponenciales de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7 *Para el caso* $n = 2$ *y* $T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ *verifique que*

$$e^T = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}$$

1.5. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogeneos

Sea A un operador en R^n. En esta sección expresaremos las soluciones de la ecuación

$$x' = Ax$$

en términos de exponencial de operadores.

Teorema 4 *Sea* A *un operador en* R^n. *Entonces la solución del sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales,*

$$x' = Ax, \quad x(0) = K \in R^n, \tag{1.16}$$

es:

$$x(t) = e^{tA}K \tag{1.17}$$

y no existen otras.

[2]Repase los desarrollos de Taylor de las funciones e^x, $\cos x$, *y* $\operatorname{sen} x$. También sería importante recordar que siendo $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria, se tiene que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

Demostración: A partir de la proposición (3) se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}K) = Ae^{tA}K,$$

como $x(0) = e^{0A} = K$ se tiene que (1.17) es una solución de (1.16). Para probar que no hay otras soluciones razonemos por el absurdo. Supongamos que $s(t)$ es otra solución de (1.16) y pongamos:

$$y(t) = e^{-tA}s(t)$$

Entonces:

$$y'(t) = \left(\frac{d}{dt}e^{-tA}\right)s(t) + e^{-tA}s'(t) = e^{-tA}(-A+A)s(t) = 0$$

Por lo tanto $y(t)$ es una constante. Como $y(0) = K$ se sigue que $y(t) = K$. Luego $s(t) = Ke^{tA}$.[$\cdot$]

Ejemplo 11 *Calcularemos la solución general de un sistema bidimensional.*

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 \\ x_2' &= bx_1 + ax_2 \end{aligned}$$

donde a y b son constantes. En notación matricial:

$$x' = Ax; \quad A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}; \quad x = (x_1, x_2)$$

La solución con valor inicial $K = (K_1, K_2)$ es, de acuerdo al teorema anterior $x(t) = e^{tA}K$. Siendo:

$$e^{tA} = e^{ta}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ tb & 1 \end{bmatrix},$$

se sigue que

$$e^{tA}K = (e^{ta}K_1, e^{ta}(tbK_1 + K_2))$$

En consecuencia la solución que satisface a las condiciones iniciales

$$x_1(0) = K_1, \;\; x_2(0) = K_2$$

es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{ta}K_1 \\ x_2(t) &= e^{ta}(tbK_1 + K_2). \end{aligned}$$

1.5.1. Sistemas lineales homogeneos bidimensionales

Si bien la utilización de la exponencial de operadores y las formas canónicas de Jordan, permiten obtener un mecanismo sencillo y general para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de orden n, nos limitaremos al caso bidimensional. El lector interesado encontrará en el texto de Hirsch-Smale una excelente exposición del tema.

1.5.2. Formas de Jordan para matrices de orden 2

Las formas canónicas de Jordan, corresponden a las matrices más simples en que es posible expresar una transformación lineal en una base adecuada. Las siguientes matrices, corresponden a las formas de Jordan para el caso de $T: R^2 \to R^2$.

Para cualquier matriz A 2×2, existe una matriz invertible P tal que la matriz $B = P^{-1}AP$ tiene una de las siguientes formas (canónicas)[3]:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ b & \lambda \end{bmatrix}$$

Es de destacar que a toda matriz cuadrada de orden n corresponde una forma canónica de Jordan, relativamente sencilla y que permite generalizar los resultados que expondremos a continuación para matrices de orden 2. Un caso particular, ya analizado es aquel en el que matriz que corresponde a la transformación lineal, en la base canónica tiene valores propios reales diferentes. Su forma de Jordan, corresponde a una matriz con sus autovalores en la diagonal principal, siendo ceros los elementos correspondientes a las demás entrada. Esta matriz diagonal, es la matriz de la transformación lineal, en la base de los vectores propios, la que en este caso puede demostrarse que existe. Más aun, siempre que exista una base de vectores propios, aun cuando algunos valores propios se repitan, la matriz de la transformación lineal en esta base, tendrá la forma diagonal, con los valores propios en la diagonal principal.

A partir de la definición, $e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$ concluimos que e^B tendrá respectivamente una de las siguientes formas:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\mu} \end{bmatrix}; \quad e^a \begin{bmatrix} cosb & -senb \\ senb & cosb \end{bmatrix}; \quad e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}.$$

Por la tanto e^A puede calcularse a partir de la forma:

$$e^A = e^{PB(P)^{-1}} = Pe^B(P)^{-1},$$

siendo P la matriz del cambio de base, es decir la matriz cuyas columnas corresponden a las coordenadas de los vectores de la base nueva, expresados en términos de la vieja (en la sección (4) se representó por P^T.

La primera forma canónica corresponde al caso en que la matriz A tiene autovalores diferentes, estos son λ y μ, o bien al caso en que los valores propios son iguales, $\lambda = \mu$ pero existe un base de vectores propios, es el caso desacoplado. La segunda forma canónica corresponde al caso en que los valores propios son complejos $a+bi$ y su conjugado. La tercera al caso de autovalores iguales pero siempre que no exista una base de vectores propios[4]

La matriz de la transfomación lineal en la nueva base, en el segundo caso, depende de los vectores elegidos´para formarla.

1. Se toma el vector propio y se completa la base nueva.
2. Luego se obtiene la matriz de cambio de base P

[3]Obsérvese que esta matriz no es en principio la matriz traspuesta de cambio de base de la canónica a la de autovectores, pues no podemos asegurar que exista una base de vectores propios como en el caso en que los valores propios son diferentes, véase el teorema (1).

[4]Recuerde que puede suceder que exista una base de vectores propios aun cuando los valores porpio sean iguales. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Resulta $PB(P)^{-1} = A$ luego,

$$e^A = (P)e^B(P)^{-1}$$

donde B es la forma de Jordan correspondiente a la trasnformación y A la matriz correspondiente a la transforación lineal base canónica.

4. Podemos elegir la base de forma tal que $b = 1$.

Existe una relación particular entre los autovectores de T y los de e^T esta se establece en la siguiente proposición:

Proposición 4 *Sea $x \in \Re^n$ autovector de T correspondiente al autovalor real α, entonces x es autovector de e^T correspondiente al autovector e^α.*

Demostración: A partir de $Tx = \alpha x$ obtenemos:

$$e^T x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k x}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k x}{k!} = e^\alpha x.$$

1.5.3. Resolución de sistemas lineales y homogéneos de ecuaciones diferenciales de orden 2

Puesto que sabemos calcular la exponencial de cualquier matriz de orden 2×2 podemos resolver explicitamente cualquier sistema bidimensional de la forma $x' = Ax$.

Por otra parte, debido a que los valores de λ y μ que aparecen en las formas canónicas son los autovaleres de A en el caso en que sean reales, mientras que en el caso de que sean complejos a y b son respectivamente la parte real y la parte compleja de dichos autovalores. Entonces aun sin obtener forma en explícita la solución, podemos conocer, a partir de los autovalores de la matriz del sistema, algunas propiedades cualitativas de las soluciones. Veremos los casos más importantes:

Caso I. *A tiene autovalores reales distintos*

Mediante el camdio de coordenadas, $x = Py$, siendo $P = M_v^n$ la matriz de cambio de base (corresponde a P^T en la sección (4)), el sistema se convierte en:

$$y' = By,$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \ \lambda < 0 < \mu.$$

Las soluciones para es sistema son de la forma $y(t) = (c_1e^{\lambda t}, c_2e^{\mu t})$. En el plano de fases las soluciones (y_1, y_2) determinan las curvas $y_1 = k(y_2)^{\frac{\mu}{\lambda}}$, con $\frac{\mu}{\lambda} < 0$, siendo k una constante que se determina en función de las condiciones iniciales.

La solución del sistema original, será una combinación lineal de estas:

$$x(t) = c_1e^{\lambda t}v_1 + c_2e^{\mu t}v_2,$$

- donde v_1 y v_2 son los vectores propios de la matriz A cuyas coordenadas son las columnas de P.

- Las constantes c_1 y c_2 se determinarán en función de las condiciones iniciales.

(Caso Ia) En particular si los autovalores son reales y de signos opuestos. se dice que el origen (el equilibrio) es un **punto silla.**

La fig. 2 representa el diagrama de fases.

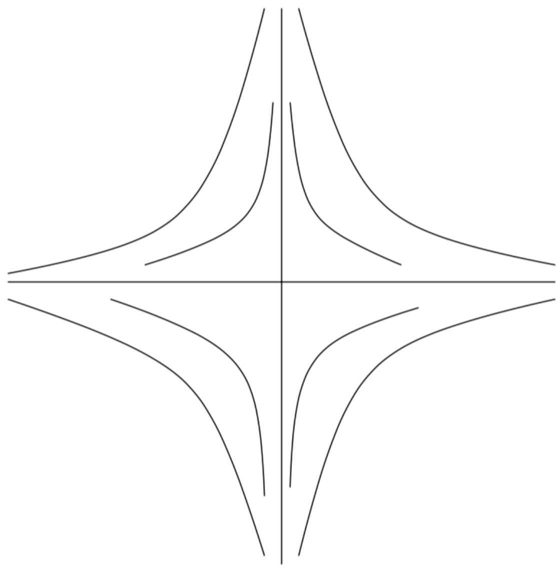


Figura 1.1: Punto de silla

Caso II. Autovalores reales e iguales. Distinguimos dos casos

(Caso IIa) Si A es diagonal esto es obvio ya que todas las soluciones tienen la forma.

$$y(t) = \left(c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\mu t}\right)$$

Si A es diagonalizable hacemos el cambio de variables indicado en el caso I.

Las figuras 3 y 4, muestran el caso cuando los autovalores son iguales, en este caso se dice que tenemos un *foco*, y cuando son diferentes, en este caso hablamos de un *nodo*

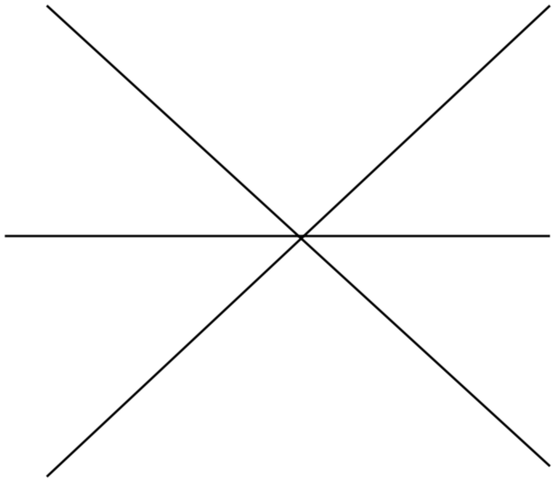


Figura 1.2: Foco

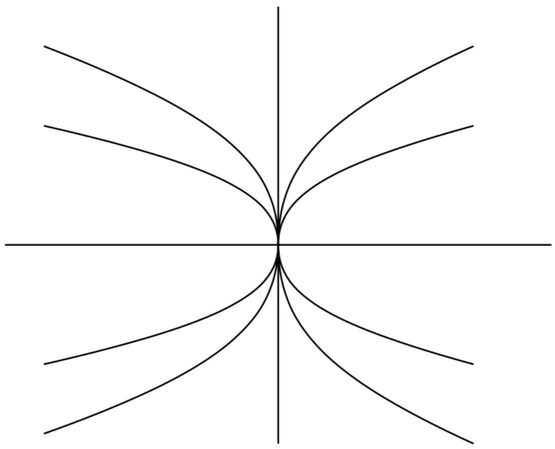


Figura 1.3: Nodo

(Caso IIb) Si los autovalores de A son reales pero A no es diagonalizable, en este caso decimos qu el origen es un nodo impropio. Existe un cambio de variables que da el sistema equivalente:

$$y' = By$$

$$B = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \ \lambda < 0.$$

Ya vimos que en este caso las soluciones tienen la forma:

$$\begin{aligned} y_1(t) = &\quad e^{\lambda t} K_1 \\ y_2(t) = &\quad e^{\lambda t}(tbK_1 + K_2) \end{aligned} .$$

Siendo n el vector elegido para completar la base, la solución del sistema original tendrá la forma:

$$x(t) = c_1 v_p e^{\lambda t} + c_2(t v_p + n)e^{\lambda t},$$

- λ el único valor propio,
- v_p un vector propio y n el vector que completa la base.
- Las constantes c_1 y c_2 se determinarán en función de las condiciones iniciales.
- Si el autovalor es negativo, entonces la solución **tiende a cero cuando** t **va hacia infinito.**
- Si el autovalor es positivo, entonces la solución **tiende a infinito cuando** t **va hacia infinito.**

Caso III*Si los autovalores son complejos* $a+bi$ se puede hacer un cambio de variables para obtener el sistema equivalente:

$$y' = By,$$

$$B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Según ya fue visto:

$$e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial, se expresa:

$$y(t) = e^{at}\left(K_1 \cos bt - K_2 \sin bt,\ K_2 \cos bt - K_1 \sin bt\right)$$

Como $|\cos bt| < 1$ y $|\sin bt| < 1$ y $a < 0$, resulta que:

$$lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

Si $b > 0$, el diagrama de fases consiste en espirales que tienden a cero, en sentido contrario a las agujas del reloj, ver figura 5, y de espirales que tienden a cero en el sentido al de las agujas del reloj, si $b < 0$.

La solución del sistema original tendrá la forma

$$x(t) = c_1 e^{at}(u \cos bt - v \sin bt) + c_2 e^{at}(u \sin bt + v \cos bt),$$

- las constantes c_1 y c_2 se determinarán en función de las condiciones iniciales.
- Los vectores u y v se obtienen a apartir del vector propio ϕ, escrito en la forma $\phi = u + iv$

En particular si *Los autovalores son imaginarios puros.* En este caso se dice que se tiene un *centro*. Está caracterizado por la propiedad de que todas las soluciones son periódicas del mismo período.

Con un cambio apropiado de coordenadas como en elcaso general de valores propios complejos se tiene:

$$y' = By,$$

$$B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

En este caso $a = 0$.

Para el caso con autovalores complejos, se tienen las siguiente posibilidades según los valores de a y *b*.

(i) $a < 0$ la órbita en espiral converge hacia el $(0,0)$.

(ii) $a > 0$ la órbita en espiral se aleja del $(0,0)$ infinitamente.

(iii) $a = 0$ la órita es un elipse con centro en el $(0,0)$.

(iv) El signo de b da el sentido de la órbita.

Considere las soluciones

$$y(t) = e^{a}(K_1 cos\ bt - K_2 sen\ tb, K_2 cos\ bt + K_1 sen\ tb)$$

Resulta,

$$y_1^2(t) + y_2^2(t) = e^{2a}(K_1^2 + K_2^2)cos^2\ bt + (K_1^2 + K_2^2)sen^2\ bt = e^{2a}(K_1^2 + K_2^2).$$

En el caso en que $a = 0$ el diagrama de fases corresponde a órbitas circulares, el sentido del giro queda determinado por el signo de b. Al cambiar la base las circunesferencias se transforman en elipses. En el caso $a \neq 0$ las órbitas correspnden a elipses, moviéndose hacia el origen cuando el signo de a es negativo y alejándose del origen cuando es positivo.

- Si todos los autovalores tienen parte real negativa. se dice que el origen es una *sumidero*. Posee la propiedad característica de que: $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$. para toda solción $x(t)$.

- Si todos los autovalores tienen parte real positiva. se dice que el origen es una *fuente*. Posee la propiedad característica de que: $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$. para toda solción $x(t)$.

1.5.4. El diagrama de fases, nuevamente

El diagrama de fases de $\dot{x} = Ax$ puede deducirse a partir del polinomio característico de A.

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (Tr\,A)\lambda + det(A).$$

Si representamos al discriminate de esta ecuación

$$\Delta = (Tr\,A)^2 - 4det(A)$$

los autovalores serán de la forma

$$\frac{1}{2}(Tr\,A) \mp \sqrt{\Delta}.$$

Luego los autovalores reales corresponden al caso $\Delta \geq 0$ y tienen parte real negativa cuando $TrA < 0$; etcétera.

Interpretación geométrica de $\dot{x} = Ax$

- La aplicación $\Re^n \to \Re^n$ que transforma x en Ax es un campo vectorial en $\Re^n$.
- Dado $K \in \Re^n$ existe un única curva $t \to e^{tA}K$ que comienza en K en el instante cero, y que es solución del sistema.
- El vector tangente a esta curva en t_0 es el vector $Ax(t_0)$ del campo vectorial en el punto $x(t_0)$
- Podemos imaginar los puntos de $\Re^n$ fluyendo a lo largo de estas curvas solución. La posición de un punto $x \in \Re^n$ en t se denota por

$$\phi_t(x) = e^{tA}x,$$

- Para cada $t \in R$ se tiene una aplicación

$$\phi_t : \Re^n \to \Re^n, \ \ t \in \Re$$

  dada por $\phi_t(x) = e^{tA}x$.
- Obseérvese que si el estado del sistema en $t = 0$ era x_0 y se transforma en x luego de un intervalo temporal de s unidades de tiempo, entonces $\phi_s(x_0) = e^{sA}x_0 = x$ luego

$$\phi_t(\phi_z(x_0)) = e^{tA}\left(e^{sA}(x_0)\right) = e^{(s+t)A}x_0 = \phi_{t+s}(x_0)$$

La colección de aplicaciones $\{\phi_t\}$ se dice que es el *flujo* correspondiente a la ecuación $\dot{x} = Ax$. Tiene la propiedad básica

$$\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$$

que para le caso lineal, no es más que otra forma de escribir:

$$e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}.$$

Este flujo denomina flujo lineal, porque para cada $t \in \Re$, Φ_t represnta una aplicación lineal. de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

1.5.5. la matriz de cambio de base cuando no existe una base de vectores propios

Analicemos este punto a partir de un ejemplo.
Caso 1: Autovalores complejos: Considere el sistema

$$\dot{x}_1 = -2x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2$$

En este caso: $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- Los autovalores son $\lambda = 1 + i$, $\bar{\lambda} = 1 - i$
- Para obtener el autovector complejo correspondiente a $1 + i$ resolvemos $(A - \lambda I)w = 0$. Resulta una única ecuación $w_1 + (1 - i)w_2 = 0$, que representa al conjunto de autovectores.

- Elegimos $w_2 = -i$, resulta $w_1 = 1+i$, es decir $w = (1+i, -i) = (1,0) + (1,-1)i = u + iv$ es un autovector para $(1+i)$.
- Los vectores $v = (1,-1)$ y $u = (1,0)$ forman una base en $\Re^2 \subset C^2$. La base debe escribirse en el orden $\{v,u\}$ Luego todo vecotor $x \in R^2$ podrá expresarse como $x = x_1e_1 + x_2e_2 = y_1(1,-1) + y_2(1,0)$.
- Resultando:
$$x_1 = y_1 + y_2$$
$$x_2 = -y_1$$
- LLegamos a que
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

obtenemos que $x = Py$ siendo entonces, P la matriz del cambio de base. El lector verificará que $(P)^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B$.

Sabemos que el sistema $y' = By$ tiene las soluciones $y(t) = e^{tB}K$ en este caso

$$y(t) = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} K.$$

Es decir:

$$y_1(t) = k_1e^t \cos t - k_2e^t \sin t$$

$$y_2(t) = k_1e^t \sin t + k_2e^t \cos t$$

Consecuentemente, siendo $x(t) = Py(t)$, obtenemos las soluciones:

$$x_1(t) = (k_1 + k_2)e^t \cos t + (k_1 - k_2)e^t \sin t$$

$$x_2(t) = -k_1e^t \sin t + k_2e^t \cos t$$

Observación 3 *En forma general, la demostración de que si un operador T en un espacio vectorial de dimensión 2 tiene autovalores conjugados, entonces se puede llevar a la forma canónica $T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ siendo $\mu = a + bi$ y $\bar{\mu}$ los valores propios, se hace de la siguietne forma:*

Demostración: Sea $\mu = a + bi$ autovalor de T. Sea $\phi = u + iv$ autovector asociado a μ, u y v son elementos de R^2. A su vez u y v son linealmente independientes (para probar esto use la independencia lineal de los autovectores ϕ y $\bar{\phi}$, pues $u = \frac{1}{2}(\phi + \bar{\phi})$ y $v = \frac{1}{2}(\phi - \bar{\phi})$). Por ser ϕ autovector asociado a μ, se sigue que:

$$T(u + vi) = (a + bi)(u + vi) = (-bv + au) + (av + bu)i$$

Además $T(u + vi) = Tu + iTv$ con lo que se concluye que:

$$Tu = -bv + au$$

$$Tv = av + bu$$

Esto significa que expresada en la base $\{v,u\}$, $T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.[·]

Como $\{u,v\}$ forma una base, la matriz de cambio de base, tendrá la forma

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema tendrá la forma

$$x(t) = c_1 e^{at}(u\cos bt - v\sin bt) + c_2 e^{at}(u\sin bt + v\cos bt)$$

donde las constantes c_1 y c_2 se determinarán en función de las condiciones iniciales.

Caso 2: Autovalores reales pero no existe una base de vectores propios En este caso existe un único vector propio λ. Se completará una base de R^2 y se procederá de forma análoga a la anterior. Escribiendo la base nueva en el orden $\{n, v_p\}$ donde v_p es un vector propio asociado al autovalor. (Para el caso en que $a_{12} \neq 0$ puede elegirse $n = (0,1)$. La matriz de cambio de base, de la canónica a la de vectores propios, viene dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & v_{p1} \\ 1 & v_{p2} \end{bmatrix}$$

debe satisfacer $(P)^{-1}AP = B$, donde $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ b & \lambda \end{bmatrix}$. El valor de b se determina a partir de esta igualdad. Siendo $n = (0,1)$ el vector elegido para completar la base, la solución del sistema tendrá la forma: $x(t) = P^T y(t)$ es decir $x(t) = v_p y_2 + n y_1$ en definitiva:

$$x(t) = k_2 v_p e^{\lambda t} + k_1(btv_p + n)e^{\lambda t},$$

donde λ es el único valor propio, v_p un vector propio y n el vector que completa la base, y P^T la matriz cuyas columnas están formadas por las coordenadas de n y v_p . Las constantes k_1 y k_2 se determinarán en función de las condiciones iniciales.

Las soluciones que se obtienen son en definitiva combinaciones lineales de las soluciones de los sistemas canónicos, de ahí la posibilidad de realizar un estudio cualitativo del comportamiento de las soluciones aun antes de resolver el sistema explicitamente.

1.5.6. Ejercicios

Ejercicio 8

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$$

Los eigenvalores y eigenvectores asociados al sistema son:

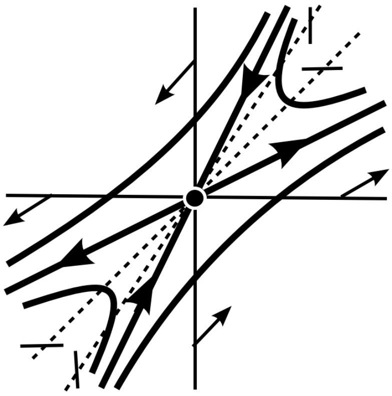
$$\lambda_1 = -1, V_{\lambda_1} = [1,2]^T \ \ , \lambda_2 = 2, V_{\lambda_2} = [2,1]^T.$$

Por lo tanto, nuestro candidato es un punto silla. Completamos esta información con el campo $\boldsymbol{v}$*. Nótese que* $\boldsymbol{v}$ *es vertical (*$x' = 0$*) si* $y = \frac{3x}{2}$*, y* $\boldsymbol{v}$ *es horizontal (*$y' = 0$*) si* $y = x$*. Sobre los ejes:*

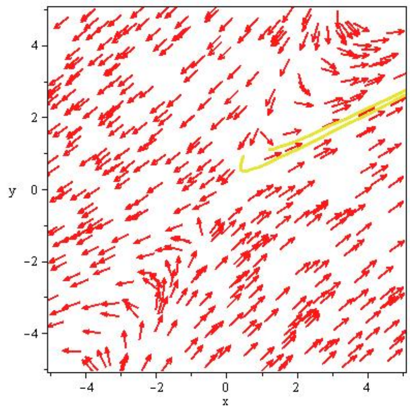
$$\boldsymbol{v}(x,0) = x[3,2]^T, \boldsymbol{v}(0,y) = -2y[1,1]^T \ .$$

Resolviendo se obtiene: $(2y-x)^2(y-2x) = C$*, órbitas de aspecto hiperbólico, pero que no son hipérbolas. Aquí las soluciones cuyas órbitas parten por debajo de* $y = 2x$ *cumplen que su* $x(t) \to \infty$ *si* $t \to \infty$*, mientras que* $x(t) \to -\infty$ *si parten por encima de la separtriz (sobre ella* $x(t) \to 0$*). Y algo análogo sucede con la otra separtriz* $y = \frac{x}{2}$*.*

Del mapa de fases (sin resolver el sistema) podríamos deducir también, por ejemplo, que para la solución que cumple $x(7) = 1, y(7) = 0$ *tanto su x como su y tienden hacia* ∞ *cuando* $t \to \infty$ *y tienden hacia* $-\infty$ *cuando* $t \to -\infty$*: basta observar la forma de su órbita.*



(a)



(b)

Ejercicio 9

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2x - 2 \end{cases}$$

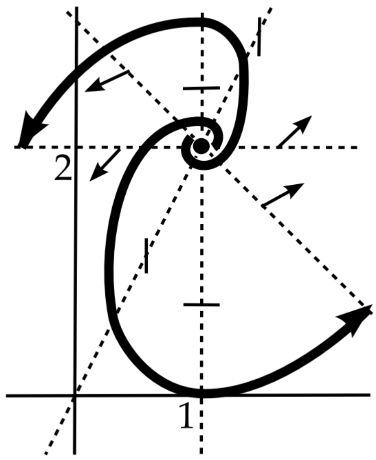
El punto crítico es $x = 1, y = 2$ *o* $P = (1,2)$*. La matriz A del sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ con } \lambda_{1,2} = 1 \pm i \,.$$

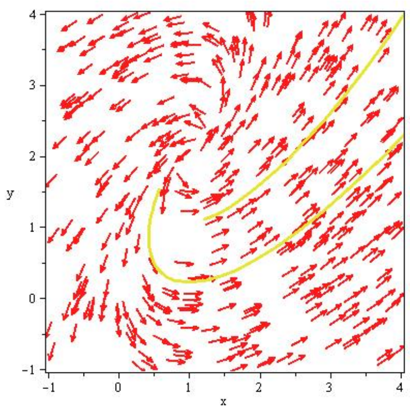
Por lo tanto, P es un foco inestable. Analizando los campos vectoriales, $\boldsymbol{v}$ *es vertical si* $y = 2x$ *y es horizontal si* $x = 1$*. También es observable:*

$$\boldsymbol{v}(x,2) = 2(x-1)[1,1]^T, \ \boldsymbol{v}(x,3-x) = (x-1)[3,2]^T.$$

Lo anterior también puede verse como el mapeo $\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{Ax}$ *trasladado al punto P.*



(a)



(b)

Ejercicio 10

$$\begin{cases} x' = 8x - y^2 \\ y' = -6y + 6x^2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema igualando $y' = 0$ y obtenemos la condición $y = x^2$. Ello nos ayuda a obtener los puntos $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (2,4)$. La matriz M de derivadas parciales luce como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} 8 & -2y \\ 12x & -6 \end{bmatrix}.$$

Evaluando la matriz en P_1 y P_2 tenemos:

$$M_{P_1} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},\ M_{P_2} = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 24 & -6 \end{bmatrix} \quad ,$$

de las cuales podemos obtener sus eigenvalores y eigenvectores

$$\begin{aligned} \text{para } P_1\ \lambda_1 &= 8 \to V_{\lambda_1} = [1,0]^T \\ \lambda_2 &= -6 \to V_{\lambda_2} = [0,1]^T \\ \text{para } P_2\ \lambda_{1,2} &= 1 \pm i\sqrt{143}\ , \end{aligned}$$

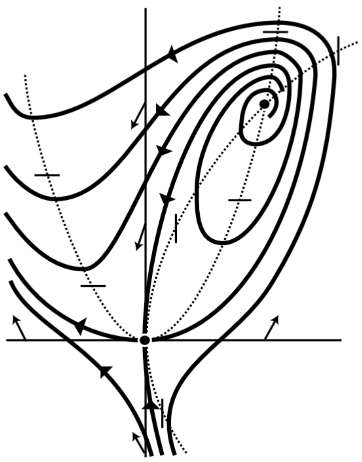
*por lo cual P_1 es un punto silla y P_2 es un foco inestable. Completamos la información local con el campo **v** (las órbitas no son calculables). El campo es horizontal y vertical en este caso en $y = x^2$, $8x = y^2$, respectivamente. Para las **separatrices** hallamos v sobre las rectas dadas por la aproximación lineal, que aquí son los ejes:*

$$\boldsymbol{v}(x,4) = 2(x-2)(4,3x)^T,\ \boldsymbol{v} = (0,y) = -y(y,6)^T.$$

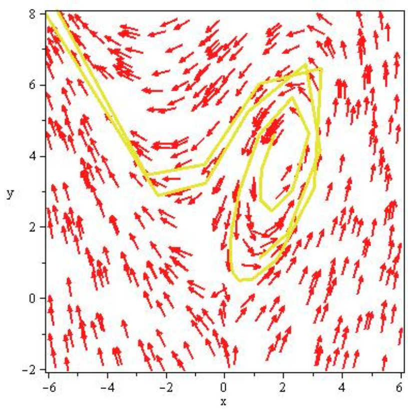
*Según esto, la separatriz estable se deforma $\subset$ y la inestable $\cup$. El **v** sobre los ejes en este ejemplo ya lo hemos hallado. En rectas que pasan por $(2,4)$ y en un punto con pocos datos:*

$$\boldsymbol{v}(x,4) = 2(x-2)[4,3x+6]^T,\ \boldsymbol{v}(2,y) = (4-y)[4+y,6]^T, \boldsymbol{v}(-2,-2) = 4[-5,6]^T.$$

Los vectores dibujados precisan también el sentido en el que se abre el foco y con todo ello tenemos un mapa de fases más o menos como el de arriba. No sabemos resolver el sistema, pero están a la vista propiedades básicas de las soluciones (por ejemplo, que las soluciones constantes son inestables, lo que estaba claro desde que hallamos los λ).



(a)



(b)

Ejercicio 11

$$\begin{cases} x' = y(x-2) \\ y' = x(y-2) \end{cases}$$

Resolvemos el sistema igualando $y' = 0$ y $x' = 0$. Ello nos ayuda a obtener los puntos $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (2,2)$. La matriz M de derivadas parciales luce como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} y & x-2 \\ y-2 & x \end{bmatrix}.$$

Evaluando la matriz en P_1 y P_2 tenemos:

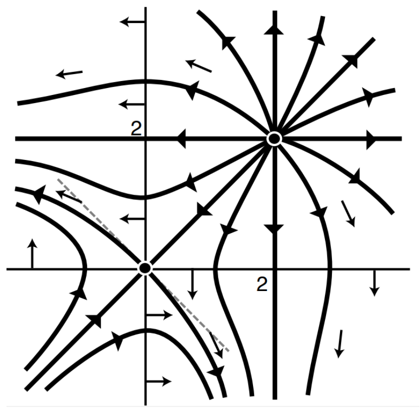
$$M_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},\ M_{P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ,$$

de las cuales podemos obtener sus eigenvalores y eigenvectores

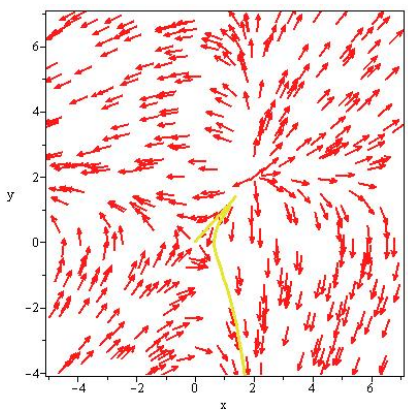
$$\begin{aligned} \text{para } P_1 : \lambda_1 &= 2 \to V_{\lambda_1} = [1,-1]^T \\ \lambda_2 &= -2 \to V_{\lambda_2} = [1,1]^T \\ \text{para } P_2 : \lambda_{1,2} &= 2 \text{ con duplicidad } 2\ , \end{aligned}$$

por lo cual P_1 es un punto silla y P_2 es un nodo estelar inestable. Usamos ahora v (órbitas calculables, pero complicadas): $\boldsymbol{v}$ *es vertical si $y=0$ o si $x=2$ ($\Rightarrow x=2$ órbita recta, más exactamente: está formada por tres órbitas).*$\boldsymbol{v}$ *es horizontal si $x=0$, $y=2$ ($\Rightarrow y=2$ órbita). Además:*

$$\boldsymbol{v}(x,x)=x(x-2)[1,1]^T \;\; y=x \text{ órbita },\; \boldsymbol{v}(x,-x)=-x[x-2,x+2]^T$$
$$\boldsymbol{v}(x,0)=[0,-2x]^T,\; \boldsymbol{v}(0,y)=[-2y,0]^T,\; \boldsymbol{v}(1,3)=[-3,1]^T,\; \boldsymbol{v}(3,1)=1,-3)^T$$
$$\boldsymbol{v}(-1,3)=[-9,-1]^T,\; \boldsymbol{v}(3,-1)=[-1,-9],\; \boldsymbol{v}(3,4)=[4,6]^T,\; \boldsymbol{v}(4,3)=[6,4]^T$$



(a)



(b)

Excepcionalmente, la separatriz $y=x$ del lineal se conserva, aunque la otra se deforma. Veamos algunas propiedades de las soluciones que se deducen del mapa de fases: El segmento que une los puntos críticos corresponde a una solución definida $\forall t$ (ya que está acotada y no puede irse a infinito en tiempo finito). Esta solución es inestable, pues mientras ella tiende a 0 la x o la y de algunas cercanas $\to -\infty$. No podemos saber de casi todas las soluciones no constantes si están o no definidas ?t ni precisar su estabilidad, pues no tenemos la solución general. Sí podemos hallar soluciones asociadas a órbitas sencillas. Por ejemplo, si buscamos la que cumple $x(0)=1$

, $y(0) = 2$, empezamos encontrando la órbita que pasa por $(1,2)$ (o sea, que cumple $y(x = 1) = 2$). Es claro aquí que esa órbita es $y = 2$, que llevada a la primera ecuación nos da $x' = 2x - 4$, $x(0) = 1 \to x = 2 - e^{2t}$, $y = 2$, definida $\forall t$, aunque no sabemos si es estable por no conocer las cercanas. En cambio, la solución con $x(0) = y(0) = 3 \to y = x \to x' = x^2 - 2x$, explota en tiempo finito (por la potencia x^2; podríamos hallarla). (La solución general de un sistema no lineal casi nunca se tendrá pues han de darse muchas casualidades: que las órbitas sean calculables, que se pueda despejar de ellas la x o la y, y que se pueda hallar explícitamente la solución de la autónoma que queda al sustituir).

Ejercicio 12 *El siguiente ejercicio puede describir la evolución de la población de dos especies en competición. En ausencia de la otra especie cada una de ellas sigue una ecuación logística, y además la presencia de cada una influye negativamente en el crecimiento de la otra (términos en xy de cada ecuación); dibujamos sólo en el primer cuadrante, que es donde las órbitas tienen sentido.*

$$\begin{cases} x' = x(2-x-y) \\ y' = y(3-y-2x) \end{cases}$$

Resolvemos el sistema igualando $x' = 0$ y obtenemos que $x = 0 \to y = 0,3$ así como $y = 2-x \to x = 2,1 \to y = 0,1$. Ello nos ayuda a obtener los puntos $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,3)$, $P_3 = (2,0)$ y $P_4 = (1,1)$. La matriz M de derivadas parciales luce como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} 2-2x-2y & -x \\ -2y & 3-2y-2x \end{bmatrix}.$$

Evaluando la matriz en P_1, P_2, P_3 y P_4 tenemos:

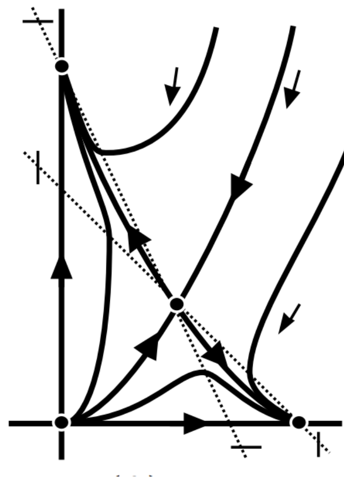
$$M_{P_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ M_{P_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix},\ M_{P_3} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ M_{P_4} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

de las cuales podemos obtener sus eigenvalores y eigenvectores

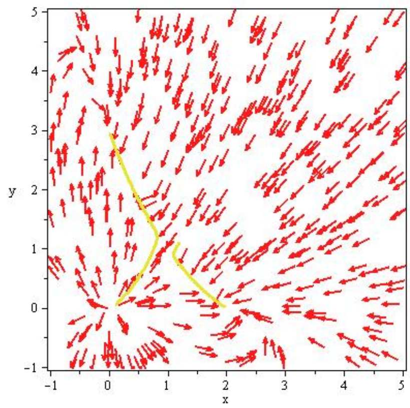
$$\begin{aligned}
\text{para } P_1\ & \lambda_1 = 2 \to V_{\lambda_1} = [1,0]^T \text{ (captura la tangencia)} \\
& \lambda_2 = 3 \to V_{\lambda_2} = [1,-3]^T \\
\text{para } P_2\ & \lambda_1 = -1 \to V_{\lambda_1} = [1,-3]^T \text{ (tangencia)} \\
& \lambda_2 = -3 \to V_{\lambda_2} = [0,1]^T \\
\text{para } P_3\ & \lambda_1 = -1 \to V_{\lambda_1} = [-2,1]^T \text{ (tangencia)} \\
& \lambda_2 = -2 \to V_{\lambda_2} = [1,0]^T \\
\text{para } P_4\ & \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \to V_{\lambda_1} = [1,\mp\sqrt{2}]^T
\end{aligned}$$

por lo cual P_1 es un nodo inestable, P_2 y P_3 son nodos estables y P_4 es un punto silla. Complementamos con la siguiente información: $\mathbf{v}$ es vertical si $x = 0$ o si $y = 2-x(\Rightarrow x = 0$ órbita), a su vez, $\mathbf{v}$ es horizontal si $y = 0$, $y = 3-2x(\Rightarrow y = 0rbita)$. Los valores de $\mathbf{v}$ sobre rectas que contienen puntos críticos son:

$$\mathbf{v}(x,3) = -x[x+1,6]^T,\ \mathbf{v}(2,y) = y[2,y+1]^T,\ \mathbf{v}(x,1) = (1-x)[x,2]^T,\ \mathbf{v}(1,y) = (1-y)[1,3y]^T.$$



(a)



(b)

Si los datos iniciales están por encima de la separatriz estable de la silla, la especie y tiende hacia su tope logístico y la x se extingue; lo contrario sucede si están por debajo. Si los términos de competición (los $-\alpha xy$ *) fuesen más pequeños las dos especies podrían coexistir (los nodos estables se vuelven sillas y pasa a existir un nodo estable en* $x, y > 0$ *hacia el que tienden todas las soluciones del primer cuadrante; esto sucede, por ejemplo, en el sistema* $x' = x(2-x-y/2),\ y' = y(3-y-x)$*, para el que* $x = 1,\ y = 2$ *es nodo estable). Las únicas soluciones calculables serían las asociadas a* $x = 0$ *o a* $y = 0$*, es decir, a la ausencia de una de las dos especies. Aparece entonces la ecuación logística cuyas soluciones son coherentes con las órbitas sobre los ejes.*

Ejercicio 13

$$\begin{cases} x' = 3xy \\ y' = 4y^2 - 4x^2 \end{cases}$$

Obtenemos el único punto crítico del sistema $P_1 = (0,0)$*. Evaluando la matriz de parciales en* P_1 *tenemos:*

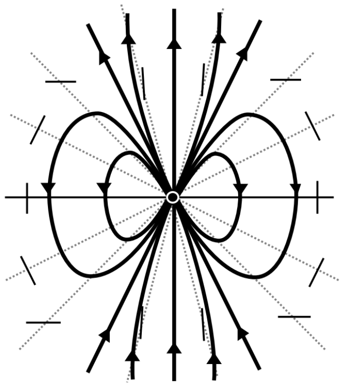
$$M_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo cual P_1 es un punto no elemental. La siguiente ecuación puede ser resuelta por el método de ecuaciones homogéneas o de Bernoulli:

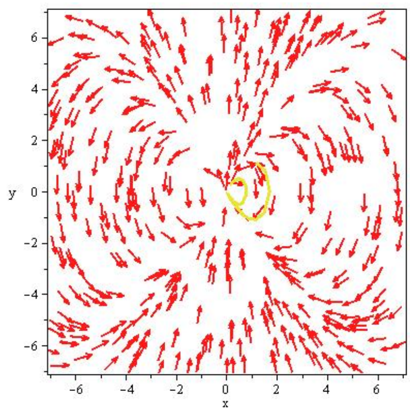
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - 4x^2}{3xy} \;\to\; y^2 = 4x^2 + Cx^{\frac{8}{3}}.$$

Mejor que dibujar estas curvas, usamos las isoclinas, que son (ecuación homogénea) rectas $y = mx$ pasando por el origen. La pendiente de las órbitas sobre ellas es:

$$K = \frac{4m^2 - 4}{3m} \;\to\; \text{para } m = 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 1, \pm 2,\ \pm 4 \text{es } K = \infty, \pm 2, 0, \pm 2, \pm 5.$$



(a)



(b)

Orientamos las órbitas viendo que $\mathbf{v}(0,y)$ apunta hacia arriba (esto además nos da las órbitas verticales no recogidas en la solución general). Hay órbitas (llamadas elípticas) que salen y llegan al punto crítico, situación imposible en uno elemental. Un punto no elemental aislado es o un centro o un foco o hay en torno a él sectores formados por órbitas elípticas, parabólicas (las de un nodo o las demás del ejemplo) o hiperbólicas (como las de un punto silla). Alguna conclusión sobre las soluciones: ***0*** *es inestable (viendo el dibujo); la solución con $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ (de órbita $y = 2x$) no* *está definida* $\forall t > 0$*, pues para ella se tiene* $x' = 6x^2$*,* $y' = 3y^2$*; la que cumple* $x(0) = 1$*,* $y(0) = 0$ *(no calculable) sí lo está por ser acotada, pero ¿será estable? (su diferencia con las soluciones cercanas tiende a* 0 *si* $t \to \infty$ *, pero esto no basta en sistemas).*

Ejercicio 14 *Considere el sistema*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x$$

- Muestre que los autovalores son 7 y -5
- Encuentre la matriz P de cambio de base. Para esto deberá obtener los autovectores, $v_1 = (1,2); v_2 = (-2,1)$. es decir resolver:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Donde λ son los autovalores.
- Encuentre la solución general del sistema.
- Obtenga la solución para $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 0$.

Ejercicio 15 *Considere el sistema*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} x$$

- Pruebe que no existe una base de vectores propios.
- Encuentre la solución para el sistema canónico correspondiente.
- Encuentre la matriz de cambio de base de la canónica a la de vectores proprios, $P = M_v^n = M_c^p$.
- Muestre que la solución del sistema original es de la forma:

$$x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 t e^2 t$$

$$x_2 = c_1 e^{2t} + (t+1) c_2 2 t e^{2t}$$

- Obtenga la solución para $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 0$.

Ejercicio 16 *Considere el sistema*

$$\dot{x} = x + y$$

$$\dot{y} = -2x - y$$

- Muetre que los autovalores son complejos
- Resuelva el sistema canónico.
- Muestre que el vector propio ϕ se puede obtener a partir de la ecuación

$$(1-i)\alpha + \beta = 0.$$

- Elija $\beta = 1$ y obtenga el valor de α
- Encuentre u y v vectores de $\Re^2$ tales que $\phi = u + iv$.
- Construya la matriz de pasaje P de la base vieja a la nueva.
- Obtenga la solución general del sistema original.

1.6. Sistemas Lineales no Homogeneos

Vamos a considerar un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogeneo y no autónomo.

$$x'(t) = Ax(t) + B(t) \tag{1.18}$$

Aquí A es una matriz de $n \times n$ y $B : R \to \Re^n$ es una aplicación continua. Esta ecuación se llama no homogenea por el término B , es además no autonoma, pues depende explicitament de t.

Busquemos una solución en la forma:

$$x(t) = e^{At} f(t), \tag{1.19}$$

donde $f : R \to \Re^n$ es una cierta función diferenciable. El método se llama *variación de la constante* pues si $B(t) \equiv 0$, entonces $f(t)$ es una constante y obtemdríamos una solución para el sistema homogeneo.

Derivando (1.19) se obtiene:

$$x'(t) = Ae^{At} f(t) + e^{At} f'(t)$$

Como se supone que (1.19) es solución de (1.18),

$$Ax(t) + B(t) = Ax(t) + e^{At} f'(t)$$

o sea,

$$f'(t) = B(t)e^{-At}.$$

Integrando:

$$f(t) = \int_0^t e^{-As} B(s)ds + K$$

con lo que tenemos un candidato a solución de (1.18)

$$x(t) = e^{At} \left[\int_0^t e^{-As} B(s)ds + K \right], \ \ K \in \Re^n. \tag{1.20}$$

Obsérvese que la ecuación anterior tiene efectivamente sentido, pues el término en el integrando, es una función vectorial. Luego representa n integrales, por lo que $x(t)$ resulta una función vectorial, bien definida de R en $\Re^n$.

Derivando $x(t)$ en la última ecuación verificamos que efectivamente es una solucion para (1.18).

Finalmente podemos comprobar que toda solución de la ecuación (1.18) ha de ser de la forma (**??**). Para comprobar esto supongamos que que $y : R \to \Re^n$ es una segunda solución de (1.18). Entonces:

$$x' - y' = A(x - y) \tag{1.21}$$

como sabemos (1.21) tiene soluciones de la forma:

$$x - y = e^{At} K_0, \text{ para algún } K_0 \in \Re^n$$

Despejando, resulta: $y(t) = x(t) + e^{At} \bar{K}_0$. Es decir que $y(t)$ es de la forma (1.20).

Toda solución de (1.18) puede escribirse en la forma:

$$x(t) = u(t) + e^{At} K,$$

siendo: $u(t) = e^{At} \int_0^t e^{-As} B(s) ds$.

Nótese que $u(t)$ es una solución de (1.18) y $e^{At}K$ es una solución de la ecuación homogénea:

$$y' = Ay$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación no homogénea se obtiene sumando una solución particular, a la solución general de la ecuación homogénea.

Si la función $B(t)$ es minimamente complicada será probablemente imposible obtener una fórmula simple, No obstatne algunos ejemplos importantes pueden esto puede realizarse.

Ejemplo 12 *Hallar la solución general de:*

$$x_1 = -x_2$$

$$x_2 = x_1 + t$$

Aquí:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad e^{-At} = \begin{bmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix}$$

y la integral es:

$$\int_0^t \begin{bmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} ds = \int_0^t \begin{bmatrix} s \sin s \\ s \cos s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \sin t - t \cos t \\ \cos t + t \sin t - 1 \end{bmatrix}.$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la solución general será de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t - t \cos t + K_1 \\ \cos t + t \sin t - 1 + K_2 \end{bmatrix}.$$

Realizando la multiplicación de matrices y simplificando resulta:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -t + K_1 \cos t + (1 - K_2) \sin t, \\ x_2(t) &= 1 - (1 - K_2) \cos t + K_1 \sin t \end{aligned}$$

Esta es la solución cuyo valor en $t = 0$ es:

$$x_1(0) = K_1, \ x_2(0) = K_2.$$

1.7. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Consideremos ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, en las que aparecen derivadas de orden superior, por ejemplo:

$$s'' + as' + bs = 0 \tag{1.22}$$

Introduciendo nuevas variables podemos reducir (1.22) a un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Sea $x_1 = s$ y $x_1' = s'$. Entonces de (1.22) resulta:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -bx_1 - ax_2 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Podemos ver que si $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ es una solución del sistema lineal, entonces es solución de (1.22).

Este procedimiento vale también en casos de orden mayor a 2. Consideremos:

$$s^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + a_{n-1}s' + a_n s = 0. \tag{1.24}$$

Aquí s es una función real de t y s^i es la derivada $i-$ésima de s, mientras que $a_1, a_2, ...a_n$ son constantes.

En este caso las nuevas variables son $x_1 = s$, $x_2 = x_1', ..., x_{n-1} = x_{n-1}'$ y el sistema equivalente a la ecuación es:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= \qquad\quad x_3 \\ \vdots \quad & \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\ x_n' &= -a_n x_1 \quad -a_{n-1}x_2 \quad - \cdots - a_1 x_n. \end{aligned}$$

En notación vectorial esta matriz tiene la forma $x' = Ax$ donde A es la matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

El **polinomio característico de la matriz** A lo representamos por $P(\lambda)$ y corresponde al determinante de la matriz $A - \lambda I$. Observe que las raíces de este polinomio, corresponden a los autovalores de la matriz A.

Proposición 5 *El polinomio característico de la matriz A es:*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Demostración: La demostración se hace por inducción completa sobre n. Se comprueba fácilmente para $n = 2$. Se supone cierta para $n-1$ y luego se verifica fácilmente que $Det(\lambda I - A)$ es igual a $\lambda Det(\lambda I - A_{n-1}) + a_n$, desarrollando por la primera columna. []

El interés de la proposición anterior radica en que el polinomio característico puede obtenerse directamente a partir de la ecuación diferencial de orden superior.

Volvamos a la ecuación de orden 2, del comienzo, (1.22).

Denotemos las raíces de la ecuación polinomial $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ por λ_1, λ_2.

CASO 1 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Entonces se puede reducir al sistema de ecuaciones de primer orden, para el cual existe un sistema diagonalizado equivalente, cuyas soluciones en este sistema de coordenadas, son (y_1, y_2) donde: $y_1 = K_1 exp(\lambda_1 t)$, $y_2 = K_2 exp(\lambda_2 t)$

con constantes arbitrarias K_1 y K_2. Entonces como $x(t)$ o equivalentemente, $s(t)$, es una cierta combinación lineal de estas soluciones, resulta $s(t) = p_{11}K_1exp(\lambda_1 t) + p_{12}K_2exp(\lambda_2 t)$. Se concluye por lo tanto que toda solución de (1.22) es de la forma:

$$s(t) = C_1exp(\lambda_1 t) + C_2exp(\lambda_2 t)$$

para ciertas constantes C_1 y C_2 que pueden determinarse a partir de los valores iniciales $s(t_0),\ s'(t_0)$.

CASO 2 A continuación supongamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y que estos autovalores o raíces de la ecuación de segundo grado son reales. En este caso el sistema equivalente tendrá una matriz 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \beta & \lambda \end{bmatrix}, \beta \neq 0$$

La solución general del sistema será:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= K_1e^{\lambda t}, \\ y_2(t) &= K_1\beta te^{\lambda t} + K_2e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

siendo K_1 y K_2 constantes arbitrarias. En el sistema lineal original las soluciones son combinaciones lineales de las anteriores. Podemos concluir que, si el polinomio característico tiene una raíz doble real, entonces las soluciones de la ecuación de segundo orden, serán de la forma:

$$s(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t}.$$

Donde los valores de C_1 y C_2 se determinaran a partir de la condiciones iniciales $s(t_0),\ s'(t_0)$.

CASO 3 Finalmente en el caso en que λ_1 y λ_2 son números complejos conjugados la solución general del sistema lineal equivalente tiene la forma:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\mu t}(K_1cos\nu t - K_2\sin\nu t), \\ y_2(t) &= e^{\mu t}(K_1\sin\nu t - K_2cos\nu t), \end{aligned}$$

Se obtiene $s(t)$ como una combinación lineal de $y_1(t)$ e $y_2(t)$:

$$s(t) = e^{\mu t}(C_1cos\nu t + C_2\sin\nu t)$$

para ciertas C_1 y C_2 que dependen de las condiciones iniciales $s(t_0),\ s'(t_0)$.

Resumiendo los resultados anteriores, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5 *Sean λ_1 y λ_2 las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$. Entonces toda solución de la ecuación diferencial:*

$$s'' + a_1s' + bs = 0,$$

es del tipo siguiente:

Caso (a). λ_1 y λ_2 son reales y distintos: $s(t) = C_1exp(\lambda_1 t) + C_2exp(\lambda_2 t)$;

Caso (b). $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ es real: $s(t) = C_1exp(\lambda t) + C_2texp(\lambda t)$;

Caso (c). $\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1, \lambda_2 = \mu_2 + i\nu_2,\ \nu \neq 0 : s(t) = e^{\mu t}(C_1\cos\nu t + C_2\sin\nu t)$

En cada caso, C_1 y C_2 son constantes reales determinadas por las condiciones iniciales de la forma:

$$s(t_0) = \alpha, \;\; s'(t_0) = \beta.$$

Las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, pueden resolverse por métodos análogos, la comprensión cabal de estos métodos de resolución, requieren un poco más de álgebra. Recomendamos la lectura del libro de Hirsch, y Smale, *Ecuaciones Diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*.

1.7.1. Ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales no homogéneas

Comentaremos en esta sección algunos casos de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homgéneas que pueden resolverse mendiante métodos sencillos. Consideraremos

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = b(t).$$

Caso 1 $b(t)$ tiene la forma: $b(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + ... + a_n$. En este caso, buscamos una solución particular en la forma

$$S(t) = t^s P_n() = t^s \left[A_0t^n + A_1t^{n-1} + ... + A_n\right],$$

donde $s = 0, 1, 2$ corresponde al número de veces que 0 es raiz del polinomio característico. Sustituimos la supuesta solución en la ecuación diferencial, e igualamos potencias de igual exponente. Obtendremos entonces un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógniatas, los $A_0, ..., A_n$.

Ejemplo 13 *Consideremos por caso:*

$$s'' + 2s' + s = t - 1$$

Con las condiciones iniciales $s(0) = 1, s'(0) = 2$

El polinomio característico es $\lambda^2 + 2\lambda + 1$, la única raiz es $\lambda = -1$. Por lo tanto la solución generaldel sistema homogeneo es es:

$$s(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}.$$

Una solución particular para la ecuación no homogénea es:

$$S(t) = A_1t + A_0.$$

Encontraremos que $A_1 = 1$ y $A_0 = -3$.

Sumando la solución general de la homogénea a la solución particular, obtenemos la solución general de la ecuación de segundo orden.

$$s(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + t - 3$$

Calculemos ahora las constantes C_1 y C_2. Se tiene que:

$$s'(t) = (-C_1 + C_2)e^{-t} - C_2te^{-t} + 1.$$

A partir de las condiciones iniciales, poniendo $t = 0$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$s(0) = C_1 + C_2 - 1 = 1,$$

$$s'(0) = -C_1 + 1 = 2$$

Por lo cual la solución es

$$s(t) = 2e^{-t} + 3te^{-t} + t - 1$$

Caso II $b(t) = [a_0t^n + a_1t^{n-1} + ... + a_n]e^{at}$ buscamos la solución den la forma

$$S(t) = t^s \left[A_0t^n + A_1t^{n-1} + ... + A_n\right] e^{at}$$

y procedemos análogamente a lo hecho en el caso I.

Caso III $b(t) = [a_0t^n + a_1t^{n-1} + ... + a_n] \left\{ \begin{array}{c} cos\, t \\ sen\, t \end{array} \right.$. Buscamos la solución den la forma

$$S(t) = t^s \left[(A_0t^n + A_1t^{n-1} + ... + A_n)e^{at} cos\, t + (B_0t^n + B_1t^{n-1} + ... + B_n)e^{at} sen\, t\right]$$

y procedemos análogamente a lo hecho anteriormente.

1.7.2. El acelerador de segundo orden

Supongamos que la inversión deseada $I^*(t)$ es proporcional a la diferencia entre el stock del capital deseado $K^*(t)$ y el disponible $K(t)$.

$$\dot{K} = I^* = \alpha(K^* - K) \tag{1.25}$$

donde $\alpha > 0$ y para simplificar el modelo asumimos que no existe depreciación. Esta ecuación es llammada la *ecuación del ajuste del capital* y deja sin especificar al capital deseado.

Consideremos que la variación la inversión actual es igual

$$\dot{I} = \beta(I^* - I) \tag{1.26}$$

Sustiuyendo en esta ecuación (1.25) obtenemos la ecuación:

$$\dot{I} = \beta[\alpha((K^* - K)) - I) \tag{1.27}$$

Ahora bien como $I = \dot{K}$ se tiene que $\dot{I} = \ddot{K}$ sustituyendo en (1.27) llegamos a la ecuación de segundo orden

$$\ddot{K} + \beta\dot{K} + \beta\alpha K = \alpha\beta K^*. \tag{1.28}$$

El polinomio característico para esta ecuación es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \beta\lambda + \alpha\beta.$$

La característica de la solución de este problema dependerá entonces del discriminante de la ecuación de segundo grado $\lambda^2 + \alpha\lambda + \alpha\beta = 0$. Tendrá dos raíces reales y distintas is $\alpha > 4\beta$, dos raíces iguales si $\alpha = 4\beta$ y dos imaginarias si $\alpha < 4\beta$. Siendo α y β positivos la parte real siempre será negativa. Consideremos las posibles soluciones de acuerdo al teorema (5), si agregamos la solución particular $K(t) = K^*$ rsultan:

1. Caso $\alpha > 4\beta$. $K(t) = C_1 exp[\lambda_1 t] + C_2 exp[\lambda_1 t] + K^*$
2. Caso $\alpha = 4\beta$. $K(t) = C_1 exp[\lambda t] + C_2 t\ exp[\lambda t] + K^*$
3. Caso $\alpha < 4\beta$. $K(t) = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\mu_1 t + C_2 \sin\mu_2 t) + K^*$.

En todos los casos la solución converge al valor de K^*. En el caso (3) aparecen oscilaciones.

Esta convergencia proviene del hecho de no haber considerado ninguna relación entre capital deseado y producto posible.

Ya para el caso simple, en que consideramos que el capital deseado en proporcional al producto $K^*(t) = kY(t)$, la estructura de la ecuación cambia absolutamente, a no ser que supongamos que Y es endógeno. Se obtiene entonces que

$$\dot{K} = I^* = \alpha(kY - K) \tag{1.29}$$

Para este caso podemos construir un modelo matemático sencillo a partir de considerar al consumo $C = a + bY \;\; a > 0,\ 0 < b < 1$. Considerando que

$$Y = C + I = \frac{1}{1-b}(a + I) = \frac{1}{1-b}(a + \dot{K}).$$

Poniendo ahora $K^* = kY$ considerando la ecuación (1.28) llegamos finalmente a:

$$\ddot{K} + \beta\left(1 - \frac{\alpha k}{1-b}\right)\dot{K} + \alpha\beta K = \alpha k \frac{1}{1-b}. \tag{1.30}$$

Ejercicio 17 *Encontrar la solución particular, y mostrar que la estabilidad ahora se pierde.*

1.7.3. Control tipo feedback y políticas de estabilización

Supongamos que los productores reaccionan al exceso de demanda en forma proporcional al mismo, de esta forma la varaiación del producto seguirá la forma:

$$Y' = \alpha(D - Y) \tag{1.31}$$

siendo $\alpha > 0$ Y el producto agregado y D la demanda agregada. Supongamos primeramente que el gobierno está ausente. En este caso la demanda agregada está dada por la propensión marginal a consumir del sector privado $D = (1-l)Y - u$, $0 < l < 1$, siendo u un factor de exógeno de perturbación. En este caso la ecuación (1.31) toma la forma:

$$Y' + \alpha l Y = -\alpha u \tag{1.32}$$

La solución de esta ecuación es $Y = Ce^{-\alpha l t} - \frac{u}{l}$. Si consideramos la condición iniical $Y(0) = 0$ entonces

$$Y(t) = -\frac{u}{l}\left(1 - e^{-\alpha l t}\right).$$

Esto signifca que $Y(t)_{t\to\infty} \to -\frac{u}{l}$.

Veamos que sucede freente a políticas de estabilización.

Supogamos que el gobierno interviene, sea G las comparas del sector público. En este caso la demanda agregada es:

$$D = (1-l)Y + G - u,$$

y la coorespondiente ecuación diferencial es:

$$Y' + \alpha lY + \alpha u = \alpha G. \tag{1.33}$$

Derivando en ambos miembros de l aigualdad obtenemos:

$$Y'' + \alpha lY' = \alpha G'. \tag{1.34}$$

Supongamos ahora que el gobierno intenta acercarse a cierto gast deseado G^* por lo que varía el gasto en forma proporcional a la desviación de este gasto deseado. Formalmente

$$G' = \beta(G^* - G), \tag{1.35}$$

siendo $\beta > 0$ y G el gasto actual. Sustituyendo la igualdad (1.35) en (1.34) llegamos a la ecuación:

$$Y'' + (\alpha l + \beta)Y' + \alpha\beta lY - \alpha\beta G^* = -\alpha\beta. \tag{1.36}$$

Supongamos ahora que $G^* = -gY$ Sustituyendo llegamos a la ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogenea:

$$Y'' + (\alpha l + \beta)Y' + \alpha\beta(l - g)Y = -\alpha\beta. \tag{1.37}$$

1.7.4. Ejercicios

Ejercicio 18 *Resuelva la ecuación* $a_0 y' + a_1 y = g(t),\ a_0 \neq 0$ *para los casos siguientes:*

1. $g(t)$ *es una constatne.*
2. $g(t)$ *es un polinomio de tercer grado.*
3. $g(t) = ae^{bt}$

Ejercicio 19 *Para la ecuación (1.37)*

1. *Muestre que hay una solución particular* $Y_p = -\frac{1}{1-g}$.
2. *Obtenga la solución general y compare con los resultados obtenidos para el caso (1.31).*
3. *Discuta las siguientes alternativas:*
   (a) $G^* = -g_1 Y - g_2 Y'$.
   (b) $G^* = f\int_0^t Y(s)ds$. *(AYUDA: para discutir este caso introduzca* G^* *en la ecuación (1.34) y luego derive, obtendrá una ecuación difernecial homogenea de tercer orden.)*

1.8. Existencia y Unicidad de Soluciones

Sean $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $J \subset I \subset \mathbb{R}$ intervalos no triviales. Dada la ecuación $\dot{x} = f(t,x)$; una solución es una función derivable $u : J \to W$ tal que $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$; $\forall t \in J$.

Considérese el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $u(t_0) = x_0$ como condición inicial. ¿Tienes solución?, ¿es única?

Definición 1 ***(de solución local para el sistema de ecuaciones).*** *Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(t,x)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$, una solución local para el sistema es una función $\mathscr{E}(\cdot, x_0, t_0) : J \to W$ con $t_0 \in J$ y tal que $\mathscr{E}(t_0, x_0, t_0) = x_0$ y tal que $\forall t \in J$ se verifica $\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t, x_0, t_0) = f\big(t, \mathscr{E}(t, x_0, t_0)\big)$.*

Recuérdese que $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ con $X \subset \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz si $\forall x \in X \exists W_0 \subset W$ vecindad de x tal que $\phi\big|_{W_0}$ es Lipschitz. La variable puede cambiar en cada vecindad.

Lema 1 *Toda función $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ es Lipschitz.*

Prueba 1 *Sea $x_0 \in Dom(f)$ y W_0 vecindad convexa de x_0. Considérese $y, z \in W_0$; $u = z - y$. Entonces $y + su \in W_0$ para $0 \leq s \leq 1$. Sea $\phi(s) = f(y + su)$*

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \phi' = Df(y+su) \cdot u \\
&\Rightarrow f(z) - f(y) = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(s)ds = \int_0^1 \big(Df(y+su)\cdot u\big)ds \\
&\Rightarrow |f(z) - f(y)| \leq \int_0^1 |Df(y+su)\cdot u|\, ds \\
&\leq \int_0^1 \|Df(y+su)\| \cdot \|u\|\, ds \leq k\,\|z-y\|
\end{aligned}
$$

con $k = \sup\limits_{W_0}\{Df(y+su)\}$.

Teorema 6 *de Picard Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz con respecto a la segunda variable. Entonces $\exists J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset I$ tal que $\dot{x} = f(t,x)$ con $x(t_0) = 0$ tiene una única solución $\mathscr{E}(\cdot, x_0, t_0) : J \to W$ con $\big(t, \mathscr{E}(t, x_0, t_0)\big) \in \Omega$.*

Prueba 2 *Si $X(t)$ es solución para el sistema, obtenemos*

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f\big(s, X(s)\big)ds; \forall t \in J.$$

Considere $L : \mathscr{C}^0(J) \to \mathscr{C}^0(J)$. Una solución para el sistema es un punto fijo del operador

$$L_X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f\big(s, X(s)\big)ds.$$

Sea $L : B_r(x_0) \to B_r(x_0)$, con x_0 función constante. Entonces

$$
\begin{aligned}
&(L_X)(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f\big(s, X(s)\big)ds \\
\Rightarrow &\|(L_X)(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \big\|f\big(s, X(s)\big)\big\|\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \big\|f\big(s, X(s)\big) - f(s, x_0)\big\| + \|f(s, x_0)\|\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \big(k\,\|x(s) - x_0\| + M_f\big)\, ds \text{ con } M_f = \max_J f(t, x_0) \\
&(t - t_0)(kr + M_f)\ ; \forall t \in J \\
&\leq \delta(kr + M_f)
\end{aligned}
$$

Búsquese δ *lo suficientemente pequeño tal que* $\delta(kr+M_f) < r$. *Así* $\|(L_X)(t) - x_0\| < r$ *y* $L_X \in B_r(x_0)$. *Además:*

$$\left\|(L_X)(t) - (L_{\overline{X}})(t)\right\| \leq \int_{t_0}^{t} \left\|f\big(s, X(s)\big) - f\big(s, \overline{X}(s)\big)\right\| ds$$
$$\int_{t_0}^{t} k\left\|X(s) - \overline{X}(s)\right\| \leq k\delta\|X - \overline{X}\|_\infty .$$

Si además escogemos δ *tal que* $k\delta < 1$, *entonces el operador L es una contracción. Hágase* δ *al mínimo de todas las* δ*'s y por el Teorema de Banach tiene un único punto fijo.*

Ejercicio 20 *1* $f(x) = \sqrt{x}$ *en* $[0, a]$ *no es* $\mathscr{C}^1$ *en ningún intervalo que contenga al* 0.

$$\mathscr{E}(t, 0) \equiv 0 \text{ y } \eta(t, 0) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \frac{t^2}{4} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

son soluciones de $\dot{x} = f(x)$ *y* $x_0 = 0$.

Ejercicio 21 *2* $\phi(x) = x^2$ *con* $x_0 = 1$ *para* $\dot{x} = \phi(x) = x^2$. *La solución es* $\mathscr{E}(t, 1) = \frac{1}{1-t} \forall t \neq 1$.

Ejercicio 22

1. *Discuta la existencia y unicidad de la solución del sistema*

$$\dot{x_1} = (2x_1 - 3)(1 - x_1)x_1$$

$$\dot{x_2} = -\dot{x_1}$$

   a) *Indique los equilibrios del sistema*

   b) *Sin resolver explicitamente el sistema dibuje la solución en la región* $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

2. *Análogamente para el sistema*

$$\dot{x_1} = (2x_1 - 3x_2)x_1x_2$$

   Siendo $x_1(t) + x_2(t) = 1$, $x_1(t) \geq 0, x_2(t) \geq 0$.

3. *Considere ahora el sistema*

$$\dot{x_1} = (2x_1 - 3x_2)(x_2 - 1)$$
$$\dot{x_2} = (x_1 - x_2)$$

4. a) *Indique los equilibrios del sistema*

   b) *Sin resolver explicitamente el sistema dibuje la solución en la región* $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

   c) *Dibuje la solución que pasa por* $(1, 2)$.

1.9. Continuidad con respecto a las condiciones iniciales e intervalo maximal

En esta sección veremos que la solución $\xi(t,x^0)$ depende continuamente de las condiciones iniciales. Veremos también lo que sucede cuando una solución $x(t)$ se aproxima al límite del intervalo temporal (α,β) en el que puede ser definida.

El siguiente teorema muestra que soluciones que comienzan en puntos vecinos, pueden ser definidas en un mismo intervalo cerrado y que se mantienen *cercanas* en dicho intervalo.

Teorema 7 *Sea $\phi \in C^1$. Sea $x(t) = \xi(t,x^0)$ la solución de $x' = \phi(x)$ con $x(t_0) = x^0$ definida en el intervalo cerrado $[t_0,t_1]$. Existen $U_{x^0} \subset \Re^n$ de x^0 y una constante K tales que si $z^0 \in U_{x^0}$ entonces existe una única solución $z(t) = \xi(t,z^0)$ también definida en $[t_0,t_1]$ con $z(t_0) = z^0$, y $z(t)$ satisface:*

$$|x(t) - z(t)| \leq K|x_0 - y_0|exp(K(t-t_0))$$

para todo $t \in [t_0,t_1]$

El teorema previo dice que si dos soluciones $(x(t)$ e $y(t)$ de un sistema de ecuaciones diferenciales, están proximas en un mometo $t = t_0$ entonces se mantendrán *cerca* para todo t futuro. Más precisamente no se alejarán más rapidamente que una exponencial.

Maś precisamente nos dice que el flujo, $\phi_t : R^n \to R^n$ es una función continua de $x \in X$.

Ejercicio 23 *Sea $k > 0$. Considere el sistema:*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} x.$$

1. *Encuentre las soluciones, $x(t)$ e $y_\eta(t)$ que pasan por los puntos $x(0) = (-1,0)$, y $y_\eta(0) = (-1,\eta)$*

2. *Muestre que en un tiempo $t = 10$ la separación entre las respectivas soluciones será menor que $|\eta|e^{10k}$.*

3. *Muestre que si $\eta \to 0$ entonces $Y_\eta(t) \to x(t)$.*

Mostraremos ahora que si consideramos el mayor de los intervalos abiertos (α,β) en el que puede definirse una solución $\xi(\cdot,\, x^0)$ para $x' = \phi(x)$, y cada $x^0 \in W$ siendo W un subconjunto abierto en el dominio de ϕ donde es C^1, entonces cuando t se aproxima al borde del intervalo de definición de la solución, ésta se escapa de cualquier compacto $K \subset W$.

Definición 2 *Considere $x' = \phi(x)$ donde $\phi \in C^1$ está definida en W subconjunto abierto de*
mathbbR^n. Para cada $x^0 \in W$ existe un intervalo maximal (α,β) conteniendo el cero, en el que existe una única solución $\xi(\cdot,\, x^0) : (\alpha,\beta) \to W$. Llamamos **intervalo maximal** *J a la unión de estos (α,β) donde existe una solución $\xi(\cdot,\, x^0)$ para $x0 \in W$ es decir $J = \cup_{x^0 \in W}(\alpha,\beta)$.*

Ejemplo 14 *Considere la ecuación diferencial en* $\Re$ *dada por*

$$\dot{x} = 1 + x^2$$

Las soluciones de esta ecuación son las funciones:

$$x(t) = tan(x + c)$$

donde c es una constante tales soluciones no puede ser extendidas fuera del intervalo

$$-c - \frac{\pi}{}2 < t < -c + \frac{\pi}{2}$$

Obsérvese que $x(t) \to \mp\infty$ *cuando* $t \to -c \pm \pi/2$.

El ejemplo es típico y se tiene el siguiente teorema.
El teorema será enunciado para el borde derecho, pero el otro caso es análogo.

Teorema 8 *Sea* $W \subset \mathbb{R}^n$ *abierto, sea* $\phi : W \to \Re^n$ *un mapa* C^1. *Sea* $y(t) = \xi(t, y^0)$ *una solución en un intervalo maximal* $J = (\alpha, \beta) \subset R$ *con* $\beta < \infty$. *Entonces dado un compacto cualquiera* $K \subset W$ *existe* $t \in J$ *con* $y(t) \notin K$.

El teorema dice que una solución $x(t)$ no puede extenderse a un intervalo temporal mayor entonces la solución se extiende más allá de cualquier conjunto compacto K contenido en W. es decir afirma que cuando $t \to \beta$ la solución se acerca arbitrariamente al borde de W. Lo mismio cuando $t \to \alpha$.

De este teorema resulta el siguiente corolario:

Corolario 1 *Sea A un subconjunto compacto de* $W \subset \Re^n$ *abierto. Si para todo* $x(0) = x^0 \in A$ $\xi(t, x^0)$ *cae enteramente en A entonces existe una solución* $\xi(\cdot,\ y^0) : [0, \infty) \to W$ *con* $\xi(t, y^0) \in A$ *para todo* $t \geq 0$.

Demostración: Sea $[0, \beta)$ el intervalo semiabierto maximal en el que existe una solución. Si β es finito, de acuerdo al teorema anterior existe $t \in [0, \beta)$ tal que $y(t) \not{\!\!\!\!\;} nA$, luego $y([0, \beta)) \subset A$. Luego, en las condiciones del teorema, β no puede ser finito.

1.10. Equilibrios

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x(t), t). \tag{1.38}$$

Definición 3 *Un punto* $\bar{x} \in X$ *en el sistema de ecuaciones anteriores es llamado* **un punto de equilibrio***, o punto esacionario, o equilibrio din'amico, si* $f(\bar{x}, t) = 0$ *para todo* t.

El siguiente ejemplo tiene por objetivo motivar el estudio que llevaremos adelante en esta sección, pero no crea todo lo que le dicen, sobre todo cuando el ejemplo que presentaremos se basa en una de las leyes de las que más se habla en economía, pero no parece ser tan universal.

Ejemplo 15

- *Trataremos el tiempo como una variable continua, y supondremos que los productores fijan los precios de los productos sin conocer la curva de demanda,* $D(p)$.

- *Al precio p los consumidores adquieren por unidad de tiempo, la cantidad $D(p)$, supuesta función decreciente con p. A ese precio los productores desean vender la cantidad $S(p)$ por unidad de tiempo, función creciente con p.*
- *$s(p)$ y $D(p)$ pueden ser diferentes, pues en el esquema nada indica que los productores estén vendiendo lo que desean a precio p, admitamos que los productores corrijan el precio del producto proporcionalmente a la demanda excedente del producto:*

$$\frac{dp}{dt} = k(D(p) - S(p)) \tag{1.39}$$

Esta es la ecuación de Samuelson de la Ley de la Oferta y la Demanda. Desde que las curvas se interceptan en p_0, precio al que la oferta es igual a la demanda, vemos que el precio del mercado p convergirá para p_0. Esto puede verse en la figura siguiente:

Ejercicio 24 *Analice el siguiente caso:*

$$D(p) = a_d + b_d P$$

$$S(p) = a_s - b_s p$$

$$\dot{p} = k(D(p) - S(p))$$

(a) Discuta la solución en función de los valores de los coeficientes $a_d, b_d; a_s, b_s$.

(b) Encuetre el equilibrio del sistema.

(c) Analice la convergencia de la solución al equilibrio.

Dejando convicciones de lado, vayamos a la teología.

Obsérvese que si $\bar{x}$ es un punto de equilibrio, entonces $\phi_t(\bar{x}) = \bar{x}$ para todo t. Por este motivo se le llama punto estacionario o punto fijo del flujo. Nos preocupará el estudio de la solución, $\phi(t, x_0, t_0)$, esto es la solución que en $t = t_0$ pasa por x_0, es decir: $\phi(t_0, x_0, t_0) = x_0$, en particular nos ocuparemos del comportamiento de soluciones que pasan en $t = t_0$ por un punto x_0 próximo a $\bar{x}$ y por otra parte del comportamiento de las soluciones, cuando x_0 es un punto arbitrario del plano. El primer aspecto se relaciona con la llamada estabilidad local del punto de equilibrio, y el segundo con la estabilidad global.

Obsérvese que la solución ϕ depende de t_0 como de x_0. por lo que la solución se escribirá entonces en la forma $\phi : \Re \times \Re^n \times \Re \to \Re^n$ representando entonces $\phi(t, x_0, t_0)$, la solución el sistema, que en el momento t_0 se encuentra en x_0.

Definición 4 *Un equilibrio $\bar{x}$ es llamado* **globalmente asintóticament estable***, si*

$$\phi(t, x_0, t_0) \to \bar{x} \text{ cuando } t \to \infty.$$

Más precisamente, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\bar{t}$ tal que $||\phi(t, x_0, t_0) - \bar{x}|| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0 + \bar{t}$ La definición no depende ni de x_0 ni de t_0.

Definición 5 *Un equilibro $\bar{x}$ es llamado* **estable** *si para todo entorno $U_{\bar{x}}$ de $\bar{x}$ en el dominio de $f(t,\cdot)$ existe un entorno $U_{1\bar{x}} \subseteq U_{\bar{x}}$ tal que toda solución $x(t)$ con $x(0)$ en $U_{1\bar{x}}$ está definidia y permanece en $U_{\bar{x}}$ para todo $t > t_0$.*

Definición 6 *Un equilibrio $\bar{x}$ es llamado* **localmente asintóticamente estable***, si existe una bola $B_\delta(\bar{x})$ de radio δ y centro x_0 tal que si $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ implica*

$$\phi(t, x_0, t_0) \to \bar{x} \ \ cuando\ \to \infty.$$

Más precisamente, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon)$ y un $\bar{t}(\varepsilon, x_0)$ tal que si $||x_0 - \bar{x}|| \leq \delta$ implica $||\phi(t, x_0, t_0) - \bar{x}|| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0 + \bar{t}$.

Podemos también decir que, $\bar{x}$ es asintóticamente estable si y solamente si, es estable y además $\lim_{t\to\infty} = \bar{x}$ para toda solición con $x(t_0) \in U_{1\bar{x}}$.

Ejemplo 16 *Consideremos la ecuación:*

$$\dot{x}(t) = -2x(t), \ \ t \in \Re, \ \ x \in \Re \ \ y \ \ x(t_0) = x_0$$

Claramente $\bar{x} = 0$ es un estado de equilibrio, es fácil ver que esta solución es el único equilibrio. La solución para esta ecuación es:

$$\phi(t, t_0, x_0) = x_0 exp(-2(t - t_0))$$

Puede verse que $\phi(t; t_0, x_0) \to 0$ cuando $t \to \infty$ independientemente del valor inicial, la solución de equilibrio es única y el sistema es globalmente estable.

Discuta en función de a el caso

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

Ejemplo 17 *Consideremos la ecuación:*

$$\dot{x} = -\frac{1}{5}x^3(t), \ \ t \in \Re, \ \ x \in \Re, \ \ x(t_0) = x_0$$

Claramente, $\bar{x} = 0$ es el único estado de equilibrio. Haciendo un diagrama, ver figura, puede verse que si $x > 0$ entonces $\dot{x} < 0$ y si $x < 0$ entonces $\dot{x} > 0$. Consecuentemente $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$

Supongamos ahora que tenemos el siguiente sistema lineal y homogéneo, con coeficientes constantes:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \ \text{ donde } \ A = [a_{ij}] \ \text{ es una } \ n \times n \ \text{ matriz}$$

Si A es no singular, entonces $\bar{x} = 0$ es el único estado de equilibrio.

Sea $\dot{x}(t) = Ax(t)$ un sistema de ecuaciones diferenciales con $x(0) = x_0$. Sabemos que la solución es de la forma:

$$\phi(t, x_0, 0) = exp(At)x_0$$

Donde: $exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$. Esto es $exp(At)$ es una matriz $n \times n$.

Suponga que A tiene n autovalores distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Existe entonces una matriz P tal que PAP^{-1} tiene una forma diagonal cuyos elementos son los autovalores (váse teorema (1)). Usando esta propiedad se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2 *Si A es la matriz del sistema lineal y tiene n autovalores diferentes, $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, entonces la solución puede escribirse como:*

$$\phi(t; x_0) = Pexp(\Lambda t)P^{-1}x_0$$

donde P es una matriz no singular de orden $n \times n$ y

$$exp(\Lambda t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

En este caso la estabilidad depende crucialmente de los autovalores de la matriz A. En particular si la parte real de todos los autovalores es negativa entonces claramente $exp(\Lambda t) \to 0$ si $t \to \infty$. Por lo que en este caso el sistema será globalmente estable.

Teorema 9 *Sea $\dot{x}(t) = Ax(t)$ un sistema de ecuaciones diferenciales. El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es globalmente estable si y sólo si la parte real de los autovalores de A es negativa.*

Si un sistema está dado por $\dot{x}(t) = A(x(t) - \bar{x})$ entonces $x(t) = \bar{x}$ es el único estado de equilibrio, mediante el cambio de variables $y = x(t) - \bar{x}$ hallamos que $\bar{y} = 0$ es el punto de equilibrio.

Es sabido que si una matriz A s definida negativa, entonces todos los autovalores de la matriz son negativas, consecuentemente el sistema es asintoticamente estable. Decimos entonces que el equilibrio es un *atractor global.*

1.11. Estabilidad en Primera Aproximación

Consideremos ahora la ecuación

$$\dot{x} = f(x) \;\; f : W \to \Re^n \;\; W \subset \Re^n, \; abierto. \tag{1.40}$$

Supongamos que $f \in C^1$ y que $\bar{x} \in \Re^n$ es un punto de equilibrio. se verifican entonces los siguientes teoremas:

Teorema 10 (Atractor local) *Sea $Df(\bar{x})$ la matriz de derivadas de f. Si todos los autovalores de dicha matriz tienen parte real negativa, entonces existe un entorno $U_{\bar{x}}$ de $\bar{x}$ tal que toda solución $\phi(t, x_0) \to \bar{x}$ cuando $t \to \infty$ para todo $x_0 \in U_{\bar{x}}$.*

Si bien no incluimos la demostración del teorema la idea de la demostración del mismo es la siguiente: Consideremos sin pérdida de generalidad que $\bar{x} = 0$, en otro caso haremos el cambio de variables $y(t) = x(t) - \bar{x}$. Como todos los autovalores ed $Df(0)$ son negativos, existe $c > 0$ tal que la parte real de todo autovalor es menor que $-c$. Luego puede probarse que toda solución $x(t)$ del sistema original verifica la desigualdad $\|x(t)\| \leq -c\|x(0)\|$.

Teorema 11 *Supongamos que $\bar{x}$ es un equilibrio estable para el sistema (1.40). Entonces ningún autovalor la matriz $Df(\bar{x})$ tiene parte real positiva.*

La demostración del teorema la incluiremos en un apéndice, corresponde al Teorema de Hartman-Grobman o de linealización. No obstante agregaremos el siguiente corolario:

Corolario 3 *Un punto de equilibrio hiperbólico es o bien inestable, o bien asintóticamente estable.*

Definición 7 *Diremos que un punto de equilibrio $\bar{x}$ es* hiperbólico *si la derivada de $Df(\bar{x})$ no tiene autovalores con parte real nula.*

Decir entonces que un equilibrio $\bar{x}$ es hiperbólico, significa que ningún autovalor de $Df(\bar{x})$ tiene parte real nula. En este caso si:

- Todo autovalor tiene parte real negativa, decimos que $\bar{x}$ es un *atractor.*
- Todo autovalor tiene parte real positiva, decimos que $\bar{x}$ es un *repulsor.*
- Si se presentan ambos signos en un *punto silla*. Obviamente un punto silla es inestable.

Este teorema se fundamente en la posibilidad de sustituir en un entorno de un punto de equilibrio, al campo vectorial f por su aproximación lineal de primero orden:

$$f(\bar{x}) = A(x-\bar{x}) + g(x), \text{ donde } \lim_{x\to\bar{x}} \frac{g(x)}{\|x-\bar{x}\|} \to 0.$$

El siguiente teorema da una condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga sus autovalores con parte real negativa.

Teorema 12 Routh-Hurwitz *Una condición necesaria y suficiente para que las raíces del polinomio característico*

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

coeficientes reales, tenga raíces con parte real negativa, es que los determinantes Δ_i de los menroes principales de la matriz Δ sean todos positivos. Sin pérdida de generalidad escribimos $a_0 > 0$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Nótese que todos las entradas que correspondan a valores mayores que n están formadas por ceros.

$$\Delta_1 = a_1, \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} ...$$

Ejemplo 18 *Sea $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 24)$.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -24 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -24 \end{pmatrix}$$

Tiene $|\Delta_1 = 1 > 0$, $|\Delta_2| = 26 > 0$, $|\Delta_3| = -(24^2) < 0$ no verifica el criterio.

Mientras que para el polinomio: $P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$ resulta

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Tiene $|\Delta_1 = 4 > 0$, $|\Delta_2| = 10 > 0$, $|\Delta_3| = 20 > 0$ verifica el criterio. En efecto las raices de este polinomo so $\lambda = -1$ doble y $\lambda = -2$.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo, (esto es un sistema en el que el segundo miembro no depende explicitamente de t.

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

del cual queremos conocer propiedades locales de la solución de equilibrio. El procedimiento habitual es el de obtener el desarrollo de Taylor de f en el punto $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$ y considerar unicamente los términos de primer orden. Entonces obtenemos el sistema:

$$\dot{x}(t) = A(x(t) - \bar{x})$$

donde $A = [a_{ij}], a_{ij} = \frac{df_j}{dx_i}$ evaluado en $x = \bar{x}$. Este sistema es conocido como **aproximación lineal del sistema**.

Observación 4 *Es un resultado conocido que si un punto de equilibrio en la aproximación lineal es globalmente estable entonces es localmente estable en el sistema original.*

El recíproco no es necesariamente cierto, en otras palabras, es posible que un punto de equilibrio sea globalmente o localmente estable en el sistema original y no sea estable en la aproximación lineal.

Ejemplo 19 *Consideremos como caso:*

$$\dot{x}(t) = ax(t) - x(t)^3.$$

Ciertamente $\bar{x} = 0$ es un punto de equilibrio. La aproximación lineal para $a = 0$ es $\dot{x}(t) = 0$. Aquí $\bar{x} = 0$ no es estable, pues la solución que parte de x_0 es $x(t) = x_0$. No obstante 0 es un equilibrio asintoticamente estable. Por este motivo la aproximación linal no debe usarse sin cuidados para hacer estática comparativa.

Ejemplo 20 *Volvamos nuevamente al modelo de crecimiento de Solow, utilizando $f(k) = k^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Ya obtuvimos para este caso la ecuación (1.7) según la cual:*

$$\dot{k} = sak^\alpha - (n+\delta)k.$$

Obtuvimos también dos punto fijos $k_1 = 0$ y $k_2 = \left(\frac{sa}{n+\delta}\right)^{-(\frac{1}{\alpha-1})}$.

Tomamos la primera aproximación en un entorno de cada uno de los puntos de equilibrio:

$$f(k) = f(k^*) + f'(k^*)(k - k^*)$$

Resulta $f(k^*) = 0$ y $f'(k^*) = \alpha sa(k^*)^{\alpha-1} - (n+\delta)$

1. *Para el caso $k_1^* = 0$ la derivada no está definida.*

2. *Para el caso $k_2^* = k_2$ obtenemos:*

$$f'(k_2) = -(n+\delta)(1-\alpha).$$

Luego obtendremos $f(k) \sim -(n+\delta)(1-\alpha)(k-k^*)$

Obtenemos entonces la primera aproximación: $\dot{k} = -(n+\delta)(1-\alpha)(k-k^*)$ que resulta una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución es:

$k(t) = k_2^* + (k(0) + k_2^*)e^{-(n+\delta)(1-\alpha)t}$. Siendo negativo el exponente, el punto de equilibrio resulta asintóticamente estable para el sistema original.

Ejercicio 25 *Para el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la evolución de la economía:*

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t))-\rho-\theta g}{\theta} \\ \\ \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+g)k(t) \end{cases}$$

Donde k y c representa el capital por unidad de de trabajo efectivo y el consumo por unidad de trabajo efectivo. Véase D. Romer; Advanced Macroeconomic, Editor: Irwin Professional Pub; 4a. ed. (29 de marzo de 2011).

1. *Encuentre el estado estacionario de la economía*
2. *Para el caso $g = 2, \rho = \theta = 1/2, n = 1$ muestre a partir de la aproximación lineal que se trata de un punto silla.*

1.12. La Estabilidad según Liapunov

Como ya fue visto el estudio de los puntos de equilibrio juega un papel fundamental en las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones. Además está claro que un punto de equilibrio debe tener ciertas propiedades de estabilidad para tener relevancia en el mundo real, pues generalmente no es posible localizar exactamente un punto, sino sólo de manera aproximada. De ahí al importancia de que en un entorno del punto en cuestión, las soluciones no se alejen mucho con el tiempo, mejor aun si se aproximan con el correr del tiempo a la solución exacta.

Por el planteo que hicimos anteriormente, conocer la estabilidad de un equilibrio, supone conocer la totalidad de las soluciones de la ecuación diferencias, lo que puede resultar difícil sino imposible.

El matemático ruso A.M. Liapunov, en su tesis de doctorado de 1982, encontró un criterio muy amplio para conocer la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema dinámico

$$x' = f(x). \tag{1.41}$$

Aquí $f : W \to \Re^n$ es una aplicación C^1 en un conjunto $W \subset \Re^n$ abierto.

Se trata de generalizar la idea de que la distancia, $||x(t) - \bar{x}||$ decrece para las soluciones cercanas a $\bar{x}$.

Sea $V : U \to R$ una función derivable definida en $U \subset W$ de $\bar{x}$. Denotaremos por $\dot{V}(x) : U \to R$ la función definida por:

$$\dot{V}(x) = DV(x)(f(x))$$

Aquí el miembro de la derecha es simplemente el operador $DV(x)$ aplicado al vector $f(x)$. Entonces si $\phi_t(x)$ es la solución de la ecuación diferencial que pasa por x cuando $t = 0$,

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi_t(x))|_{t=0}$$

por la regla de la cadena. Consiguientemente, si $\dot{V}(x)$ es negativa, entonces V decrece a lo largo de la solución.

El teorema de Liapunov, tiene el siguiente enunciado:

Teorema 13 *Sea $\bar{x} \in W$ un punto de equilibrio de (1.41). Sea $V : U \to R$ una función continua definida en un entorno $U \subset W$ de $\bar{x}$, derivable en $U - x$, tal que* *(a)* $V(\bar{x}) = 0$ *y* $V(x) > 0$ *si* $x \neq \bar{x}$;

(b) $\dot{V} \leq 0$ *en* $U - x$.

Entonces $\bar{x}$ *es estable. Si además:*

(c) $\dot{V} < 0$ *en* $U - x$,

entonces $\bar{x}$ *es asintoticamente estable.*

Definición 8 *Una función V que satisface (a) y (b) se llama función de Liapunov para* $\bar{x}$.

Ponemos énfasis en que el teorema de Liapunov, se puede aplicar sin necesidad de conocer la solución de la ecuación. Como contrapartida, no existe un método definitivo para hallar funciones de Liapunov; es una cuestión de ingenio y de prueba y error en cada caso. elmatemático uruguayo J.L. Massera demostró el teorema recíproco de Liapunov. Algunas veces hay funciones naturales para ensayar

1.12.1. Ejemplos y aplicaciones

Consideramos a continuación algunos ejemplos que ilustran acerca de la teoría anteriormente expuestas.

Ejemplo 21 (Ecuación de Van der Pol). *Consideremos la ecuación:*

$$x'' - \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$$

donde $\varepsilon > 0$, *o el sistema equivalente:*

$$\begin{array}{rcl} x' & = & y + \varepsilon(x^3/3 - x) \\ y' & = & -x \end{array}$$

Definimos la función de Liapunov como $V(x,y) = (x^2+y^2)/2$. Entonces, $\dot{V} = \varepsilon x^2(x^2/3 - 1)$ a lo largo de una solución. Para $D = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 < 3\}, \dot{V} \leq 0\}$ mientras que $V(x,y) \geq 0$. Más aun, la desigualdad es estricta para todo $(x,y) \in D$ en ambos casos, por lo que concluímos la estabilidad asintótica del $(0,0)$ para toda solución tal que $(x(0), y(0)) \in D$.

Ejemplo 22 (Tatonnement processes) *Es frecuente en economía considerar el siguiente sistema dinámico de ajuste de precios:*

$$\dot{p} = kz(p)$$

donde se considera a los precios como función vectorial del tiempo, $p : R \to \Re^n$ *siendo* $z : S_+^{n-1} \to \Re^n$ *la función de exceso de demanda, k es una constante de juste. Este proceso es conocido como Tatonnement processes.*

Teorema 14 *Supongamos el siguiente mecanismo de ajuste de precios:* $p_i = k_i z_i(p), i = 1, \ldots, n$ *con la función exceso de demanda, satisfaciendo el axioma débil de la preferencia revelada, esto es: si* p^* *es un equilibrio de la economía, entonces* $p^* z(p) > 0$ *para todo* $p \neq p^*$. *Entonces* p^* *es asintoticamente estable.*

Demsotración: Definamos la siguiente función:

$$V(p) = \sum_{i=1}^{n} \left[(p_i - p_i^*)^2 / k_i \right].$$

Verifique que esta es una función de Liapunov para p^*. Más aun que la hipótesis de la preferencia revelada implica que,

$$\frac{d}{dt} V(p) = -2p^* z(p).$$

Observación 5 (El teorema de Sonnenschein-Mantel-Debreu) *El teorema SMD, afirma que dada una función que verifique la ley de Walras y se homogenea de grado cero, podemos construir una economía con preferencias cóncavas de forma tal que dicha función corresponda a su exceso de demanda. Esto dice que el campo vectorial asociado a la ecuación diferencial del tatonnement que aquí analizamos es muy amplio. Por lo tanto si bien la existencia del equilibrio puede probarse, la estabilidad del equilibrio está lejos de tener la misma genrealidad. En principio precios cercanos al de equilibrio pueden no converger a ningún lugar. En el caso considerado en la sección las funciones de demanda y oferta tienen formas muy particulares, los mercados se comportan en general en forma no tan simple. Por otra parte para economías con más de dos bienes no hay mecanismo que asegure la convergencia a algún precio de equilibrio.*

Ejemplo 23 (Presa-depredador) *Consideramos una especie depredadora en cantidad y y su presa en cantidad x. La especie depredadora se alimenta exclusivamente de su presa. El número de presas consumidas es proporcional al número de encuentros presa-depredador, el que suponemos poroporcional a xy La tasa de creimiento de la especie depredadora se puede escribir entonces como* $y' = (Cx - D)y$ *siendo* $C > 0, D > 0$. *La presa en ausencia de su depredador se reproduce, suponemos que su tasa de crecimiento sea* $x' = (A - By)x$. *siendo* $A > 0, B > 0$. *Llegamos entonces al sistema de* ecuaciones presa-depredador *de Lotka y Volterra:*

$$\begin{aligned} x' &= (A - By)x \\ y' &= (Cx - D)y. \end{aligned} \tag{1.42}$$

1. Este sistema tiene puntos de equilibrio: $(0,0)$ *y* $(D/C, A/B)$.

2. Nótese que los autovalores correspondientes a la arporximación lineal en el punto $(D/C, A/B)$ son imaginarios puros.

3. Resuelva la aproximación lineal correspondiente. Observe que aun nada se puede concluir acerca de la estabilidad del equilibrio.

4. Dibuje el diagrama de fases, indicando las rectas:

$$x' = 0 \quad y = \tfrac{A}{B}$$

$$y' = 0 \quad x = \tfrac{D}{C}$$

5. Indique en cada uno de los cuatro cuadrantes en que quedó dividido el espacio de fases la dirección del movimiento a lo largo de las soluciones. Ver'á que la trayectoria es antihoraria.

6. >Puede afrimar algo acerca de la estabilidad del equilibrio?

7. Analice la estbilidad del punto de equilibrio $(0,0)$.

8. Intentaremos encontrar una función de Liapunov para analizar la estabilidad del equilibrio $z = (D/C, A/B)$.

   Buscaremos la función de Liapunov en la forma $H(x,y) = F(x) + G(y)$. Queremos que a lo largo de las trayectorias $\dot{H}(x(t), y(t) \leq 0$.

   $\dot{H}(x,y) = xF'(x)(A - By) + yG'(y)(Cx - D)$.

   $\dot{H}(x,y) \equiv 0$ implica $\frac{xf'(x)}{Cx-D} \equiv \frac{yG'(y)}{By-A} \equiv cte$.

   Elegimos la constante igual a 1. Luego

   $$F'(x) = C - D/x$$

   $$G'(y) = B - A/y.$$

   Es decir: $F(x) = Cx - D\log x, \quad G(y) = By - A\log y$.

   Finalmente $H(x,y) = Cx - D\log x + By - A\log y$.

   Está definida para $x > 0, y > 0$ tiene un mínimo en z.

   - Luego V(x, y) = H(x, y)- H(Z) es una función de Liapunov, *en consecuencia z es estable.*

9. Además no existen ciclos límites, pues H no es constante en ningún conjunto abierto.

10. Luego o z es un sumidero, o bien es un centro de órbitas periódicas. En este caso es relativamente sencillo verificar que son órbitas periódicas. Para ver esto considere un punto cualquiera $w = (u,v) \neq z$. Si w no está en una órbita cerrada, entonces $\phi_t(w) \to z,\ t \to \infty$ en la recta $x = D/C$. Pero H es constante sobre las trayectorias, por lo que $H(\bar{w}) = H(z)$ para todo $\bar{w}$ en la trayectoiria de w. Esto contradice que z es un mínimo para H

11. Interprete el resultado.

En el capítulo 4 del texto *Evolutionary Game Theory* de Jörgen W. Weibull, se discute la evolución de los comportamientos humanos y animales dentro de una población dada. Los diferentes tipos posibles de conducta a seguir pro cad individuo se representa por un subíndice $i \in \{1,2,...,n\}$. Por x_i se representa el porcentaje de individuos que dentro de un población determinada siguen el comportamiento $i-$ésimo. De forma tal que $x_i \geq 0$ para todo i y además $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Llamaremos subpoblación $i-$ésima al conjunto de individuos que dentro de la población general, siguen el compartamiento $i-$ésimo.

Los individuos pueden cambiar su estrategia, por propia decisión si son humanos, por ejemplo porque deciden imitar a aqeullos que son más exitosos socialmente, o bien por mutaciones aleatorias en el caso de animales, resultando más exitosas aquellas mutaciones que hacen que los indivduos cambien al comportamiento que le da mayor sobrevida. Este proceso evolutivo puede ser represntado por un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\dot{x}_i = g_i(x)x_i, \text{ para todo } i \in \{1,2,...,\} \tag{1.43}$$

Donde g_i es una función real, definda en un dominio abierto X contenido en

$$\Delta = \{x \in \Re^n : x_i \geq 0; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\},$$

que representa la tasa de crecimiento de cada subpoblación es decir, $g_i(x) = \dot{x}_i / x_i$.

Sea $g(x) = (g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x))$. Observe que la condición $< g(x), x >= 0$ corresponde al hecho de ser Δ invariante para el sistema.

Definición 9 *Una función de tasa de crecimiento $g : X \to R^n$ se dice regular, si es Lipschitz continua en un dominio $X \subset R^n$ abierto que contiene a Δ y además verifica que $< g(x), x >= 0$ para todo $x \in \Delta$.*

En consecuencia un estado estacionario x^* debe verificar que $g_i(x^*) = 0$ para todo i tal que $x_i > 0$.

Definición 10 *Para cada $x \in \Delta$, definimos la función de entropía $H_x : Q_x \to \Re$*

$$H_x(y) = \sum_{i \in C(x)} x_i \log \frac{x_i}{y_i}$$

Siendo $Q_x = \{y \in \Delta : C(y) \subset C(x)\}$ donde, $C(x)$ representa el soporte de x, es decir, el subconjunto de coordenadas de x que toman valor positivo.

Ejercicio 26 *Muestre que si g es regular y si para x existe un entono U_x tal que*

1. *$g(y)x = \sum_i x_i g_i(x) > 0$ para todo $y \neq x \in U_x$ entonces x es un estado estacionario asintóticamente estable para el sistema (1.43).*

2. *$g(y)x = \sum_i x_i g_i(x) < 0$ para todo $y \neq x \in U_x$ entonces x es un estado estacionario asintóticamente inestable para el sistema (1.43)*

Sugerencia: Muestre que la función $H_x(y)$, la entropía, introducida en la definción 10 puede ser utilizada como función de Liapunov para el sistema (1.43) .

Para ello debemos probar $H_x(y) > 0$ para todo $y \in U_x$ que es convexa y que $H_x(x) = 0$, además que es decreciente a lo largo de toda solución del sistema (1.43).

1. $H_x(y) = \sum_{i \in C(x)} x_i \log \frac{x_i}{y_i} = -\sum_{i \in C(x)} x_i \log \frac{y_i}{x_i} \geq -\log \sum_{i \in C(x)} x_i \frac{y_i}{x_i} = -\log \sum_{i \in C(x)} y_i = \log 1 = 0$

2. Puede verse fácilmente que

$$\dot{H}_x(y) = \sum_i \frac{\partial H_x(y)}{\partial y_i} \dot{y}_i = -\sum_i \frac{x_i}{y_i} = -g(y)x < 0.$$

3. La convexidad y la igualdad $H_x(x) = 0$ son inmediatas.

1.13. Análisis de los puntos de silla

Recuerde que dado el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ decimos que el equilibrio $x = 0$ es un *punto silla* si los valores propios de A son reales y algunos son positivos y otros negativos. En el caso de ser el sistema no lineal, $\dot{x} = f(x)$ el equilibrio $\bar{x}$ es un *punto silla* si lo es para la aproximación lineal $\dot{x} = Df(\bar{x})(x - \bar{x})$.

Los modelos de ecuaciones diferenciales, en los que aparecen puntos de silla, son los más frecuentes en economía. La idea es que si los valores iniciales de la economía están sobre el llamado camino de ensilladura la economía evolucionará al equilibro. A diferencia del caso de atractores en el que cualquier trayectoria nos lleva al equilibrio acá llegar al equilibrio supone habere elegido convenientemente las condiciones inciales. En el otro extremo un repulsor implica el otro extremo, la imposiblidad total de llegar al equilibrio si las condiciones inciales no nos sitúan ya, en el mismo.

Definición 11 (Variedades estables e inestables) *Sea $\bar{x}$ un punto de silla de un sistema $\dot{x} = f(x)$. El conjunto de condiciones iniciales x_0^s que definen una trayectoria $\phi(t, x_0^s)$ que converje a $\bar{x}$ es llamada* variedad estable, *mientras que llamamos* variedad inestbale *al conjunto de condiciones iniciales x_0^u tales que $\phi(t, x_0^u) \to \bar{x}$ cuando $t \to -\infty$.*

Es decir que la variedad estable corresponde al conjunto

$$W^s(\bar{x}) = \{x \in \Re^n : \phi(t, x, t_0) \to \bar{x}\, t \to \infty\}.$$

Mientras que la inestable

$$W^u(\bar{x}) = \{x \in \Re^n : \phi(t, x, t_0) \to \bar{x}\, t \to -\infty\}.$$

En el caso de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incognitas, las variedades estables e inestables corresponden a curvas que pasan por $\bar{x}$ y sus tangentes en $\bar{x}$ quedan determinadas por los vectores propios correspondientes a los vectores propios de $Df(\bar{x}))$, siendo el que determina la variedad estable el correspondiente al valor propio negativo y el que determina la variedad inestable el que corresponde al valor propio negativo. Lo dicho puede generalizarse a mas dimensiones, siendo entonces superficies o variedades estables o inestables, a las que llamaremos espacios estables, determinados por las planos o variedades tangentes determinadas por el conjunto de vectores propios correspondientes a valores propios positivos y negativos respectivamente.

Ilustraremos estos conceptos con los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 24 *Analicemos el punto silla del siguiente sistema no lineal.*

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2 - 5\varepsilon x_1^3$$

El sistema lineal es

$$\dot{x} = Df(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$. Fácilmente se ve que $x_1 = a_1 e^{-t}$ y que $x_2 = a_2 e^{2t}$. El subespacio estable E^s corresponde al gneerado por el autovalor negativo, es decir $E^s = gen\{(1,0)\}$ y el inestable E^u por el autovector correspondiente al autovalor positivo, es decir $E^u 0 gen\{(0,1)\}$. Luego $\phi_t(x) \to 0$ si y solamente si $x \in E^s$. Para el sitema perturbado original tenemos la solución:

$$x_1(t) = a_1 e^{-t}$$

$$x_2(t) = a_2 e^{2t} + a_1^3 \varepsilon (e^{-3t} - e^{2t}) = (a_2 - a_1^3 \varepsilon) e^{2t} + a_1^3 \varepsilon e^{-3t}.$$

Luego $\phi_t(x) \to 0$ cuando $t \to \infty$ si y solamente si $a_2 = a_1^3$. Consideremos el subconjunto $S \subset \Re^2$

$$S = \{x \in \Re^2 : x_2 = \varepsilon x_1^3\}$$

es fácil ver que si partimos de un punto $a \in \Re^2 : a_2 = \varepsilon a_1^3$ y le aplicamos ϕ_t resultará que $\phi_t(a) \in S$ pues

$$\phi_t(S) = \begin{bmatrix} a_1 e^{-t} \\ \varepsilon(a_2 - \varepsilon a_1^3)e^{2t} + a_1^3 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

pero como $a \in S$ se verifica la igualdad $a_2 = \varepsilon a_1^3$ por lo que concluimos en que

$$\phi_t(S) = \begin{bmatrix} a_1 e^{-t} \\ \varepsilon a_1^3 e^{-3t} \end{bmatrix} \in S.$$

Es decir que S es invariante para ϕ_t. También es cierto que el flujo a lo largo de esta curva es estable, como además S es tangente al subespacio lineal en $(0,0)$. Observe además que cuando $\varepsilon \to 0$, S se transforma en E^S. De esta forma $W^s(0,0) = S$.

Ejemplo 25

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_1^2 \end{aligned}$$

Que podemos escribir en la forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}.$$

El flujo es

$$\phi_t(S) = \begin{bmatrix} a_1 e^{-t} \\ \\ a_2 e^{-t} + a_1^2(e^{-t} + e^{-2t}) \\ \\ a_3 e^t + \frac{a_1^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

siendo $x(0) = (a_1, a_2, a_3)$. Se ve que $\lim_{t\to\infty} \phi_t(a) = 0$ si y solo si $a_3 = -\frac{-a_1^2}{3}$. Luego

$$W^s(0,0) = S = \left\{a \in \Re^3 : a_3 = -a^2/3\right\}.$$

similarmente

$$W^u(0,0) = U = \left\{a \in \Re^3 : a_1 = a_2 = 0\right\}$$

Ejercicio 27 *Obtenga E^s y E^u y muestre que S es tangente a E^s mientras que U lo es a E^u en $(0,0)$.*

Ejercicio 28 *Considere el ejercicio 25 encuentre la variedad estable y la inestable.*

Capítulo 2

Optimización estática

2.1. Optimización estática

En optimización estática tres tipos de resultados son los más usados para resolver problemas: (1) Teoremas sobre las condiciones necesarias para que un elemento de cierto conjunto sea un extremo, son las llamadas condiciones de primer orden. (2) Condiciones suficientes, estas son básicamente condiciones relacionadas con las derivadas segundas, o concavidad y/o convexidad de las funciones que se están maximizando o minimizando. (3) Teoremas de existencia de valores extremos. Debemos destacar también que algunos resultados dan condiciones necesarias y/o suficientes para extremos locales, la pregunta a continuación es sobre las relación entre extremos locales y globales.

Ilustremos lo dicho con un problema simple. Supongamos que se trata de maximizar una función real diferenciable f_0 definida en el intervalo acotado y cerrado $U = [u_0, u_1]$. Es decir queremos resolver el problema:

$$max f_0(u), \text{ con } u \in U. \tag{2.1}$$

Una condición necesaria para que $u^* \in U$ sea la solución de este problema puede escribirse de la siguiente forma:

$$max_{u \in U} \frac{df_0(u^*)}{du} u = \frac{df_0(u^*)}{du} u^*, \tag{2.2}$$

o en forma equivalente:

$$\frac{df_0(u^*)}{du}(u - u^*) \leq 0. \tag{2.3}$$

Nota: Para u_0 en los extremos del intervalo alcanza con la existencia de las derivadas laterales.

Este principio del máximo puede ser probado fácilmente. Supongamos que u^* resuelve (2.1) entonces:

1. Si u^* es un punto interior se verifica que $\frac{df_0(u^*)}{du} = 0$, luego (2.2) y (2.3) se verifican trivialmente.

2. Si $u^* = u_0$ entonces $\frac{df_0(u_0)}{du} \leq 0$ y $u - u^* = u - u_0 \geq 0$ para todo $u \in U$.

3. Finalmente si $u = u_1$ entonces $\frac{df_0(u_1)}{du} \geq 0$ y $u - u^* = u - u_1 \leq 0$ para todo $u \in U$.

Observación 6 *En el caso de ser $f : U \subset R^n \to R$ continua y derivable, en U convexo y cerrado, debe considerarse el gradiente de la función evaluada en u^* cuyas coordenadas serán no positivas para el caso de máximo, (no negativas para mínimo) y si u^* es un punto de la frontera de la región en la que se está trabajando, entonces el vector $u - u^*$ es cualquiera que apunte hacia el interior de dicha región.*

Esta afirmación se deduce considerando los siguientes pasos:

Sea $u^* \in dom(f)$, un punto en el que f alcanza su máximo.

Representamos por $dom(f)$ el dominio de la función f el que asumimos convexo.

Para $u \in dom(f)$ siendo $v = u - u^*$ definamos la función, $\phi : [0,1] \to R$ por la relación: $\phi(\lambda) = f(u^* + \lambda v) - f(u^*)$.

Dado que el dominio de la función f es convexo, se sigue que $u^* + \lambda v \in dom(f)\ \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$.

Obsérvese que $\phi(0) \geq \phi(\lambda)\ \ \forall \lambda \in [0,1]$.

Se sigue entonces que $\phi'(0) = grad\ f(u^*)v \leq 0$. En particular, la desigualdad se obtiene para todo vector $v = u - u^*$, que apunta hacia el interior del $dom\ (f)$ y cada vez que u^* pertenece a la frontera del dominio de f.

Se sigue además, que el gradiente de f debe anularse en u^*, cada vez que éste sea un punto interior al dominio y en el que la función alcanza su máximo (obviamente siendo f derivable en dicho punto).

Ejercicio 29 *Escriba las condiciones equivalentes para mínimo.*

Las condiciones anteriores son condiciones necesarias para un máximo, pero no suficientes. Los puntos que verifican las condiciones necesarias son entonces los candidatos a máximo. Es entre los candidatos que debemos buscar los elementos con las condiciones requeridas para máximo. Generalmente estos no son muchos, de entre ellos nos quedamos con aquellos que hagan que el valor que alcanza f_0 sea el máximo. No obstante, en principio la existencia de algún máximo no está garantida. Precisamos condiciones adicionales, como por ejemplo las del teorema de Weierstrass. Si estas condiciones son verificadas entonces algunos de los candidatos resolverán el problema.

En algunos casos las condiciones necesarias son también suficientes, pero para que esto suceda muchas veces hay que restringir el conjunto de elementos con el que trabajamos. Así sucede si por ejemplo además de la continuidad exigimos la concavidad de f_0. En este caso, siendo que las funciones cóncavas verifican la desigualdad:

$$f_0(u) - f_0(u^*) \leq \frac{df_0(u^*)}{du}(u - u^*)\ \ \forall u \in U, \tag{2.4}$$

la condición necesaria pasa también a ser suficiente. Bajo el supuesto de concavidad los candidatos son máximos ya no sólo relativos, sino también globales. Condiciones como las obtenidas, analizando la derivada segunda en los puntos donde la derivada primera se anula, son generalmente condiciones suficientes, aunque solamente para extremos relativos, los que no son necesariamente absolutos o globales.

Finalmente cualesquiera de las condiciones necesarias (2.2) y (2.3), bajo el supuesto de concavidad, son también suficientes para que el candidato u^* sea máximo global, pues hacen que $f_0(u) - f_0(u^*) \leq 0$ para todo $u \in U$.

Observación 7 *Para el caso de ser $f : U \subset R^n \to R$ cóncava, en U convexo, análogamente a lo dicho en la observación 6, el gradiente evaluado en u^* es quien debe utilizarse en el lugar de la derivada respecto a u, en cuanto a $u - u^*$ será un vector interior a la región en la que se maximiza, por lo que el producto: $\frac{df_0(u^*)}{du}(u-u^*)$ represetará un producto interno. Siendo U convexo, es suficiente con la existencia de las derivadas parciales para toda dirección h tal que $u^* + \alpha h \in U$ y $0 < \alpha < 1$.*

2.1.1. Un problema simple de optimización dinámica

Consideremos ahora el siguiente sencillo problema de maximización. Sea f_0 una función real dada, consideremos los valores previamente fijados t_0 y t_1 que representan los instantes inicial y final del problema:

$$\max_{u \in \mathscr{U}} J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(u(t),t)dt, \tag{2.5}$$

donde $\mathscr{U}$ hace referencia al conjunto de todas las funciones continuas a trozos $u : [t_0, t_1] \to R$ tales que, para todo $t \in I$ se verifica que $u_0 \leq u(t) \leq u_1$. Siendo u_0 y u_1 valores reales prefijados.

El problema consiste entonces, en hallar aquella (o aquellas) función $u \in \mathscr{U}$ que haga que la integral del problema (2.5) tome su valor máximo. Es decir, se trata de encontrar $u^* \in \mathscr{U}$ que sea optimal para este problema. Para la siguiente proposición representaremos por U el intervalo real $[u_0, u_1]$. Luego, para cada $t \in I$ se verificará que $u(t) \in [u_0, u_1]$ y notamos:

Proposición 6 (Condición necesaria y suficiente) *Sea $f : U \times I \to R$ continua en ambas variables. Es condición **necesaria y suficiente** para que $u^* \in \mathscr{U}$ resuelva el problema (2.5) que para cada $t \in [t_0, t_1]$ se verifique la desigualdad:*

$$f\big(u^*(t),t\big) \geq f(u,t), \;\; \forall \;\; u \in U. \tag{2.6}$$

Prueba 3

- *Suficiente: El hecho se sigue naturalmente de que al verificarse la condición (2.6) se verifica que*

$$f\big(u(t),t\big) - f\big(u^*(t),t\big) \leq 0, \;\; \forall t \in [t_0, t_1] \tag{2.7}$$

y por lo tanto

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big[f(u(t),t) - f\big(u^*(t),t\big)\Big]dt \leq 0, \forall u \in U \tag{2.8}$$

- *Necesaria: Lo demostraremos por el absurdo. Supongamos u^* resuelve el problema (2.5), pero que existe $s \in [t_0, t_1]$ donde la condición (2.6) no se cumple. Esto es, que existe $\hat{u} \in U$ tal que $f(\hat{u}, s) \geq f(u^*(s), s)$. Luego por la continuidad de $u*$ en s existe un entorno, de s de radio δ, $V_s(\delta)$ tal que $f(u^*(t),t) \geq f(\hat{u},t)$ $\forall t \in V_s(\delta)$.*

  Consideremos ahora la función $\bar{u} \in \mathscr{U}$ definida como:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \hat{u}, \ \forall t \in \big[s-\delta, s\big] \\ u^*(t), \ \textit{en otro caso} \end{cases}$$

siendo s un punto de continuidad de $u^*(t)$ y $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Definimos entonces

$$\Delta\big(J(\delta)\big) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(\bar{u}(t),t\big)dt - \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(u^*(t),t\big)dt = \int_{s-\delta}^{s} \Big(f_0\big(\bar{u}(t),t\big) - f\big(u^*(t),t\big)\Big)dt. \tag{2.9}$$

La optimalidad de u^* asegura que $\Delta(J(\delta)) \leq 0$. Obsérvese también que $0 = \Delta(J(0))$. Luego podemos escribir que

$$\Delta\big(J(\delta)\big) = \Delta\big(J(\delta)\big) - \Delta\big(J(0)\big) \leq 0.$$

$$\Delta\big(J(\delta)\big) - \Delta\big(J(0)\big) \simeq \Delta'\big(J(0)\big)\delta.$$

Siendo $\Delta'\big(J(0)\big)\delta = f\big(\bar{u}(s),s\big) - f\big(u^*(s),s\big)$ se sigue que $\Delta'\big(J(0)\big) \leq 0$, por lo que $f\big(\hat{u},s\big) - f\big(u^*(s),s\big) \leq 0$ hecho este que contradice nuestro supuesto: Luego la condición necesaria para máximo.

Consideremos ahora el caso donde $f(u,t) \in C^1[U \times I]$ (para los puntos de la frontera de U alcanza con pedir la existencia de las derivadas laterales).

La siguiente condición es necesaria para la optimalidad de $u^*(t)$.

Proposición 7 *Sea $f(u,t) \in C^1[U \times I]$ entonces la condición*

$$\frac{\partial f_0(u^*(t),t)}{\partial u}\big(u - u^*(t)\big) \leq 0, \ \forall\, u \in U \ \forall t \in [t_0,t_1] \tag{2.10}$$

de continuidad de u^* es necesaria para que $J[u]$ alcance su máximo en u^*.

A los efectos de simplificar la escritura, utilizaremos la notación $f_0'(u,t) = \frac{\partial f_0}{\partial u}(u,t)$.

Prueba 4 *Para $u \in \mathscr{U}$, definimos $h(t) = u(t) - u^*(t)$. Por la convexidad de $\mathscr{U}$ se sigue que*

$$u^*(t) + \alpha h(t) = \alpha u(t) + (1-\alpha)u^*(t) \in \mathscr{U}.$$

Consideramos ahora la función, $\phi : [0,1] \to R$ definida como:

$$\phi_h(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(u^*(t) + \alpha h(t),t\big)dt \tag{2.11}$$

está bien definida. Siendo u^* la solución óptima, se sigue que $\phi_h(0) \geq \phi_h(\alpha) \ \forall \alpha$. Luego por la condición (2.7) (de la sección (2.1)) se tiene que $\phi_h'(0) = \int_{t_0}^{t_1} f_0'(u^*(t),t)(u(t) - u^*(t))dt \leq 0$ para cualquiera sea $u \in \mathscr{U}$ elegido (basta con la existencia en cero, de la derivada izquierda de ϕ). Esto implica que $f_0(u^*(t),t)(u - u^*(t)) \leq 0 \ \forall t \in [t_0,t_1]$, de continuidad de u^*, pues en otro caso existiría un punto $\bar{t} \in [t_0,t_1]$ de continuidad de u^*, y $w \in U$ tal que $f_0'(u^*(\bar{t}),\bar{t})(w - u^*(\bar{t})) > 0$. Luego por la continuidad de f_0' existe un entorno $V_{\bar{t}}$ de $\bar{t}$ donde $f_0'(u^*(t),t)(w - u^*(t)) > 0, \forall t \in V_{\bar{t}}$. En estas condiciones existe *entonces $w \in \mathscr{U}$ tal que $w(t) = w$, para todo t en su clausura y cero afuera* [1]*. Luego para $h(t) = w(t) - u^*(t)$ se tiene que $\phi_h'(0) > 0$, lo que contradice la maximalidad de u^*.*

2.1.2. Condiciones necesarias, suficientes y teoremas de existencia

Las condiciones necesarias nos definen candidatos, su optimalidad debe ser probada usando otros argumentos, por ejemplo encontrando cuales de los candidatos tienen asociado el mayor valor. Si hay teoremas de existencia, la optimalidad es propiedad de algunos de los candidatos. No obstante, en ausencia de tales teoremas nada nos garantiza que aun el mejor candidato sea maximal. Las condiciones suficientes, en general, son garantizadas por condiciones que restringen el problema, como la concavidad (ver proposición (8)), o por condiciones en las derivadas segundas.

La siguiente proposición se deduce directamente de la definición de función cóncava:

Proposición 8 (una condición suficiente) *Sea $f_0(u,t)$ cóncava y derivable en $u \in U$ para cada $t \in [t_0, t_1]$ entonces la condición (2.10) es también suficiente para la optimalidad de u^*.*

Prueba 5 *De la concavidad de f_0 en u para todo $t \in I$ se sigue que:*

$$f_0(u,t) - f_0(u^*(t),t) \leq \frac{\partial f_0\big(u^*(t),t\big)}{\partial u}\big(u - u^*(t)\big) \;\; \forall t \in I.$$

Luego de la condición (2.10) se sigue que $f_0(u,t) - f_0\big(u^*(t),t\big) \leq 0 \; \forall u \in U$ y $t \in I$. La condición necesaria es en este caso, también suficiente.

Ejercicio 30 *Enuncie el corolario correspondiente para el caso en que para cada $t \in I$, $f_0(u,t)$ sea convexa en $u \in U$.*

Teorema 15 *Sea $f_0 : U \times I \to R$ dos veces derivable continuamente en $u \in U$ para todo $t \in I$. Supongamos que $u^* : I \to R$ verifica las condiciones de primer orden (proposición (**??**)) y además la condición*

$$f_{uu}''\big(u^*(t),t\big) = \frac{\partial^2 f\big(u^*(t),t\big)}{\partial u^2} < 0 \; \forall \, t \in I, \tag{2.12}$$

entonces $u^*(t)$, es solución del problema de maximización del funcional $J[u]$ definido en (2.5) restringido a $u \in \mathscr{U}$.

Prueba 6 *Consideremos nuevamente la función $\phi : [0,1] \to R$ definida por:*

$$\phi_h(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(u^*(t) + \alpha h(t), t\big) dt$$

(ya introducida en (2.11)). Se sigue que $\phi(\alpha) - \phi(0) \leq \frac{1}{2}\phi''(0)\alpha^2$ luego siendo $\phi''(0) = \int_{t_0}^{t_1} f_{uu}''(u^*(t),t)dt < 0$, el teorema queda demostrado.

[1] La clausura de un conjunto es el conjunto de todos sus puntos de adherencia.

Ejemplo 26 *Resolver el siguiente problema:*

$$\max_{x\in\mathscr{U}} \int_0^5 (1-t)\big(x(t)\big)dt.$$

Siendo $\mathscr{U}$ *el conjunto de las funciones reales, continuas a trozos definidas en* $[0,5]$ *tales que* $2 \leq x(t) \leq 3\ \forall\, t \in [0,5]$.

Resulta $f(x,t) = (1-t)x$. *Consideramos la condición necesaria:*

$$\frac{\partial f(x^*,t)}{\partial x}(x-x^*) = (1-t)(x-x^*) \leq 0,$$

para todo $x \in [2,3]$ *y para todo* $t \in [0,5]$. *Luego tendremos que*

$$x^*(t) = \begin{cases} 2 & si\ 0 < t < 1 \\ 2 \leq x^* \leq 3 & si\ t = 1 \\ 3 & si\ 1 < t \leq 5 \end{cases}.$$

Observe que la condición necesaria es también suficiente por ser $f(x,t)$ *creciente para todo* $0 \leq t < 1$ *y decreciente en* $1 < t \leq 5$.

Ejemplo 27 *Resolver el siguiente problema:*

$$\max_{x\in\mathscr{U}} \int_0^7 (t-3)\big(x(t)\big)^2 dt.$$

Siendo $\mathscr{U}$ *el conjunto de las funciones reales, continuas a trozos definidas en* $[0,7]$ *tales que* $0 \leq x(t) \leq 10\ \forall\, t \in [0,7]$.

Resulta $f(x,t) = (t-3)x^2$. *Consideramos la condición necesaria:*

$$\frac{\partial f(x^*,t)}{\partial x}(x-x^*) = (t-3)2x^*(x-x^*) \leq 0,$$

para todo $x \in [0,10]$ *y* $t \in [0,7]$.

Obsérvese que la condición necesaria se cumple para $x^*(t) \equiv 0$. *No obstante, esta será máximo si y solamente si* $(t-3) < 0$ *es decir si y solamente si* $t < 3$. *En el intervalo* $0 < t < 3$, *la función* $f(x,t) = (t-3)x^2$ *resulta cóncava, por lo que la condición necesaria será también suficiente. No obstante, para* $3 < t \leq 7$ *la función resulta convexa en dicho intervalo, por lo que la condición necesaria no define un máximo sino un mínimo. Luego, el máximo se alcanzará para x en la frontera derecha del intervalo* $[0,10]$.

Resulta entonces

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq t < 3 \\ 0 \leq x^* \leq 10 & si\ t = 3 \\ 10 & si\ 3 < t \leq 7 \end{cases}.$$

Ejercicio 31 *Resuelva el problema pero ahora considerando* $1 \leq x(t) \leq 10$. *Observe que si bien para* $x(t) \equiv 0$ *la condición necesaria se verifica, esta función no puede ser considerada para el nuevo problema de maximización.*

Ejemplo 28 *Consideremos el siguiente problema:*

$$\max_{x\in\mathscr{U}} \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(x(t)\right)^{1/2} - x(t) \right] dt, \quad \mathscr{U} = \left\{ x \in C_1[t_0,t_1] : 0 < \varepsilon \leq x(t) \leq 1 \right\}.$$

Definimos $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(x(t)\right)^{1/2} - x(t) \right] dt$*. Se sigue que* $F(x)$ *es cóncava en* x *para todo* $x > 0$*. Luego podemos obtener el máximo usando las condiciones necesarias, es decir* $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x^*(t)\right)\left(x - x^*(t)\right) \leq 0$*.*

- *Se puede ver que si* $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ *entonces no existe soluciones con algún valor en la frontera de* $U = [\varepsilon, 1]$*. Luego la solución si existe es interior, es decir* $x^*(t) \in (\varepsilon, 1)$ $\forall t \in [t_0, t_1]$ *por lo que la condición necesaria implica:* $\frac{1}{2}x^{1/2}(t) - 1 = 0$, $\forall\, t \in [t_0, t_1]$ *es decir,* $x(t) \equiv \frac{1}{4}$*.*
- *Para el caso en que* $\frac{1}{4} < \varepsilon < 1$ *entonces* $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x$ *se maximiza en* $x = \varepsilon$*. En este caso se verifica que* $\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - 1\right)\left(x(t) - \varepsilon\right) \leq 0$ *para todo* $t \in [t_0, t_1]$ *y toda* x *admisible.*

2.1.3. Ejercicios

Ejercicio 32 *Considere el problema de minimización:*

$$\min_{x\in\mathscr{U}} \int_0^1 \left(t - x(t)\right)^4 dt \quad \text{para } 0 \leq x(t) \leq a.$$

- *Resuelva el problema discutiendo en función de* a*.*
- *Resuelva el problema de maximización correspondiente.*

Ejercicio 33 *Encuentre los extremos absolutos para el funcional:*

$$J(x) = \int_0^4 \left(t + t x(t) + x^2(t)\right) dt \quad \text{para } 0 \leq x(t) \leq 1.$$

Capítulo 3

Optimización dinámica

3.1. Cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones (o variacional) fue establecido por Euler y Lagrange en el siglo XVIII. Es un problema matemático consistente en buscar máximos y mínimos (o más generalmente extremos relativos) de funcionales continuos definidos sobre algún espacio de funciones. Es en ese sentido una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable. Se llaman funcionales a funciones reales, cuyo dominio lo constituyen a su vez, conjuntos de funciones. De la misma manera que una función real de una variable real, hace corresponder a cada número (en su dominio) otro número (su imagen), un funcional hace corresponder, a cada función (en su dominio), un número real (su imagen).

Por ejemplo, la longitud del camino seguido entre dos puntos es una funcional, porque su valor depende del camino seguido entre los puntos origen y destino, el camino seguido es una función y no un número. En economía dinámica, el bienestar definido por funciones de utilidad intertemporales, del tipo: $U(c) = \int_{t_0}^{t_1} u\big(c(t),t\big)dt$ para un período determinado de tiempo $[t_0,t_1]$, depende a su vez, del consumo $c(t)$ elegido en cada instante de dicho intervalo, este define la llamada senda de consumo.

Modernamente, el cálculo variacional, puede ser considerado como un capítulo de la teoría del control óptimo. No obstante algunos resultados de la teoría económica pueden obtenerse directamente a partir de él. Sumado a lo anterior la forma más sencilla de las demostraciones, respecto a las más generales del control óptimo hacen que sea valioso comenzar por el cálculo variacional como paso previo a la teoría del control, la que ciertamente, como fue dicho, es más general y lo comprende como caso particular.

En los inicios del cálculo variacional se encuentra el problema de encontrar el camino en el plano, que una partícula de masa m que se desliza sin fricción, debe seguir en presencia de un campo gravitatorio, para unir el punto $P = (x_0,y_0)$ con el origen $O = (0,0)$. Es el llamado problema de la curva braquistócrona que se remonta a J. Bernoulli (1696). Usando principios de mecánica clásica el problema puede formularse como, el de minimizar el funcional

$$T(f) = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\, dx\,,$$

donde g es la gravedad y las restricciones son $f(0) = 0, f(x_0) = y_0$. Como puede verse el valor que toma el funcional T depende de la función f elegida bajo la restricción de que pase por los puntos referidos. Entre todas ellas debe elegirse aquella que minimice el valor de T. La restricción a f derivable aparece como natural para los problemas físicos.

Nuestro trabajo comenzará con el estudio de un problema propio de la teoría económica, al que volveremos en diferentes oportunidades a lo largo del texto.

3.1.1. Consumo versus ahorro

Ejemplo 29 (Consumo versus ahorro) *Introduciremos acá el problema del ahorro, las preguntas planteadas están referidas a las características del ahorro que la autoridad central debe recomendar como forma de garantizar un mejor bienestar para un país. Altas tasas de consumo presente son preferibles, no obstante esto lleva a una insuficiente inversión que pueden resultar en una cantidad insuficiente de capital mañana. El planificador central intentará conciliar los extremos implícitos en este esquema consumo-inversión.*

Para resolver el problema de una trayectoria óptima de ahorro, comenzaremos definiendo una función de utilidad $U\big(C(t)\big)$ para la sociedad, definida sobre el consumo en un período de tiempo $[0,T]$. Esta función la asumimos cóncava y creciente en el consumo (como generalmente se concibe en teoría económica) para cada período $t \in [0,T]$. El planificador central (benevolente) buscará una trayectoria óptima de consumo, tal que maximice el bienestar social para el período considerado sujeto a que para consumir, la sociedad debe producir, y su consumo $C(t)$ en el momento t, no será otra cosa que la diferencia entre producto e inversión.

Asumimos que la sociedad produce el bien objeto del consumo, a partir del insumo $K(t)$ al que llamamos stock de capital en el momento t, mediante una tecnología representada por una función $f\big(K(t)\big)$ que define el producto bruto en el momento t. La inversión realizada en el momento t se mide por la variación del stock, $\dot{K}(t)$. De esta forma tendremos la ecuación de equilibrio: $C(t) = f\big(K(t)\big) - \dot{K}(t)$. En el modelo ahorro es igual a inversión, y este lo mide $\dot{K}(t)$. Para f hacemos los supuestos comunes: $Y = f\big(K(t)\big),\ f'\big(K(t)\big) > 0,\ f''\big(K(t)\big) \leq 0$. Es decir, creciente estrictamente, y cóncava (rendimientos decrecientes a escala), lo que es habitual en economía. El problema del planificador será entonces maximizar una utilidad intertemporal, descontada (por el factor de descuento ρ), teniendo en cuenta la necesidad de ahorrar para poder producir en el siguiente período. Se trata entonces de resolver el siguiente problema:

$$\max_{C} \int_0^T U\big(C(t)\big)e^{-\rho t}dt, \tag{3.1}$$

eligiendo una trayectoria para el stock de capital $K(t)$ que haga que el consumo correspondiente maximice la utilidad descontada en el período $[0,T]$. A lo largo de este período, inversión y consumo estarán relacionados por la ecuación diferencial:

$$\dot{K}(t) = f\big(K(t)\big) - C(t), \tag{3.2}$$

debiendo considerar que la cantidad de stock de capital existente en el momento inicial, $K(0) = K_0$.

Resumiendo en una, las ecuaciones (3.1) y (3.2) que definen el problema del planificador central éste será representado por:

$$\max_{K} \int_0^T U\big(f(K(t)\big) - \dot{K}(t))e^{-\rho t}dt. \tag{3.3}$$

Para que este problema tenga solución debemos agregar un valor final K_T para el stock de capital, al que por algún motivo el planificador desea llegar: $K(T) = K_T$. El estudio de este problema fue iniciado por Ramsey en 1928.

El problema anterior es un caso particular del problema clásico variacional de

$$\max_x \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})dt, \;\; x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1.$$

Geométricamente este problema puede interpretarse como el de encontrar la trayectoria óptima entre las admisibles, que trasladan el punto $A = (t_0, x_0)$ al punto $B = (t_1, x_1)$. Observe que se trata de encontrar un máximo global, es decir, un elemento que haga el valor de la integral anterior sea el mayor posible, es decir buscamos x^* tal que $J(x^*) \geq J(x)$ para toda x que cumpla las condiciones exigidas, siendo $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})dt$. Ciertamente la primera condición que le pediremos es aquella que permitan que la integral exista, y en tanto que involucra a las derivadas, que sea derivable, y además que verifiquen las condiciones de borde, es decir, los valores exigidos para la solución en t_0 y al final, en t_1.

3.1.2. La ecuación de Euler

En esta sección supondremos que la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, es una función real con derivadas segundas continuas en cada una de las variables, lo que simbolizaremos escribiendo $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^3)$.

Se trata de resolver el siguiente problema de optimización,

$$\max_x \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})dt, \;\; x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1 \tag{3.4}$$

entre todas las funciones continuas con derivada continua en el intervalo $[t_0, t_1]$, conjunto al que denotaremos $\mathscr{C}^1([t_0, t_1])$, y que cumplan las condiciones de borde.

Daremos a continuación condiciones necesarias para extremos relativos de un funcional como $J(x)$ restringido al conjunto admisible, estos son candidatos a extremos absolutos.

Definición 12 *Diremos que una función x es admisible, si es $\mathscr{C}^2([t_0, t_1])$, es decir si u es dos veces continuamente derivable y verifica además las condiciones de borde $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$.*

Si por $\mathscr{F}$ representamos el conjunto de funciones admisibles para este problema, y siendo I el intervalo $[t_0, t_1]$ entonces:

$$\mathscr{F} = \left\{ x \in \mathscr{C}^1(I) : x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1 \right\}.$$

Consideremos el funcional definido por $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)dt$. Asumimos que F y sus derivadas, hasta la segunda al menos, son funciones continuas en todos sus argumentos. Es decir que: $F(t,x,\dot{x})$, $F_x(t,x,\dot{x})$, $F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})$, $F_t(t,x,\dot{x})$ y $F_{zw}(t,x,\dot{x})$ $\forall\, z, w \in \{t, x, \dot{x}\}$, son continuas en su dominio, para todos sus argumentos.

Utilizaremos la expresión F^* para representar $F\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big)$. Análogamente por $\frac{\partial F^*}{\partial z}$ representaremos la derivada de $F(t,x,\dot{x})$ respecto a la variable $z = \{x, \dot{x}\}$ y evaluada en $\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big)$.

Definición 13 *Llamaremos optimal tanto a una solución para un problema de maximización como para un problema de minimización del funcional $J(x)$, restringido x a su conjunto admisible.*

Si la búsqueda de extremos se realiza en el interior de cierto conjunto admisible, las condiciones de primer orden son las mismas para máximo que para mínimo.

Definición 14 *Diremos que una función x^* admisible es una solución optimal (o simplemente solución) del problema (3.4) si y solamente si $J(x^*) \geq J(x)$ para toda x admisible.*

Observación 8 *Trabajando con cierto cuidado puede verse que la condición de considerar admisibles solamente las funciones en $\mathscr{C}^2\big([t_0,t_1]\big)$ es superflua y que alcanza con exigir derivadas primeras continuas, es decir, funciones $\mathscr{C}^1\big([t_0,t_1]\big)$. No obstante a los efectos de facilitar la demostración del principal resultado al que llegaremos en esta sección, la ecuación de Euler, trabajaremos con funciones admisibles en el conjunto $\mathscr{C}^2\big([t_0,t_1]\big)$.*

Supongamos que $x^* = x^*(t)$ es solución optimal para el problema, (3.4). Para cada número α definimos la función admisible $x(t) = x^*(t) + \alpha u(t)$ donde $u \in \mathscr{C}^2\big([t_0,t_1]\big)$, que verifica $u(t_0) = u(t_1) = 0$. Se verifica entonces que $J(x) \leq J(x^*)$. Definimos ahora $\phi : R \to R$ por la relación:

$$\phi(\alpha) = J(x^* + \alpha u) = \int_{t_0}^{t_1} F\big(t, x^*(t) + \alpha u(t), \dot{x}^*(t) + \alpha \dot{u}(t)\big) dt. \tag{3.5}$$

Se tiene entonces que $J(x^*) = \phi(0) \geq \phi(\alpha)$, siendo ϕ una función diferenciable definida en R, se sigue que $\phi'(0) = 0$. A partir de esta observación llegaremos a la condición necesaria para que una función sea optimal para el problema (**??**). Haciendo economía en la notación, como ya fue indicado, se puede escribir que:

$$\phi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F^*}{\partial x} u(t) + \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \dot{u}(t) \right] dt. \tag{3.6}$$

Para llegar a la condición de Euler seguiremos primeramente un camino que utiliza la condición de que las funciones admisibles son $\mathscr{C}^2\big([t_0,t_1]\big)$, luego mostraremos un camino más general que sólo requerirá que las funciones admisibles sean $\mathscr{C}^1\big([t_0,t_1]\big)$.

Integremos por partes el segundo miembro de la ecuación (**??**):

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \dot{u}(t) dt = \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} u(t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right) u(t) dt.$$

Sustituyendo ahora en (3.1)

$$\phi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right) \right] u(t) dt + \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_1} u(t_1) - \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_0} u(t_0) = 0 \tag{3.7}$$

y teniendo en cuenta que $u(t_0) = u(t_1) = 0$, se llega a que la condición

$$\phi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right) \right] u(t) dt = 0. \tag{3.8}$$

Siendo que la igualdad (3.8) debe cumplirse para toda u admisible, el teorema fundamental del cálculo nos permite concluir en que la condición (3.8) se cumple si y solamente si:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right) = 0. \tag{3.9}$$

Esta ecuación es la llamada *ecuación de Euler*. Las soluciones de esta ecuación serán llamadas extremales.

Observación 9 *Nótese que al condición (3.7) es necesaria tanto para un máximos como para un mínimos relativos, no necesariamente absolutos. Bastaría con considerar que $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y suponer que x^* es un extremo entre todas las que están en un* entorno *suyo de radio ε. No es una condición suficiente para extremos, más aun los extremos absolutos podrían no existir aun cuando hubiera elementos de $\mathscr{F}$ que verificaran la ecuación de Euler.*

Observación 10 *La condición de que las funciones admisibles tengan derivadas segundas continuas se utilizó al integrar por partes, para asegurar la continuidad de* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)$.

Veremos a continuación que es suficiente con exigir que las funciones admisibles tengan derivadas primeras continuas para llegar a la ecuación de Euler. Comenzaremos probando el lema fundamental del cálculo que ya usamos para obtener la ecuación de Euler.

Lema 2 (fundamental del cálculo) *Si $\alpha(t)$ es continua en $[t_0, t_1]$ y*

$$\int_{t_0}^{t_1} \alpha(t)h(t)dt = 0 \quad \forall\, h \in \mathscr{C}^1\left([t_0,t_1]\right) \tag{3.10}$$

con $h(t_0) = h(t_1) = 0$, entonces $\alpha(t) \equiv 0$ en $[t_0, t_1]$.

Lema 3 *Si $\alpha(t)$ es continua en $I = [t_0, t_1]$ y*

$$\int_{t_0}^{t_1} \alpha(t)\dot{h}(t)dt = 0 \;\; \forall\, h \in \mathscr{C}^1\left([t_0,t_1]\right) \tag{3.11}$$

con $h(t_0) = h(t_1) = 0$, entonces $\alpha(t) \equiv c$ en $[t_0, t_1]$ siendo c una constante.

Prueba 7 *Integrando por partes resulta que*

$$\int_{t_0}^{t_1} \alpha(t)\dot{h}(t)dt = \alpha(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\alpha}(t)h(t)dt = 0 \;\; \forall h \in \mathscr{C}^1(I).$$

Aplicando ahora el lema (3) resulta que $\dot{\alpha}(t) \equiv 0$.

Lema 4 *Si $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son continuas en $I = [t_0, t_1]$ y*

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big[\alpha(t)h(t) + \beta(t)\dot{h}(t)\Big]dt = 0 \tag{3.12}$$

para todo $h \in \mathscr{C}^1\left([t_0,t_1]\right)$ con $h(t_0) = h(t_1) = 0$, entonces β es diferenciabble y $\dot{\beta}(t) = \alpha(t) \;\; \forall t \in [t_0, t_1]$.

Prueba 8 *Integrando $\int_{t_0}^{t_1} \beta(t)\dot{h}(t)dt$ por partes y sustituyendo en (3.10) resulta que*

$$\int_{t_0}^{t_1} \big(\alpha(t)+\dot{\beta}(t)\big)h(t)dt = 0, \forall h \in \mathscr{C}^1(I).$$

La conclusión se obtiene ahora a partir del lema (2).

Observación 11 *Este lema es el que nos permite concluir la no necesidad de supuestos sobre la diferenciabilidad de $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ (que lleva implícito la continuidad de $\ddot{x}$ ver la observación 12 a continuación), para llegar a la ecuación de Euler.*

La condición de Euler se sigue ahora sin dificultad, a partir de la igualdad:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial x}\right] u(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F^*}{\partial x}u(t) - \frac{\partial F^*}{\partial x}\dot{u}(t)\right] dt,$$

usando ahora el lema (4).

Las consideraciones anteriores sobre las condiciones necesarias de extremo en el problema de Euler, se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 16 Ecuación de Euler *Supongamos que F es $\mathscr{C}^2$ en sus tres variables. Una condición necesaria para que $x^* = x^*(t)$ maximice o minimice el funcional*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})dt$$

entre todas las funciones $x(t) \in \mathscr{C}^1\big([t_0,t_1]\big)$ y que verifiquen las condiciones de borde $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ siendo x_0 y x_1 reales prefijados, es que $x^*(t)$ verifique la ecuación

$$\frac{\partial F(t,x,\dot{x})}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}\right) = 0. \tag{3.13}$$

Observación 12 *En la ecuación (3.13)*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}}\ddot{x}, \tag{3.14}$$

es decir, la derivada total con respecto a t de la función $\frac{\partial F\left(t,x(t),\dot{x}(t)\right)}{\partial \dot{x}}$.

La ecuación de Euler en su forma desarrollada será entonces:

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial x \partial \dot{x}}\dot{x}^* + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}}\ddot{x}^* - \frac{\partial F^*}{\partial x} = 0. \tag{3.15}$$

Observación 13 *En el caso particular en que F no dependa explícitamente de t la ecuación de Euler toma la forma $\frac{d}{dt}\left[F^* - \dot{x}^* F_{\dot{x}}^{'*}\right] = 0$, lo que equivale a resolver la ecuación:*

$$F^* - \dot{x}^* F_{\dot{x}}^{'*} = c. \tag{3.16}$$

Donde se usó la notación: $\dot{x}F_{\dot{x}}^{'*} = \frac{\partial F^*}{\partial x}$, y c es una constante.

Observación 14 *Obsérvese que la condición de Euler, fue obtenida a partir de la condiciones* $\phi'(0) = 0$ *esta es una condición local, es decir que en principio sólo es una condición para extremo local, (máximo o mínimo) es decir para valores de* α *cercanos al cero. No obstante consideramos valores arbitrarios de* α *pues nuestro interés es el de caracterizar* x^* *optimal entre todos los valores posibles de x, es decir, un máximo global entre todas las funciones admisibles. Es decir, buscamos un óptimo global. Como sea, si la solución existe esta cumplirá la condición de Euler. No obstante, precisaremos nuevas condiciones para caracterizar a un máximo y su globalidad, más aun no tenemos hasta ahora ninguna condición que nos asegure la existencia de una solución extremal. Entendiendo por extremal una función admisible, que verifique la ecuación de Euler.*

Para asegurar la existencia de tal solución no nos sirven las condiciones habituales de existencia de soluciones a una ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{x} = f(t,x,\dot{x})$*, pues tenemos dos condiciones en los bordes,* $x(t_0)$ *y* $x(t_1)$*, los teoremas de existencia de la solución de estas ecuaciones diferenciales, consideran condiciones iniciales* $x(t_0) = x_0$ *y* $\dot{x}(t_0) = \bar{x}_0$*.*

Ejemplo 30 *Consideremos nuevamente el ejemplo (29).*

$$\max_{K} \int_0^T U\big(f(K(t) - \dot{K}(t)\big)e^{-\rho t}dt \tag{3.17}$$

con las condiciones de borde

$$K(0) = K_0 \ \ y \ \ K(T) = K_T.$$

En este caso $F(t,K,\dot{K}) = U(c) = U\big(f(K(t) - \dot{K}(t)\big)e^{-\rho t}$. Entonces consideremos la ecuación de Euler para este problema y tratemos de caracterizar la trayectoria óptima para el consumo $c(t)$, en el periodo considerado. Obviamente la maximización es en todas las posibles funciones $K(t)$ continuas y con derivada continua en $[0,T]$.

La ecuación de Euler para este problema será entonces:

$$U'(c)f'(K)e^{-\rho t} + \frac{d}{dt}\big(U'(c)e^{-\rho t}\big) = 0 \tag{3.18}$$

Haciendo un poco de álgebra, llegamos a :

$$\ddot{K} - f'(K)\dot{K} + \frac{U'(c)}{U''(c)}\big(\rho - f'(K)\big) = 0. \tag{3.19}$$

Esta ecuación puede resolverse sólo en casos particulares. No obstante, como $\dot{c} = f'(K)\dot{K} - \ddot{K}$, llegamos para $c(t) > 0$ a la ecuación para la tasa de consumo:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{U'(c)}{cU''(c)}\big(\rho - f'(K)\big) = \frac{\rho - f'(K)}{w}. \tag{3.20}$$

Donde $w = \frac{cU''(c)}{U'(c)}$ es la elasticidad de la función de utilidad marginal del consumo. Obsérvese que su signo depende de los supuestos que hagamos sobre U. En los casos habituales será negativa.

Obsérvese que no hemos demostrado ningún teorema de existencia de la solución de la ecuación (3.20). Además una solución significativa debe verificar $c(t) > 0 \ \forall t \in [0,T]$. Por otra parte debe también especificarse el dominio de U.

No obstante si la solución optimal existe, ella verifica la ecuación de Euler, obsérvese que la concavidad supuesta de U hace que $w < 0$, entonces existe una solución con tasa de crecimiento positiva si y solamente si $f'(K) > \rho$.

A partir de $K(t)$ puede obtenerse el valor de $C(t)\ \forall\, t \in [0,T]$. En efecto, $C(t) = f(K(t)) - \dot{K}(t)$.

Ejercicio 34 *Considere el ejemplo (29)*

1. *Obtenga los candidatos a solución para el caso en que* $U(c) = \frac{c^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}; \alpha \in (0,1)$ $f(K) = bK,\ b > 0$, *suponga* $K_0 >=, K_T > 0$.
2. *Obtenga la ecuación de Euler para el caso más general: con* $U(c,t)$ *e* $Y = f(K,t)$.

3.1.3. Condición de Legendre

Hasta ahora no hemos obtenido condiciones que determinen cuando una solución extremal es de máximo o de mínimo. El siguiente ejemplo ilustra sobre el tema.

Ejemplo 31 *Encuentre las posibles soluciones de Euler para*

$$J(x) = \int_0^1 \left(x^2 + (\dot{x})^2\right) dt \;\; x(0) = 0,\, x(1) = e^2 - 1.$$

La ecuación de Euler vendrá dada por

$$\ddot{x} - x = 0.$$

La única solución de esta ecuación diferencial que verifica las condiciones de borde es:

$$x(t) = e^{1+t} - e^{1-t}.$$

Sabemos que si existe una solución que maximice $J(x)$, esta debe verificar la ecuación de Euler, no obstante como veremos esta solución minimiza $J(x)$ luego no existe solución de máximo.

Continuando con lo dicho en la observación (14) sabemos hasta ahora que si una solución al problema variacional existe, ella verificará la condición de Euler. Luego si existe una única solución a la ecuación de Euler que verifique las condiciones de borde, entonces esta será la solución global. Es decir, la ecuación de Euler indica candidatos a solución, esta si existe, es alguno de ellos, pero debemos buscar una forma de elegir entre los candidatos.

Como veremos en la sección (3.1.4), la concavidad de $F(t,x,\dot{x})$ es una condición para que una solución de la ecuación de Euler que verifique las condiciones de borde, sea la solución global al problema. Esta condición es muy utilizada en teoría económica.

Atendiendo a estos hechos consideraremos ahora la siguiente condición necesaria (pero no suficiente) para que una solución de la ecuación de Euler, sea una solución de máximo local. En la sección (3.1.4) presentaremos condiciones suficientes, esto es, condiciones en $\phi''(0)$.

La siguiente condición afirma que si $x^*(t)$ es una solución optimal, entonces el signo de $F_{\dot{x}\dot{x}}\big(t, x^*(t), \dot{x}(t)\big)$ se mantiene constante $\forall\, t \in [t_0, t_1]$, negativo para el caso den que $x^*(t)$ sea máximo y positivo para el caso en que es mínimo.

Teorema 17 (Condición necesaria de Legendre) *Supogamos que se verifican las condiciones del teorema (16). Una condición necesaria para que $J(x)$ tenga un máximo local en $x^* = x^*(t)$ es que*

$$F''_{\dot{x}\dot{x}}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big) \leq 0; \; \forall t \; \in [t_0, t_1]. \tag{3.21}$$

Una condición para mínimo se obtiene cambiando el sentido de la desigualdad.

La condición de Legendre, como la de Euler, son necesarias (no suficientes), es decir, que la sóla verificación de la condición de Legendre no alcanza para determinar la existencia de una solución optimal, ni aún en el caso en que se verifique para una solución extremal.

La demostración de este teorema se hará luego de la observación siguiente al teorema (**??**).

Ejercicio 35 *Considere nuevamente el ejemplo (29), consumo y ahorro. Muestre que si $U''(c) \leq 0$. Entonces el candidato resuelve el problema de máximo local.*

Ejercicio 36 *Muestre que en el caso del ejercicio (31) se tiene que $F''_{\dot{x}\dot{x}} = 2$. Por lo tanto en este caso no hay solución al problema de maximizar $J(x)$.*

La ecuación de Euler es una condición necesaria para un máximo local. Para estar seguros que esta solución sea de máximo debemos considerar otras condiciones tales como que $\phi''(0) \leq 0$ para máximo local, o $\phi''(0) \geq 0$ para mínimo local. Volveremos sobre este tema en la subsección (3.1.4).

Diferentes tipos de condiciones terminales

Muchas veces al problema

$$\max_x \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})dt, \; con \; x(t_0) = x_0, \tag{3.22}$$

se le agrega alguna de las siguientes condiciones terminales:

(I) $x(t_1)$ libre pero t_1 fijo.

(II) $x(t_1) \geq x_1$ siendo x_1 un valor predeterminado y t_1 fijo.

(III) $x(t_1) = g(t_1)$ siendo g una función dada diferenciable y t_1 libre.

(IV) $x(t_1) \geq x_1$, con t_1 libre y x_1 fijo.

Los problemas con condiciones terminales dadas en (i) y (ii) son llamdos problemas de *tiempo fijo*, el caso (iii) es llamado de *tiempo variable.* En el caso (i) se trata de encontrar una solución $x^*(t)$ óptima, es decir una trayectoria que resuelva el problema (3.22) siempre que comience en x_0, $(x^*(t_0) = x_0)$ pero no nos importa el valor de $x^*(t)$ para $t = t_1$. Condiciones como las consideradas en (ii) son frecuentes en economía. La tercera condición exige encontrar una trayectoria óptima con la condición de que comience en x_0 y que en $t = t_1$ se encuentre sobre el gráfico de la función $g(t)$.

Cada uno de estos problemas agregan nuevas condiciones a la condición de Euler que la solución debe verificar. Estas condiciones son llamadas *condiciones de transversalidad* y son las siguientes:

(I) $\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t=t_1} = 0.$

(II) $\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t=t_1} \leq 0$, $(=0,\ si\ x^*(t_1) > x_1)$. Esta desigualdad cambiaría de sentido si el problema fuera el de hallar un mínimo.

(III) $\left[F^* + (\dot{g} - \dot{x})\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right]\Big|_{t=t_1} = 0.$

(IV) $(F_{\dot{x}}'^{*})\big|_{t=t_1} \leq 0$; $(=0\ si\ x(t_1) > x_1)$ y $(F^* - \dot{x}F_{\dot{x}}'^{*})|_{t=t_1} = 0$.

Demostración de las condiciones de transversalidad

(I) *Problemas de extremo final libre.* Siendo $x(t_1)$ libre, y como la solución x^* debe maximizar a $J(x)$ en el conjunto de todas las admisibles, debe entonces verificar (**??**) para todo u admisble ($u(t_0) = 0$), donde no necesariamente $u(t_1) = 0$, por lo tanto debe cumplirse que $(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}})|_{t=t_1} = 0$.

(II) Sea $x^* = x^*(t)$ solución del problema. Como x^* debe ser comparada con $x^*(t) + \alpha u(t)$ para toda u admisible, entonces se tiene que $u(t_0) = 0$ y además $x^*(t_1) + \alpha u(t_1) \geq x_1$. Tenemos entonces dos casos a considerar:

a) $x^*(t_1) > x_1$ Sea $\varepsilon = x^*(t_1) > x_1$ luego si u y α son elegidos de forma tal que $|u(t_1)||\alpha| < \varepsilon$, entonces como $\phi(\alpha)$ debe tener un máximo en $\alpha = 0$ se sigue que $\phi'(0) = 0$. Luego, a partir de (3.7) se tiene que $u(t_0) = 0$ y que $(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}})|_{t=t_1} u(t_1) = 0$, para toda u admisible, como puede ser que $u(t_1) \neq 0$, por lo tanto $(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}})|_{t=t_1} = 0$.

b) $x^*(t_1) = x_1$. Esto hace que u sea admisble si $x^*(t_1) + \alpha u(t_1) \geq x_1$ Elegimos en particular u tal que $u(t_1) \geq 0$ esto supone que $\alpha > 0$. Luego como $\phi(0) \geq \phi(\alpha)$, con $\alpha \geq 0$ para el u admisible elegido, se tiene que $\phi'(0) \leq 0$ (nótese que al restiringirnos a $\alpha > 0$, cero es un máximo en el borde, por la que la condición de máximo es precisamente $\phi'(0) \leq 0$). Luego, a partir de (3.7) se sigue que $(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}})|_{t=t_1} \leq 0$. Nota: Observe que esta sería la única condición de transversalidad que se modificaría, en caso de buscarse un mínimo.

(III) *(No rigurosa)* Supongamos que $x^*(t)$ es admisible. Sea t_1 la primmera vez que $x^*(t)$ corta a la curva $g(t)$. Sea $u(t)$ una función tal que $u(t_0) = 0$ tal que $x^*(t) + \alpha u(t)$ es admisbe para todo α. El primer momento en que esta curva corta a $g(t)$ depende de α. Llamamos a este $t_1(\alpha)$. En particular $t_1(0) = t_1$. Definimos ahora

$$\phi(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1(\alpha)} F(t, x^*(t) + \alpha u(t), \dot{x}^*(t) + \alpha \dot{u}(t))dt. \tag{3.23}$$

Esta expresión alcanza su valor máximo en $\alpha = 0$. Asumiendo que $t_(\alpha)$ es diferenciable llegamos a que

$$\phi'(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1(\alpha)} \left[\frac{\partial F}{\partial x} u(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{u}(t)\right] dt + [F]_{t=t_1}(\alpha) t_1'(\alpha).$$

Integrando por partes obtenemos

$$\phi'(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1(\alpha)} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right] u(t)dt + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} u(t)\right]_{t_0}^{t_1(\alpha)} + [F]_{t=t_1}(\alpha) t_1'(\alpha).$$

Tomando ahora $\alpha = 0$ como $I'(0) = 0$ y a patir de la ecuación de Euler, llegamos a que;

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} u(t)\right] |_{t_0}^{t_1(\alpha)} + [F]_{t=t_1}(\alpha) t_1'(0) = 0. \tag{3.24}$$

Teniendo en cuenta que $x^*(t_1(\alpha)) + \alpha u(t_1(\alpha)) = g(t_1(\alpha))$, derivando esta expresión con respecto a α y evaluando en $\alpha = 0$ obtenemos que

$$u(t_1(0)) = [\dot{g}(t_1(0) - \dot{x}^*(t_1(0)] t_1'(0). \tag{3.25}$$

Finalmente sustituyendo (3.25) en (3.24) obtenemos la igualdad requerida.•

(IV) En este caso $x^*(t)$ debe resolver (3.22) con las condiciones terminales correspondientes. Supongamos que t^* es el tiempo óptimo asociado a la solución óptima. Entnoces $x^*(t)$ resuelve el problema (3.22) con las condiciones terminales correspondientes a (ii), con $t_1 = t^*$ fijo y $x(t^*) \geq x_1$ por lo que se obtiene que debe verificarse la condicón de transversalidad (Tii) con $t_1 = t^*$. Además, $x^*(t)$ resuelve el problema (3.22) dada la condición terminal $x(t_1) = X^*(t^*)$ con t_1 libre, lo que se remite al caso (iii) con $g(t) = x^*(t^*)$ siendo $x^*(t^*)$ constante se sigue que $\dot{g^*} \equiv 0$. Con lo que (Tiii) se reduce a $(F^* - \dot{x}^* F_{\dot{x}^*}^{*'})|_{t=t^*} = 0$.•

Ejemplo 32 *Consideremos la siguiente variante del problema (30)*

$$\max_K \int_0^T U(f(K(t) - \dot{K}(t)) e^{-\rho t} dt \tag{3.26}$$

con las condiciones de borde

$$K(0) = K_0 \text{ y } K(T) \text{ libre}$$

Ejercicio 37 *Obtenga las condiciones de transversalidad correspondientes al caso en que la condición final exigida es: $x^*(t_1) \leq x_1$, con x_1 predeterminado y t_1 fijo, para máximo y para mínimo.*

(En (**??**) se pedía $K(T) = K_T$.)

Además de la ecuación de Euler, y la condición $K(0) = K_0$ se debe satisfacer la ecuación terminal $(F'_{\dot{K}})_{t=T} = 0$. En este caso $(F'_{\dot{K}})_{t=T} = U'(C(T))e^{-rT} = 0$, es decir, $U'(C(T)) = 0$, pero esta condición no se puede cumplir pues hemos considerado que $U'(C) > 0$ para todo C. Podemos concluir que *en este caso no existe solución óptima.* El resultado es comprensible, por cuanto que en la función objetivo no se tiene en cuenta lo que sucederá despues de T. Por lo anterior, se intentará bajar K lo más posible antes de terminar el periodo y esto se puede hacer tan de prisa como se quiera, $\dot{K}(t) \to -\infty$ cuando $t \to T$. Luego $U(c(t)) \to \infty$. Nótese que no se impuso la restricción $K(T) \geq 0$, por lo que admitimos la posibilidad de comerse el capital.

Ejemplo 33 (Extracción optimal de un recurso natural) *Suponemos que en $t = 0$ se comienza a extraer un recurso natural (por ejemplo petróleo) a una tasa $u(t)$ la cantidad inicial extraible del recurso es $\bar{x}$. Se desea saber cuál es el momento óptimo T en el que debe detenerse el proceso de extracción del recurso así como la tasa óptima de extarcción u.*

Se tiene que para el T óptimo debe verificarse que $\int_0^T u(t)dt \leq \bar{x}$.

Asumientdo que el precio del producto en el mercado en el instante t es $q(t)$, el costo de extraer el recurso a tasa $u(t)$ es $C(u(t),t)$. De esta forma el beneficio en el tiempo t es $\pi(u(t),t) = q(t)u(t) - C(u(t),t)$.

El beneficio total descontado (valor presente de la empresa) es

$$\int_0^T [q(t)u(t) - C(u(t),t)e^{-rt}dt$$

Sea

$$x(t) = \bar{x} - \int_0^t u(s)ds$$

el remanente del recurso en el tiempo t. El problema variacional puede escribirse así:

$$\max_x \int_0^T [q(t)\dot{x}(t) - C(\dot{x}(t),t)]e^{-rt}dt, \; con\, x(0) = \bar{x},\; x(T) \geq 0,\; T\; libre. \tag{3.27}$$

A partir de la ecuación de Euler para este problema (que no depende de x) y sustituyendo $\dot{x}(t)$ por $u(t)$ obtenemos:

$$q(t) - \frac{\partial C(u^*(t),t)}{\partial u} = ce^{rt} \tag{3.28}$$

siendo c una constante positiva. El miembro de la derecha es el beneficio marginal. Entonces el beneficio marginal a lo largo de del periodo de extracción debe crecer exponencialmente con el factor de descuento r. A partir de las condiciones de transversalidad (Tiv), y con un poco de álgebra se obtiene la condición:

$$\frac{u^*(T)}{C(u^*(T),T)} C_{u'}(u^*(T),T) = 1 \tag{3.29}$$

Esto significa que la extracción se detendrá en el momento en que la elasticidad de costos por la tasa de extracción sea igual a 1.

Obsérvese que en ningún momento se dice que $u^*(t)$ sea positiva para todo t. En principio podría haber momentos en que fuera conveniente devolver recursos a la naturaleza. Veremos las condiciones que aseguran que $u^*(t) > 0$ al volver a este ejemplo en el marco de la teoría del control óptimo.

Ejercicio 38 *Para el caso $q(t) = q \;\; \forall t \in [0,T]$ y $C(u,t) = u^2$ resuelva el problema anterior. Discuta la pertinencia de la solución encontrada en función de q, r y x_0.*

3.1.4. Condiciones suficientes para máximos y mínimos

Ya vimos que la condición de Euler es necesaria para la solución óptima, pero no suficiente ni tampoco es una demostración de la existencia de la solución. Es una indicación de las propiedades que debe verificar la solución si existe, indica candidiatos. Su papel es similar a las llamadas condiciones de primer orden para el problema estático. En ambos casos se dan condiciones necesarias para un máximo (o mínimo) local. Más aun la condición de Legendre es un paso en este sentido, pero aún no es una condición suficiente.

En el caso estático la concavidad de la función objetivo hace que las condiciones de primer orden pasen a ser necesarias y suficientes para un máximo global. Algo similar sucede en el caso dinámico, donde la condición de Euler mas las condiciones de transversalidad propias del problema, pasan a ser necesarias y suficientes para la existencia de un óptimo global, en el caso en que $F(x,x\dot{x})$ sea conjuntamente cóncava en x y $\dot{x}$ para todo t.

Consideramos entonces el problema

$$\max_x \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})dt, \text{ con } x(t_0)=x_0, \ [t_0,t_1] \text{ fijo} \tag{3.30}$$

con una de las siguientes condiciones terminales:

1. $x(t_1)=x_1$
2. $x(t_1)\geq x_1$
3. $x(t_1)$ libre.

Asumimos que $F(t,x,\dot{x})$ es C^2 y que las funciones admisibles $x(t)$ son C^1. Ya se probó que las condiciones necesarias son la ecuación de Euler y las coorespondientes condiciones de transversalidad, para los casos señalados en ((1), (2) y (3)) que son:

2. $\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)|_{t=t_1}\leq 0$, $(=0$, si $x^*(t_1)>x_1)$.
3. $\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)|_{t=t_1}=0$.

El siguiente teorema nos dice que la concavidad conjunta en x y $\dot{x}$ de $F(t,x,\dot{x})$ es condición suficiente para la optimalidad de la solución de la ecuación de Euler que verifique las condiciones de transversalidad. No obstante no dice nada acerca de la existencia de la solución de la ecuación de Euler, ni de su unicidad.

Teorema 18 *(Condiciones suficientes de máximo global) Supongamos que $F(t,x,\dot{x})$ es cóncava conjuntamente en $(x,\dot{x})$ para cada $t\in[t_0,t_1]$. Si $x^*=x^*(t)$ verifica la ecuación de Euler correspondiente a (3.30) y, en los casos ((1),(2) y (3)), las correspondientes condiciones de transversalidad dadas por ((2) y (3)), respectivamente, entonces $x^*=x^*(t)$ es máximo global en el sentido de que si $x=x(t)$ es admisible en cualquiera de los tres problemas anteriores, se verifica*

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t,x^*,\dot{x}^*)dt \geq \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})dt.$$

Demostración: La siguiente cadena de desigualdades es resultado sucesivamente de la concavidad conjunta de F en x y $\dot{x}$, y luego del hecho de que x^* verifica la condición de Euler. Para abreviar escribiremos $F=F(t,x,\dot{x})$ y F^* para simbolzar F evaluada en $(t,x^*,\dot{x}^*)$.

$$F^*-F\geq\left(\frac{\partial F^*}{\partial x}\right)(x^*-x)+\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)(\dot{x}^*-\dot{x})=\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)(x^*-x)\right].$$

Integrando ahora, obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t_1}(F^*-F)dt\geq\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)(x^*-x)\right]dt=\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)|_{t=t_1}(x^*(t_1)-x(t_1)),$$

recordando que $x^*(t_0)-x(t_0)=0$.

Para los casos ((1) y (2)) la condición ((2)) es suficiente para que x^* ea un máximo dada la concavidad de F. Análogamente la condición ((3)) para el caso (iii).•

La estricta concavidad asegura la unicidad de la solución óptima cuando existe, y en este caso es precisamente la extremal.

Muchas veces se dice extremal a un solución de la ecuación de Euler, y solución óptima a la que resuelve el problema de maximización o minimización del funcional.

Ejercicio 39 *Considere nuevamente el caso visto en el ejemplo (29) con las condiciones de borde $K(0) = K_0$ y $K(T) = K_T$, verifique que si f es cóncava entonces, bajo el supuesto de concavidad de U respecto de C, la condición de Euler caracteriza el K^* optimal completamente cuando este existe.*

Condiciones suficientes más generales, para que una solución extremal sea máximo son aquellas que hagan que $\phi''(0) < 0$. Desarrollando en serie de Taylor la función $\phi(\alpha)$ en un entorno de cero, llegamos a la siguiente igualdad:

$$\phi(\alpha) = \phi(0) + \phi'(0)\alpha + \phi''(0)\frac{1}{2}\alpha^2 + o(\alpha^2). \tag{3.31}$$

Igualdad equivalente a la siguiente:

$$J(x^* + \alpha u) - J(x^*) = \frac{1}{2}\alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} (f^*_{xx}u^2 + 2f^*_{x\dot{x}}u\dot{u} + f^*_{\dot{x}\dot{x}}\dot{u}^2)dt$$

donde $f^* = f(t, x^*, \dot{x}^*)$ simboliza el valor de la función integrando en cada t en la trayectoria extremal. Se tiene entonces el siguiente teorema:

Teorema 19 *Si x^* es extremal y verifica las condiciones de transversalidad, entonces una condición suficiente para que sea máximo local, (mínimo) es que*

$$J(x^* + \alpha u) - J(x^*) = \frac{1}{2}\alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} (f^*_{xx}u^2 + 2f^*_{x\dot{x}}u\dot{u} + f^*_{\dot{x}\dot{x}}\dot{u}^2)dt < 0 (> 0). \tag{3.32}$$

Observación 15 *Nótese que si la forma cuadrática con matriz asociada*

$$H^* = \begin{pmatrix} f^*_{xx} & f^*_{x\dot{x}} \\ f^*_{x\dot{x}} & f^*_{\dot{x}\dot{x}} \end{pmatrix}$$

es definida negativa para toda t en el intervalo considerado, entonces la extremal es un máximo local. (Análogamente para mínimo).

Usaremos la expresión $det(H^*)$ para indicar el determinate de la matriz H^*. La notación f^*_{uv}, $u, v = \{x, \dot{x}\}$ indica la derivada segunda con respecto a los argumentos indicados en los subíndices de f, evaluada en $(x^*, \dot{x}^*)$.

Demostración del teorema de Legendre: Luego de un poco de álgebra la igualdad (3.32) puede escribirse como:

$$J(x^* + \alpha u) - J(x^*) = \frac{1}{2}\alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{f^*_{\dot{x}\dot{x}}} \left\{ [f^*_{xx}u - f^*_{x\dot{x}}\dot{u}]^2 + \det(H^*)\dot{u}^2 \right\}.$$

Si en x^* se alcanza un extremo, entonces $det(H^*) > 0$ por lo que el signo del incremento sólo depende del signo de $f^*_{\dot{x}\dot{x}}$. Por lo que si x^* es extremal, el signo de esta función no puede cambiar, pues en ese caso sería posible elegir funciones u admisibles que se anulen fuera de un intervalo, donde la función $f^*_{\dot{x}\dot{x}}$ sea positiva y otras que se anulen, donde dicha función sea negativa, contradiciendo el signo constante del incremento para todo u admisible.•

3.1.5. Un caso más general

En muchos casos además de buscar un camino óptimo para F se considera importante el destino, esto es el valor final al que arriba la solución óptima, y por ejemplo se considera importante maximizar una cierta función del estado final. En este caso el problema puede escribirse como:

$$\max_x \left\{ \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})dt + S(x(t_1)) \right\},\ con\ x(t_0) = x_0. \tag{3.33}$$

Hallar el valor de $x(t_1)$ es parte del problema de maximización.

Obsérvese x^* es solución de (3.33) si y sólo si es solución para el problema

$$\max_x \int_{t_0}^{t_1} \left[F(t,x,\dot{x}) + S'(x)\dot{x}\right],\ con\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1)\ \text{libre}. \tag{3.34}$$

Entonces el problema es similar al ya estudiado considerando ahora $F_1(t,x,\dot{x}) = F(t,x,\dot{x}) + S'(x)\dot{x}$. Por lo tanto la discusión anterior vale para esta función F_1. La comdición de transversalidad para este problema es $\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}j}\right)_{t=t_1} + S'(x^*(t_1))$, donde ademásn$x^*(t)$ es solución de la ecaución de Euler para $F_1(t,x,\dot{x})$. Para que las condiciones de transversalidad y la ecuación de Euler sean condición suficiente, basta con la concavidad de F en $(x,\dot{x})$ y la concavidad de S. Para convencerse de eso basta aplicar el teorema (18) a F_1.

Ejercicio 40 *Supongamos que $A(t)$ denota la riqueza (en activos financieros) de cierta persona en el tiempo t. Supongamos también que esta persona recibe un salario w y puede ahorrar o tomar prestado a una tasa r. Su consumo en t está dado por:*

$$c(t) = rA(t) + w + \dot{A}(t).$$

Suponga además que desea planificar su consumo desde el instante $t = 0$ (hoy) hasta T su esperanza de vida. Es decir, desea maximizar su consumo a lo largo de su vida.

$$\max_c \int_0^T U(c(t))e^{-\rho t}dt.$$

Suponga $U' > 0$, $U'' < 0$, que ρ es el factor de descuento, sus activos en el instante inicial son $A(0) = A_0$ y espera trasmitir una herencia de al menos A_T.

1. *Obtenga las condiciones necesarias para la solución. Muestre que en particular la solución óptima requiere $A(T) = A_T$. ¿Podría dar una interpretación de este resultado?*

2. *Sea $U(c) = a - be^{-bc}$, donde a y b son constantes positivas. Resuelva la ecuación de Euler para este caso.*

3. *Muestre que las condiciones de transversalidad y la ecuación de Euler son suficientes para que la solución sea un máximo.*

Ejercicio 41 *Suponga ahora que el individuo del ejercico anterior desea maximizar el consumo a lo largo de su vida y la herencia que trasmitirá.*

$$\max_C \int_0^T U(C(t))e^{-\rho t}dt + \psi(A(T))e^{-\rho T},\ con\ A(0) = A_0$$

donde ψ es la utilidad que le brinda A_T. Suponemos que $\psi' > 0$ $\psi'' < 0$.

1. *Encuentre condiciones suficientes para la solución de este problema.*
2. *Obtenga A^* para el caso en que $U(C) = a - be^{-bC}$, con a y b constantes positivas.*

3.1.6. El problema isoperimétrico

El problema isoperimétrico es un problema clásico del cálculo variacional cuyos antecedentes pueden remontarse a la reina Dido de Cartago, quien obtuvo, para fundar su ciudad, el mayor territorio que pudiera ocupar un piel de buey a manos del entonces rey Jarbas. Más aun, el problema era conocido por los griegos de la antigüedad clásica, quienes ya intuían el resultado. Más modernamente a Euler y el matemático suizo J. Steiner se ocuparon del problema, este dio un resultado fallido. A pesar de su aparente sencillez el problema no fue resuelto hasta mitad del siglo XIX por K. Weiresstras.

Se puede enunciar como sigue: *Entre todas las curvas cerradas en el plano de perímetro fijo, ¿qué curva (si la hay) maximiza el área de la región que encierra?* [1] Matemáticamente se formula de la siguiente forma: Sean dos puntos $A = (a,0)$ y $B = (b,0)$ en el eje de las absisas, donde la distancia entre ellos está dada. Es decir $\overline{AB} = l$. El problema de hallar una curva que maximize el área entre ella y el eje de las absisas sería: Hallar una función f en el conjunto de las funcions derivables, de modo de maximizar el funcional,

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx$$

con las restricciones

$$\begin{aligned} &G[f] = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx = l \text{ (longitud de arco)} \\ &f(a) = f(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

En teoría económica el problema llamado del agente y del principal puede ser modelado y resuelto siguiendo las pautas de este problema clásico, y de ahí su importancia para la referida teoría. En este problema el principal (por ejemplo el propietario de una firma), intentará maximizar su función de utilidad, atendiendo a que el agente (su gerente) reciba al menos, el menor beneficio, a partir del cual se sentirá dispuesto a participar del programa para el que es contratado.

Sean U y H funciones preestablecidas (la función U representa la utilidad del principal, y H la del agente). El problema relaciona dos integrales, una que se trata de maximizar en la clase de las funciones admisbles, y otra que presenta un valor prefijado. La forma general del problema isoperimétrico es la siguiente:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t),\dot{x}(t))dt \\ \text{s.a}: \ H_G(x) &= \int_{t_0}^{t_1} G(t,x(t),\dot{x}(t))dt = c \\ x(t_0) &= x_0 \ \ x(t_1) = x_1. \end{aligned} \tag{3.36}$$

siendo c un número real, prefijado.

[1] Se puede demostrar que esta cuestión es equivalente al siguiente problema: Entre todas las curvas cerradas en el plano que cierra un área fija, ¿qué curva (si la hay) minimiza el perímetro?

Definición 15 *Serán admisbles todas las funciones* $C_1[t_0,t_1]$ *tales que verifiquen* $x(t_0)=x_0\ \ x(t_1)=x_1$*, así como la condición* $\int_{t_0}^{t_1} G(t,x(t),\dot{x}(t))dt=c$.

Teorema 20 (Condición necesaria para el problema isoperimétrico) *Sea* $x^*(t)$ *una función admisble solución del problema (3.36), entonces existe una constante* γ *tal que se verifica la ecuación de Euler*

$$\hat{F}_x(t,x^*(t),\dot{x}^*(t))-\frac{d}{dt}\hat{F}_{\dot{x}}(t,x^*(t),\dot{x}^*(t))=0,$$

siendo

$$\hat{F}(t,x(t),\dot{x}(t))=F(t,x(t),\dot{x}(t))+\gamma G(t,x(t),\dot{x}(t)).$$

Para la demostración de este importante teorema, consideraremos algunos etapas previas.

Consideremos primeramente el problema cuando las restricciones aparecen en cada tiempo t. Es decir, cuando se trata del problema

$$\begin{aligned} maxJ[x] &= \int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t),\dot{x}(t))dt \\ \text{s.a}: g(t,x,\dot{x}) &= c \\ x(t_0)=x_0,\ \ x(t_1) &= x_1. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Para obtener las condiciones necesarias para este problema, comenzaremos recordando el teorema de Lagrange, para el caso en que se desea maximizar una función derivable $f:R^2\to R$ sujeto auna restricción definida por $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ también derivable. Problema que puede plantearse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\max_{x\in R^2} f(x_1,x_2), \\ &\text{s.a}: g(x_1,x_2)=0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Asumimos que $grad\ g(x_1,x_2)\neq 0$.

En las condiciones del teorema de la función implícita, a partir de la identidad $g(x_1,x_2)=0$ podemos obtener $x_2(x_1):\ g(x_1,x_2(x_1))=0$, para x_1 y x_2 en cierto entorno de una solución. Obtenemos entonces que

$$g'_{x_1}(x_1,x_2(x_1))+g'_{x_2}(x_1,x_2(x_1))\frac{dx_2}{dx_1}=0.$$

Queremos entonces hallar un punto crítico de $f(x_1,x_2(x_1)$, esto es, debemos resolver

$$f'_{x_1}(x_1^*,x_2^*)+f'_{x_2}(x_1^*,x_2^*)\frac{dx_2(x_1^*)}{dx_1}=0,$$

siendo $x_2^*=x_2(x_1^*)$. De donde se sigue la colinealidad de los vectores $grad\ f(x_1^*,x_2^*)$ y $grad\ g(x_1^*x_2^*)$ pues ambos son perpendiculares a um mismo vector en $\mathbb{R}^2$ definido por $v=(1,x_2'(x_1^*))$. Luego existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$grad\ f(x_1^*,x_2^*)=\lambda grad\ g(x_1^*,x_2^*).$$

Dicha condición es equivalente a resolver: $\max_x f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2)$.

Vayamos ahora a nuestro caso:

$$\begin{aligned} \max_x J[x] &= \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})dt. \\ \text{s.a}: \ g(t,x,\dot{x}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.39}$$

En este caso para cada $t \in [0,T]$ encontraremos una curva $\dot{x}(x)$ que verificará que $g(t,x,\dot{x}(x)) = 0$. Por lo tanto, para cada t debemos resolver un problema de maximización como el representado por (3.38), es decir, que para cada t tendremos un multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t,x,\dot{x})}{\partial x} &= \lambda(t)\frac{\partial g(t,x,\dot{x})}{\partial x}, \\ \frac{\partial f(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} &= \lambda(t)\frac{\partial g(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

La ecuación de Euler para el problema de maximización verifica

$$\frac{\partial f(t,x,\dot{x})}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial f(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} = n\lambda(t)\frac{\partial g(t,x,\dot{x})}{\partial x} + \frac{d}{dt}\lambda(t)\frac{\partial g(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}.$$

Habremos obtenido entonces la condición de Euler

$$\frac{\partial F^* + \gamma(t)g^*}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial F^* + \gamma(t)g^*}{\partial \dot{x}}, \tag{3.41}$$

Siendo $\gamma(t) = -\lambda(t)$.

De esta forma el problema definido por (3.37) puede resumirse a encontrar las ecuaciones de Euler para el funcional $\mathscr{J}(x) = \int_{t_0}^{t_1} (f(t,x,\dot{x}) + \gamma(t)g(t,x,\dot{x}))\,dt$.

El problema puede generalizarse para más variables y restricciones.

Ahora estamos en condicioens de demostrar el teorema isoperimétrico:

Demostración del teorema (20) Comenzamos definiendo $\dot{z}(t) = G(t,x,\dot{x})$ y utilizamos a continuación lo ya visto para el caso anterior en que las restricciones dependen de t. Escribimos entonces

$$\dot{z}(t) - G(t,x,\dot{x}) = 0.$$

Utilizaremos ahora la ecuacion de Euler para el funcional

$$\mathscr{J}[x] = \int_{t_0}^{t_1} [F(t,x,\dot{x}) - \lambda(t)(\dot{z}(t) - G(t,x,\dot{x}))]\,dt.$$

Tendremos ahora las variables $x, \dot{x}, z, \dot{z}$ y t. Para este caso (ver sección (**??**))las ecuaciones de Euler serán

$$\begin{aligned} \hat{F^{*}}'_x - \frac{d}{dt}\hat{F^{*}}_{\dot{x}} &= 0 \\ \hat{F^{*}}'_x - \frac{d}{dt}\hat{F^{*}}_{\dot{z}} &= 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

La última ecuación se reduce a $\frac{d}{dt}\lambda(t) = 0$. Lo que implica que $\lambda(t)$ es una constante.$\bullet$

Ejercicio 42 *Resuelva el problema isoperimétrico defindo por (**??**).* **Ayuda:** *Escriba la condición de Euler usando la forma definida por por la ecuación (**??**). Luego haga el cambio de variables $\dot{x} = \tan u$.*

3.1.7. Condiciones suficientes para un extremo local débil

A lo largo de estas notas hemos considerado reiteredamente el problema de obtener condiciones suficientes para un máximo local para el funcional

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \tag{3.43}$$

entre todas las posibles funciones continuamente diferenciables que verifican $x(t_0) = A$ y $x(t_1) = B$.

Consideremos ahora el mismo problema pero entre un conjunto admisble de funciones más estrecho. Muchas veces tiene sentido considerar como próximas a una función dada, aquellas que lo están puntualmente, sino que además no se diferencian mucho en otras propiedades, por ejemplo en sus derivadas.

Distinguiremos ahora entre extremos locales fuertes (los ya considerados) y débiles. En el primer caso nos referimos a a condiciones que de ser cumplidas por una determinada función hacen que ella sea la solución al problema entre todas aquellas funciones que estan cerca en el sentido de la norma del supremo, o puntualmete. En el segundo caso la función que las verifica resuelve el problema para funciones que no solamente están cerca en el sentido anterior sino que además entre aquellas cuyas derivadas no se diferencian mucho, es decir, es un extremo local considerando un conjunto más restrictivo de funciones. Para hacer este análisis posible, cambiaremos la defini
ción de entorno de una función dada, a los efectos de introducir la proximidad ya no sólo en el sentido de la norma, sino también en el sentido de la derivada.

Obviamente un máximo local fuerte, es también débil. Pues en el primer caso lo es enre un conjunto mayor de funciones que en el caso de ser extremo débil. Introduzcamos ahora la defini
ción formal de extremo débil.

Definición 16 *Decimos que una extremal x^* para el problema de maximizar el funcional (**??**) es máximo débil, si lo es entre todos las funciones que verifican las condiciones de admisibilidad y además entre todas aquellas $x(t) = x^*(t) + \eta(t) + \eta'(t)$ tales que $\|\eta(t)\| + \|\eta(t)'\| < \delta \ \forall t \in [t_0, t_1]$. Análogamente para mínimo.*

Recuerde que x^* admisible, es un máximo local fuerte si consideramos todos los incrementos tales que $\|\eta(t)\| < \delta$. En este caso las derivadas entre la función y sus vecinas en el entorno, pueden diferir mucho, lo que no sucede en el caso en que consideremos el problema de hallar extremos débiles.

Consideremos los siguientes supuestos:

1. La función F es tres veces diferenciable.

2. El camino $x = x^*(t)$ es extremal, y pertenence a la clase de las funciones continuamente diferenciables en $[a, b]$ verificando las condiciones $x(a) = A$ y $x(b) = B$.

3. $p(t) = F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)$ es negativa y continuamente diferenciable en $[a, b]$.

4. $q(t) = F_{xx}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt} F_{x\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$ es continua en $[a, b]$.

5. No existen puntos conjugados de a para la ecuación diferencial $(pu')' = qu$.

   Decimos que $a^* > a$, es *conjugado de a* si siendo $u(x)$ la solución de la ecuación diferencial anterior, con $u(a) = 0$ y $u'(a) = 1$ se verifica que $u(a^*) = 0$.

Teorema 21 *Bajo las condiciones (1) a (5) anteriores, una extremal x^* es un máximo local (débil) para el funcional (**??**) en la clase de todas las funciones continuamente diferenciables que verifican $x(a) = A$ y $x(b) = B$.*

Idea de la demostración: La demostración se basa en la posibilidad de expandir la función $\phi(t) = J[v^* + th]$ en serie de Taylor hasta el tercer orden, en torno a $t = 0$ y evaluando en $t = 1$, donde $v^* = (x^*, \dot{x^*})$ y $h = (\eta, \dot{\eta})$, lo que permite escribir

$$J[v^* + h] = J[v^*] + A[h] + Q[h] + E[h],$$

donde

$$\begin{aligned} J[v^*] &= \int_a^b F dt \\ A[h] &= \int_a^b F_x \eta + F_{\dot{x}} \dot{\eta} dt \\ Q[h] &= \frac{1}{2} \int_a^b F_{xx} \eta^2 + 2F_{x\dot{x}} \eta \dot{\eta} + F_{\dot{x}\dot{x}} \dot{\eta}^2 dt \\ E[h] &= \frac{1}{3} \int_a^b F_{xxx} \eta^3 + 3F_{xx\dot{x}} \eta^2 \dot{\eta} + 3F_{x\dot{x}\dot{x}} \eta \dot{\eta}^2 + F_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}} \dot{\eta}^3 dt. \end{aligned}$$

Puede demostrarse que

$$E[h] \leq m \|h\|_0 \|\dot{\eta}\|_2^2,$$

siendo m una constante positiva y que

$$Q[h] == \int_a^b p(t)\dot{\eta}^2(t) + q(t)\eta^2(t) dt.$$

Puede deducirse que, no habiendo puntos conjugados para la ecuación $(p(t)\dot{\eta}(t) = q(t)\eta(t)$, entonces $Q[h] \geq \gamma \|\dot{\eta}\|_2^2$, con $\gamma > 0$. Se concluye que $J[v^*] \geq J[v^* + h]$, por lo que bajo estas condiciones v^* es máximo local débil. Para la demostracón completa se puede consultar: ([**?**]).

Condiciones suficientes para extremo local fuerte, pueden consultarse además en en ([**?**]) y también en ([**?**]).

Ejemplo 34 *Considere el problema de maximizar*

$$J(x) = \int_0^1 t\dot{x} - \dot{x}^2 dt,$$

sujeto a las condiciones $x(0) = \alpha$; $x(1) = \beta$.

- Acá se tiene que $F_x = 0$ y $F_{\dot{x}\dot{x}} = -2$.
- La ecuación diferencial accesoria es $u'' = 0$.
- La solución es $u = t$, no hay puntos conjugados de 0.
- Por lo tanto. la extremal

  $$x(t) = \frac{1}{4}t^2 + (\beta - \alpha - \frac{1}{4})t + \alpha$$

  es un máximo local débil.

Apéndice A

$\left(\mathscr{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty\right)$ y Teorema de Punto Fijo de Banach

A.1. $\left(\mathscr{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty\right)$

Dado un conjunto $K \subset \mathbb{R}^p$ compacto y no vacío, considerar

$$\mathscr{C}^0(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \text{ continuas}\}$$

dotado con la norma $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in K}\{|f(x)|\}$.

Teorema 22 *El espacio $\left(\mathscr{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty\right)$ es un espacio vectorial normado y completo, es decir, es un espacio de Banach.*

Prueba 9 *Es claro que $\mathscr{C}^0(K)$ es un espacio vectorial y que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en el espacio. Basta probar que cualquier sucesión de Cauchy en $\left(\mathscr{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty\right)$ es convergente dentro del espacio.*
Sea $(f_n)_{\mathbb{N}} \in \mathscr{C}^0(K)$ una sucesión de Cauchy, i.e. dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n,m \geq N \implies \varepsilon > \|f_n - f_m\|_\infty = \max_{x\in K}\{|f_n(x) - f_m(x)|\} \quad .$$

Así que para cada $x \in K$ se tiene que $(f_n(x))_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, el cual es completo. Por lo tanto, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un número real L_x tal que $f_n(x) \to L_x$.

Definamos la función $f_0(x) : K \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in K$, $f_0(x) = L_x$. Resta probar las siguientes afirmaciones:

a $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f_0$
En efecto, dada $\varepsilon > 0$, encontrar la $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n,m \geq N \implies \varepsilon > \|f_n - f_m\|_\infty = \max_{x\in K}\{|f_n(x) - f_m(x)|\} \quad .$$

Hagamos $m \to \infty$, entonces

$$\varepsilon \geq \|f_n - f_m\|_\infty = \max_{x\in K}\{|f_n(x) - f_0(x)|\} = \|f_n - f_0\|_\infty \quad .$$

Así $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f_0$.

b *Veamos que* $f_0 \in \mathscr{C}^0(K)$.
*Nuevamente, como en (**??**), dado* $\varepsilon > 0$ *encontrar la* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n, m \geq N \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

y sea δ_n *la delta de la continuidad uniforme de la función* f_N. *Sean* $x, y \in K$ *tales que* $\|x - y\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_n$, *entonces*

$$|f_0(x) - f_0(y)| \leq |f_0(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_0(y)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon \quad .$$

Por lo tanto $f_0 \in \mathscr{C}^0(K)$ *y el espacio es completo.*

Observación 16 *De manera análoga se demuestra que el espacio*

$$\mathscr{C}^1(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \text{ continuas y con derivada continua}\}$$

con la norma $\|f\|'_\infty = \max_{x\in K}\{|f(x)| + |f'(x)|\}$ *donde* $|f'(x)| := \|\nabla f(x)\|_{\mathbb{R}^p}$; *es un espacio normado y completo. Es necesario notar que para este caso, se requiere un lema técnico sobre la convergencia uniforme de las derivadas. No es difícil, pero lo omitimos para no extender demasiado éste apéndice.*

A.1.1. Punto Fijo de Banach

Considere un espacio métrico (X, d). Una función $f : X \to X$ es una contracción si existe una constante $c \in (0,1)$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene $d\big(f(x), f(y)\big) \leq cd(x,y)$.

Teorema 23 *del punto fijo de Banach Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $f : X \to X$ *una contracción con constante* $c \in (0,1)$. *Entonces f tiene un punto fijo y es único, i.e. existe un único* $x_0 \in X$ *tal que* $f(x_0 = x_0$.

Prueba 10 *Iniciemos con un punto arbitrario* $x_1 \in X$. *Considerar* $O(x_1) = \{f^n(x_1) : n \in \mathbb{N}\}$ *la órbita de* x_1 *bajo la función* f. *Es fácil ver que si la órbita es finita, es decir* $O(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$, *entonces* $x_N = f^{N-1}(x_1)$ *es punto fijo; de lo contrario, si* $f^N(x) \neq x_N$ *debe suceder que* $f^N(x_1) = x_{i^*}$; *para algún* $x_{i^*} \in \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{N-1}\}$ *y tendríamos que* $d(x_N, x_{i^*}) = d\big(f(x_{N-1}), f(x_{i^*-1})\big) \leq cd(x_{N-1}, x_{i^*-1})$ *lo cual nos llevaría a una contradicción.*

Suponer entonces que $O(x_1)$ *tiene una infinidad de elementos. Así*

$$\begin{aligned}
d = d(x_2, x_1) &= d\big(f(x_1), x_1\big) \\
d(x_3, x_2) &= d\big(f(x_2), f(x_1)\big) \leq cd(x_2, x_1) = cd \\
d(x_4, x_3) &= d\big(f(x_3), f(x_2)\big) \leq cd(x_3, x_2) \leq c \cdot cd = c^2 d \\
&\vdots \\
d(x_{N+1}, x_N) &= d\big(f(x_N), f(x_{N-1})\big) \leq cd(x_N, x_{N-1}) \leq c \cdot c^{N-2} d = c^{N-1} d
\end{aligned}$$

Veamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ *es d-Cauchy: sean* $n, p \in \mathbb{N}$*; entonces*

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\leq c^{n-1}d + c^n d + c^{n+1}d + \ldots + c^{n+p-1}d \\
&= d\left[c^{n-1} + c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{n+p-1}\right] \\
&= dc^{n-1}\left[1 + c + c^2 + \ldots + c^p\right] \\
&< dc^{n-1}\sum_{i=0}^{\infty} c^i = dc^{n-1}\left(\frac{1-0}{1-c}\right) \\
&= \left(\frac{d}{1-c}\right)c^{n-1} < \varepsilon
\end{aligned}$$

si n es suficientemente grande, por lo que $(x_n)_{\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy en* (X, d).

Como (X, d) *es completo, existe* $x_0 \in X$ *tal que* $x_n \underset{d}{\longrightarrow} x_0$. *Veamos que: a)* x_0 *es punto fijo de* f*, b)* x_0 *es el único punto fijo.*

a *Por la continuidad de* f *tenemos que:*

$$f(x_0) = f\left(\lim_x (x_n)\right) = \lim_n f(x_n) = \lim_n (x_{n+1}) = x_0.$$

b *Suponer que existe* $x^* \in X$ *otro punto fijo de* f*, entonces* $d(x_0, x^*) = d\big(f(x_0), f(x^*)\big) \leq cd(x_0, x^*)$*, lo cual sólo puede suceder si* $d(x_0, x^*) = 0$*, i.e.* $x^* = x_0$.

Apéndice B

Teorema de Liebnitz

B.1. Teorema de Liebnitz

A continuación se presenta la Fórmula o Teorema de Liebnitz, necesaria para obtener la Condición de Euler.

Teorema 24 *de Liebnitz Supongamos que las funciones $u'(\alpha)$, $v'(\alpha)$ son continuas en $\{\alpha \mid \alpha_0 - \varepsilon < \alpha < \alpha_0 + \varepsilon\}$, para $\varepsilon > 0$, f, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ son continuas en $\{u(\alpha) \leq z \leq v(\alpha), \alpha_0 - \varepsilon < \alpha < \alpha_0 + \varepsilon\}$.*

Entonces se verifica que:

$$\left[\frac{d}{d\alpha}\left(\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(\alpha, z)dz\right)\right](\alpha_0) = f(\alpha_0, v(\alpha_0))v'(\alpha_0) - f(\alpha_0, u(\alpha_0))u'(\alpha_0) + \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \left[\frac{\partial f(\alpha, z)}{\partial \alpha}\right](\alpha_0)dz.$$

Caso particular

Teorema 25 *(Caso particular) Si $u(\alpha) = a$, $v(\alpha) = b$ y las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ son continuas, se verifica que:*

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b f(\alpha, z)dz\right) = \int_a^b \frac{\partial f(\alpha, z)}{\partial \alpha}dz.$$

Apéndice C

Teoremas para Estados Estacionarios

A continuación presentamos dos teoremas relevantes para el estudio de los estados estacionarios de un sistema dinámico. Su aplicación es sencilla y de gran interés para caracterizar los estados estacionarios de las economías. No obstante, sus demostraciones son algo técnicas y las omitiremos en este curso. Puede consultarse en los libros de Herbert Amann (ODE) o de Gerald Teschl (ODE and Dynamical Systems).

C.1. El teorema de Hartman Grobman

El teorema de Hartman-Grobman, o de linealización, se refiere el comportamiento local de los sistemas dinámicos en la vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico. Afirma que la linealización -una simplificación natural del sistema- es efectiva para predecir patrones de conducta cualitativos.

Establece que el comportamiento de un sistema dinámico en un dominio cercano a un punto de equilibrio hiperbólico es cualitativamente el mismo comportamiento de su linealización cerca de este punto de equilibrio, donde la hiperbolicidad significa que ningún valor propio de la linealización tiene una parte real igual a cero. Por lo tanto, cuando se trata de tales sistemas dinámicos, uno puede usar la linealización del sistema para analizar su comportamiento en torno a los equilibrios.

Teorema 26 *de primera aproximación, o principio de linealización.*
Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo C_1 y sea x_0 un punto de equilibrio de $x' = f(x)$.

1. *Si todos los autovalores de la derivada $Df(x_0)$ tienen parte real estrictamente negativa, entonces x_0 es asintóticamente estable.*

2. *Si existe un autovalor de $Df(x_0)$ con parte real estrictamente positiva, entonces x_0 es inestable.*

C.2. Variedades estable e inestable

Definición 17 *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo C_1. Definimos el conjunto estable de un sistema $x' = f(x)$ como*

$$W_s := \left\{ x \in \Omega : \lim_{t \to \infty} \psi(t,x) = x_0 \right\},$$

y el conjunto inestable de $x' = f(x)$ como

$$W_u := \left\{ x \in \Omega : \lim_{t \to -\infty} \psi(t,x) = x_0 \right\},$$

siendo $\psi(t,x)$ la solución que en $t = 0$ se encuentra en x.

Teorema 27 *Supongamos que x_0 es un punto de equilibrio de un campo $f \in C_1(\omega, \mathbb{R}^n)$ y que $Df(x_0)$ es un operador hiperbólico (i.e. todos sus autovalores tienen parte real no nula). Entonces W_s y W_u son subvariedades diferenciables de ? y sus espacios tangentes en x_0 son E_s y E_u respectivamente.*

En particular, W_s tiene dimensión igual al número de autovalores de $Df(x_0)$ con parte real negativa y la dimensión de W_u es igual al número de autovalores de $Df(x_0)$ con parte real positiva (en ambos casos contados con su multiplicidad).

Bibliografía

[1] E. ACCINELLI, *La topología de las correspondencias y el equilibrio de nash*, in Economía Dinámica, Economía Aplicada y Teoría de Juegos: Ensayos en Homenaje a Ramón García-Cobián, C. M. y Loretta Gasco, ed., Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, 2007, ch. 8.

[2] J. ARANDA, *Mapa de fases*.

[3] E. CERDÁ, *Optimización Dinámica*, Pearson Education, 3era edición ed., 2001.

[4] L. ELSGOLTZ, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Editorial MIR, 1969.

[5] E. B. LEE AND L. MARKUS, *Foundations on Optimal Control Theory*, Minnesota Univ Minneapolis Center for Control Sciences, 1967.

[6] C. R. MACCLUER, *Calculus of Variations: Mechanics, Control and Other Applications*, Dover books on mathematics, reimpresa ed., 2012.

[7] S. S. MORRIS W. HIRSCH, ROBERT L. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, 1974.

[8] F. P. RAMSEY, *A mathematical theory of saving*, The economic journal, 38 (1928), pp. 543–559.

[9] F. J. RICHARDS, *A flexibe growth function for empirical use*, Journal of Experimental Botany, 10 (1959), pp. 290–301.

[10] J. M. SMITH, *Models in Ecology*, Cambridge University Press, Noviembre 1978.

[11] P. F. VERHULST, *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, Correspondance Mathématique et Physique, (1838), pp. 113–121.

[12] D. G. ZILL, *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores Frontera*, Cengage Learning, 2018.