UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSI
FACULTAD DE ECONOMÍA

CUADERNO DE TRABAJO

No. 22

Notas Docentes

Diciembre 2016

ELVIO ACCINELLI GAMBA
JOSS E. SÁNCHEZ PÉREZ
WILLIAM OLVERA LÓPEZ

MAESTRÍA EN ECONOMÍA MATEMÁTICA

Material Didáctico
(Teoría de Juegos)

Elaborado por:
Elvio Accinelli Gamba
William Olvera López
Joss Erick Sánchez Pérez

Índice general

Objetivos y Agradecimientos

Estas notas pretenden ser una inteorducción a los fundamentos de la tepría de juegos no ccooperativos. La teoría de juegos en la actualidad, presenta un sinúmero de apliaciones y desarrollos espcíficcos que merecen cada uno estudios dirigdos a la temática. Así los juegos evolutivos, la teoría de negociación, la teoría del agente y el principal, ña teoría de contratos, la de subastas, por no mencionar el amplio campo de aplicaciones y dearrollo teórico, de la teoría de juegos cooperativos. El lector intereasdo en estas temáticas deberá dirigise a la literatura específica.

Estas notas son sólo introductorias, partiendo de una formulación informal pero intuitiva, pretenden llegar a definciones rigurosas, cuya intuición, esperamos, el lector encuentre en las primera partes de texto. Iremos paulatinamente aproximándonos al teorema de existencia del equilibrio de Nash, delque daremos una demostración. Mostraremos también que sibieneste concepto de equilibrio es fundamental en la teoría de juegos, no siempre ofrece una solución satisfactoria y algunos refinamientos se hacen necearios.

Una versión preliminar de estas notas se encuentran en [Accinelli y Vaz, (2013)].

Agradecemos al CONACyT por el apoyo brindado a través de diferentes proyectos que permitieron a los autores entre otras cosas, escribir estas notas.

Capítulo 1

Introducción

La teoría de juegos podría definirse como el estudio de modelos matemáticos sobre el conflicto y la cooperación entre agentes racionales e inteligentes. Usando otras palabras, puede caracterizarse el objeto de esta rama de la matemática como el análisis de modelos formales de "comportamiento estratégico", lo que obviamente sugiere la existencia de intencionalidad. [1]

El nombre de la disciplina proviene de sus antecedentes históricos. En efecto, sus orígenes se remontan a la teoría de la decisión cuyo objeto era el comportamiento de quienes participan en juegos de salón que comienzan a desarrollarse en las cortes europeas a partir del siglo XVIII. [2] Uno de los temas que entonces se analizaba era, lo que posterirmente dio en llamarse la "Paradoja de San Petersburgo". La misma consistía en que la gente sólo apostaba sumas muy módicas para participar en un juego que tenía una ganancia esperada infinita y cuya mecánica es la siguiente: *se tira una moneda al aire, si sale cara el apostador gana $1 y el juego se termina. Si sale número la moneda es tirada otra vez. Si sale cara el apostador gana $ 4 y el juego se termina, pero si sale n úmero se tira la moneda nuevamente. La ganancia por obtener una cara en la tercera tirada es $ 16 y por obtenerla en la cuarta es $ 64, etc.*

Los estudios modernos de teoría de juegos comienzan con Ernest Zermelo y Emile Borel. Quizás Borel fue el primero en definir la noción de juegos estratégicos. Publicó diversos trabajos

[1] Una autoridad en la materia como Robert Auman, define la Teoría de Juegos como la teoría del comportamiento racional de personas con intereses no idénticos. A nuestro juicio al no hacer hincapié en la interacción entre los individuos, esta definición resulta extremadamente vaga y no permite la distinción entre la teoría de juegos y la teoría estadística de la decisión. [R. J. Auman, (1989)]

[2] La cita de rigor es [D. Bernuolli,(1730)], según la traducción inglesa del trabajo de 1730 cuyo título original era "Specimen Theorare Novae de Mensura Sortis"

sobre el juego del poker, incorpornado temas de información imperfecta y sugirió lao definicón de estrategias mixtas comomedidas de probabilidad.

El teorema de Zermelo asegura que en cualquier juego finito entre dos personas, con intereses estrictamente contrapuestos en el cual los jugadores mueven alternativamente y en los que el azar no afecta el proceso de toma de decisiones, si el juego no puede acabar en tablas, uno de los dos jugadores debe tener una estrategia ganadora. Más formalmente y en términos posteriores el teorema afirma que:

- *Todo juego en forma extensiva que exhibe información total tiene un equilibrio de Nash que puede descubrirse por inducción hacia atrás. Si cada recompensa es única para cada jugador, esta solución por inducción hacia atrás (empezando por el fin del juego y yendo hacia atrás hasta su inicio) es única.*

Los estudios modernos de teoría de juegos comienzan con [E. Zermelo (1913)], y [E. Borel, (1938)]. Pero recién con la publicación del trabajo de Von Neumman y Morgernstein, *Game Theory and Economic Behavior,* [O. Morgenstern, J. von Neumann(47)], es que esta disciplina comienza a expandirse en forma sistemática.

En la matemática, el desarrollo inicial de la teoría de juegos está asociado con el desarrollo de ramas aplicadas como la teoría estadística, de la decisión y una serie de problemas que, *grosso modo,* pueden considerarse parte de la Programación Lineal.

En las ciencias sociales la adopción de la teoría de juegos como una metodología de análisis es más reciente. La economía es la que ha liderado este proceso, sin duda alguna, y podría decirse que desde comienzos de los años 60 ha habido una masiva importación de la teoría de juegos para la elaboración de la teoría económica.

De hecho, la idea de que la manera de formalizar el comportamiento racional era a través de la teoría de juegos provocó un cambio dramático en la manera de estudiar la microeconomía - y más recientemente la macroeconomía - por cuanto algunas de las teorizaciones en el estilo de las desarrolladas por la "Escuela de Chicago" de los años 50 y 60 no pudieron ser sostenidos cuando se adoptó el nuevo marco analítico en forma generalizada.

La escuela de Chicago desarrolla, en 1930, el método llamado structure-condect performance, conocido por sus iniciales SCP, para el estudio de la economía industrial y sobre el que basaba su análisis de la economía industrial. En particual la formación de monopolios y las políticas anti-trust. este métod0 era más descriptivo y discursivo que formal y matemática y se opoía a los planteamientos formales de la teoría de juegos. El paradigma de la Escuela de Chicago sostenía que la actividad industrial debí analizarse cmoo en el largo plazo, en equilibrio perfectemente competitivo. Pues en definitiva, la existencia de altos beneficios, en una ramade la producción haría que nuevas firmas ingresaran, haciendo que el monopolio fuera sólo temporal.

La teoría de juegos introducía la competencia imperfecta y el comportamiento estratégico. Si bien inicialmmnente altamente teórica, los resultados empíricos mostraban su mejor capacidad para explicar la formación de monopolios y las políticas destinados a evitarlos que cualquiera de las anteriores. Durante la década comprendida entre 1970 y 1980, la economía industrial se desarrolla sobre la base de la teoría de juegos.

La prevalencia de la teoría de juegos queda claramente expreseada en el hecho de que el Premio Nóbel de 1994 fue obtenido por autores que desarrollaron la teoría de juegos y el 1995 fue concedido al economista que encabezó la renovación metodológica del Departamento de Economía de la Universidad de Chicago.

No obstante, algunas de las ideas que han llegado a ser básicas en teoría de juegos recién se incorporan al cuerpo teórico en 1950, aun cuando ya habían sido presentadas en un análisis económico concreto en las primeras décadas del siglo XIX por economistas franceses que estudiaban el comportamiento de las empresas en mercados no competitivos (en particular, [A. Cournot, (1897)] y [J. Bertrand (1883)]). De hecho, si bien hasta fines de la década del 50, el desarrollo de la teoría de juegos era un “asunto” de matemáticos puros y no había habido desarrollos originado por disciplinas empíricas, desde los 60 esa situación cambia (los premios Nóbel adjudicados a John Nash, John Harsanyi, y Reihard Selten, sin embargo, exageran la influencia de la economía en el trabajo de esos matemáticos).

Esta situación se revierte, y recientemente, los manuales más conocidos de teoría de juegos han sido escritos por economistas o economistas matemáticos y han sido realizados con la vista puesta en la aplicaciones de la teoría a las ciencias sociales[3].

Algunos de los cursos más celebrados de teoría de juegos, que son válidos para los programas

[3] En los últimos años el desarrollo de los llamados Juegos Evolutivos ha mostrado las posibilidades de aplicación de la teoría de juegos a la biología, en particular a la evolución de las poblaciones.

de doctorados en matemática, se imparten en los departamentos de economía.

Una advertencia que cabe hacer desde el principio es que, la teoría de juegos se divide en dos grandes áreas: **“juegos cooperativos”** y **“juegos no cooperativos´´**. Si bien en ambas clases de juegos la teoría de la decisión individual es la misma, sus enfoques y el instrumental matemático que los formaliza, son diferntes. En el primer caso se permite a los individuos involucrados hacer negociaciones para actuar mancomunadamente, pero en el segundo caso ello no se permite. Si los agentes terminan cooperando, ello es el resultado de un comportamiento competitivo resuelto individualmente y no mediante negociaciones dirigidas a tal efecto. El curso se limitará al tratamiento de juegos no cooperativos.

1.1. Noción informal de juego

La mención de que la teoría de juegos estudia o desarrolla modelos formales de comportamiento estratégico no es suficiente para comenzar a comprender en concreto a que refiere esta disciplina. Se refiere a conflictos a los que pretende modelar formalmente, para entenderlos y analizar sus posibles soluciones. Por supuesto, no se refiere a toda posible expresión de conflicto de intereses, ni a toda situación en la que sea posible detectar oposición de intereses. La teoría de juegos pretende desarrollar modelos sobre algunas situaciones conflictivas, aqeullas que tienen las características que se enumeran seguidamente:

a.- Los resultados posibles de una situación conocida [4] están claramente especificados y son conocidos por los individuos involucrados en esa situación.

b.- Las variables que controlan los resultados posibles también se presumen que estén bien especificados, esto es, se puede caracterizar precisamente todas las variables y los valores que ellas pueden asumir. En términos un poco más vagos pero contundentes, la teoría de juegos requiere la especificación de reglas de juego claras.

c.- Los individuos tienen preferencias sobre los resultados, que cumplen una serie de axiomas y propiedades que examinaremos más adelante.

[4] Cuando se postula que la naturaleza es estocástica, lo conocido, es la función de distribución de los resultados posibles.

- Se supone que la gente procura obtener para sí el mejor resultado, Es esto lo que se denomina un **comportamiento racional**.

- Con el objetivo de obtener este resultado elige sus acciones o estrategias. Asignamos a ellas el valor esperado del resultado que conllevan. Bajo estos supuestos, haciendo abstracción de la interacción entre los individuos, un observador que fuera informado de las preferencias de cada individuo podría saber que elegiría cada uno si nada le obstaculizara su elección. item Pero la teoría de juegos hace referencia a conflictos donde ninguno de los involucrados es capaz de resolver por si splo la situación

- Los resultados posibles de ser alcanzados por cada estrategia seguida por cada agente, dependen de lo que los demás hagan y todos buscan obtener para sí lo mejor. Luego:

    - El resultado de cada acción o estrategia individual, depdende de loq ue los demás hagan, Así el comportamiento reacional, implica el estratégico, es decir, el considerar lo que los otras hacen en el momento de elegir a estrategia propia. Esto da lugar al **comportamiento estratégico.**

d.- Todo lo mencionado hasta el momento es de público conocimiento. Este es el supuesto denominado **"conocimiento común"** (common knowledge). Este supuesto implica que cada agente sabe cuanto le importa cada resultado posible y a su "contrincante", conoce las reglas del juego, sabe que su oponente es un agente racional que actúa estratégicamente, sabe que, su contrincante, sabe las mismas cosas que él y sabe que su contrincante sabe que él sabe y así hasta el infinito:

yo se que tu sabes que yo se que tu sabes, etc...

Nota 1: Obsérvense dos hechos: **(i)** el concepto de racionalidad implica que los agentes tienen la capacidad y la información necesaria para calcular la utilidad esperada de cualquiera de los resultados del juego y **(ii)** que, ante situaciones complejas, en que ningún agente tiene el control total de los acontecimientos, no alcanza con la racionalidad de cada agente, una vez ubicado en una situación dada actuará estratégicamente.

Nota 2: Es destacar que el llamado conocimiento común ayuda en muchos casos a la obtención de una información desconocida en principio por el o los protagonistas, y sólo accesible en la medida en que todos actúan de acuerdo a ese conocimiento común. Recuerde el problema planteado por el Rey a las matemáticas de su reino, las que debían informarle sobre el color del sombrero que él les había adjudicado, sabiendo que solamente habría dos colores diferentes de sombreros y al menos uno de los sombreros adjudicados era de un color previamente definido. Naturalmente las matemáticas no verían el color de su propio sombrero.

En un juego, entonces, los resultados posibles pueden ser determinados de antemano y dependerán de las acciones que elijan los individuos que participan, quienes deben ceñirse a un conjunto estricto y conocido de reglas. Los individuos escogerán el curso de acción de modo de maximizar la utilidad esperada de se decisión, teniendo en cuenta que los otros individuos proceden del mismo modo sabiendo lo mismo.

1.2. ¿Qué hace la teoría de juegos?

El rol de la teoría no es examinar todos y cada uno de los cursos de al acción que eventualmente puede tomar cada sujeto y todos y cada uno de los resultados que pueden suscitarse. Su objeto, es determinar, cuando sea posible, el resultado "más probable" del juego. Cuando ello no es posible, procura determinar el conjunto de resultados que "a priori" resultan más probables dados los supuestos establecidos. Esto es el conjunto de los **equilibrios** posibles, entendiendo por tales aquellas elecciones que no impliquen arrepentimiento, es decir aquellas acciones que fueron racionalmente elegidas, en el sentido que dada la situación, maximizan la utilidad esperada.

1.3. Sobre los usos posibles de la teoría de juegos

Como dijimos, en esencia la teoría de juegos es una rama de la matemática. En sus aplicaciones concretas en disciplinas empíricas, importa por su poder descriptivo y como metodología analítica por su poder predictivo. Es así que la utilización hace de esta teoría una ciencia positiva, más que normativa, aunque en su formulación haya elementos normativos insoslayables. Su axiomatización no se basa en una abstracción de prácticas habituales, sino que se basa en conceptos que se suponen naturales y propios del comportamiento racional. A partir de aquí se deriva un comportamiento optimizador, que no necesariamente tiene porqué ser robusto al cambio de supuestos. En este sentido la teoría es normativa. La definición de actitud racional tiene pleno sentido en el marco de la axiomática establecida y puede ser relativizada como actitud *"natural"* fuera de él.

Es de destacar que los prerrequisitos matemáticos para la comprensión de la teoría, más que a alguna parte especial de la matemática hacen referencia al método y a la forma de razonar, aunque podamos mencionar como necesarios conocimientos básicos de Probabilidad, Topología y Algebra Lineal. Desarrollos posteriores de la teoría requieren la utilización de técnicas más avanzadas de la matemática. Control óptimo, teoría de la medida, sistemas dinámicos, etc.

Capítulo 2

Ejemplos de juegos cooperativos y no cooperativos

La teoría de juegos puede dividrse en dos grandes ramas, aquella que se ocupa de *Juegos Cooperativos*, que modela conflictos en osque los agentes pueden llegar a acuerdos, o realizar intercambio de información, para mejorar los resultados individuales y aquellos en los que está prohibido todo tipo de cooperación entre los jugadores, estos conflictos son modelados por los lamados *Juegos no Cooperativos.*

Estas notas tienen como objetivo inroducir al lector en los fundamentos de los juegos no cooperativos. No obstante haremos a continuación una breve presentación de los juegos no cooperativos.

Un juego cooperativo es un juego donde grupos de jugadores, **coaliciones**, logran mediante algún tipo de negociación un comportamiento cooperativo. El juego resulta una competencia entre coaliciones de jugadores, más que entre jugadores individuales. Queda definido mediante la especificación de un conjunto de jugadores y una función que asigna un pago a cada coalición posible Formalmente, un juego cooperativo (N, v) se compone de

1. Un conjunto finito de jugadores N, a partir del cual se forman coaliciones, esto es subconjuntos S de N. La coalición que reúne a todos los jugadores se denomina la gran coalición.

2. **Una función real denominada característica** $v : 2^N \rightarrow R$ tal que $S \subset N \rightarrow v(S)$.

Donde $v(S)$ corresponde al pago que recibe la coalición S tal que $v(\emptyset) = 0$.

3. La función describe la cantidad de recompensa colectiva de un conjunto de jugadores puede ganar mediante la formación de una coalición.

4. Los jugadores elegirán la coaliciones que integrarán, de acuerdo con su estimación de cómo se dividiréntre los miembros de la coalición el pago definido por v.

Ejemplo 1 *Cono ejemplo de juego cooperativo, considere el siguiente. Hay tres jugadores, por lo que $N = \{1, 2, 3\}$. Piense en el jugador 1 como vendedor y los jugadores 2 y 3 como dos compradores potenciales. El jugador 1 tiene una sola unidad para vender, cuyo costo es de 4 pesos. Cada comprador está interesado en la compra de a lo máximo una unidad. El jugador 2 tiene una disposición a pagar igual a 9 pesos por el producto del jugador 1, mientras que el jugador 3 tiene un disposición a pagar igaual a 11 pesos para el producto del jugador 1.*

Definimos la función característica v para este juego de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&v(\{1, 2\}) = 9 - 4 = 5, \\
&v(\{1, 3\}) = 11 - 4 = 7, \\
&v(\{2, 3\}) = 0, \\
&v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, \\
&v(\{1, 2, 3\}) = 7.
\end{aligned}$$

Esta definición de función característica v es bastante intuitiva. Si los jugadores 1 y 2 participan en la misma coalición su ganancia total es la diferencia entre la disposiciń a pagar del compardor y el costo del producto, es decir, 5 pesos. Del mismo modo, si los jugadores 1 y 3 se unen, su ganancia total es la diferencia entre la voluntad de pagar del jugador 3 y el costo, lo que ahora es de 7 pesos. La coalición de los jugadores 2 y 3 no crea ningún valor Cualquier coalición integrada por un sólo jugado no crea valor, ya que no hay ninguna transación. Por último, cabe señalar que $v(1, 2, 3)$ se fija igual a 7 pesos. La razón es que el jugador 1 tiene una unica unidad para vender y por eso, a pesar de que existen dos compradores en el conjunto $\{1, 2, 3\}$, el jugador 1 puede realizar Esta definició

on de la función característica v es bastante intuitivo. Si los jugadores 1 y 2 participan en la misma coalición pueden realizar transacciones, su ganancia total es la diferencia entre la disposiciń a pagar del comprador y el costo del producto que ofrece el vendedor, lo que da como resutado una gananacia de 5 pesos. Del mismo modo, si los jugadores 1 y 3 se unen, su ganancia total es igual a la diferencia entre la disposición a pagar del comprador y el costo, diferencia que ahora es de 7 pesos. Una coalición forma por úncamente los jugadores 2 y 3 no puede crear ningún valor, cada uno está buscando al vendedor, no otro comprador. Cualquier coalición integrada por un único jugador, no creará ningún valor ya que no hay ninguna transacción posible. Por último, $v(1, 2, 3)$ se fija igual a 7 pesos, (no en $5 + 7 = 12$). l La razón es que el jugador 1 tiene una única unidad para vender y por eso, a pesar de que existen dos compradores posibles en el conjunto $\{1, 2, 3\}$. Cuál de las dos posibles es elegida, es una opción, pero es natural suponer que el jugador 1, realiza la única transacción posible con el jugador con mayor disposición a pagar, es decir, el jugador 3.

Una pregunta importante es: ¿Cómo y por qué algunas coaliciones son pasibles de formarse y otras no? la respuesta dependerá en gran medida de cuáles sean los beneficios que los individuos pueden obtener al participar en una u otra coalición. Por ejemplo, supongamos que se forma la gran coalición, es decir los tres individuos deciden cooperar. El problema es ahora es cómo dividir el valor total creado (en este caso 7 pesos) entre todos los integrantes de la gran coalición, (en el caso 3 jugadores). Si alguno de los participantes en esta coalición, no obtiene un incentivo suficiente, podría proponerle a alguno de los otros abandonar la gran coalición, negociar entre ellos y dejando de lado a los restantes ((en nuestro caso dos jugadores dejarían de lado a un tercero) y obtener mejores beneficios luego de acordar entre ellos, una forma de distribuir el valor creado en la nueva coaición. Pero aún así el tercero pordría hacer una mejor oferta a algunos de los coalicionados y romper la posible coalición, Por lo tanto en principio, a menos no resulta tan fácil dejar de lado a un potencial competidor, quizás mejor ser ofrecer algo a todos los participantes del conflicto, claro está siempre que cada uno sea capaz de ofrecer algo a cambio. Como sea que las coaliciones se formen, se asume que, ninguna generará mayor valor que la gran coalición. Debemos entonces, buscar una forma de que sea este el valor creado, y para alcanzar este objetivo debemos analizar como motivamos a los participantes para lograrlo. Es decir, debemos encontrar una forma de repartir el valor posible de crearse de forma tal, de que todos participen y reciban una retribución acorde con su apoerte. Es decir, que satisfasga *razonablemente* las expectativas de cada uno de los particuoantes. Sin duda no todos aportan igual a la creación de este valor, consecuentemnete no todos tienen por qué esperar las mismas retribuciones.

¿Cómo definir la retribución a cada uno de los participantes en el conflicto, de forma tal que todos participen el la solcuión colectiva, sin boycotear la solución propuesta? Es un tema trascendental para para la teoría de juegos cooperativos. Su estudio sistemático puede remontarse a los trabajos de Von Neumann de 1947, en los que pretendían extender resultados conocidos para juegos con dos jugadores con suma cero a situaciones más generales, ver [O. Morgenstern, J. von Neumann(47)]. No obstante fue Lloyd Shapley, quien en 1953, da una solución posible al problema de reparto del valor creado por la coalición entre cada uno de los integrantes, véase [L. Shapley (1953)]

El problema no es para nada sencillo, pues con seguridad el aporte de cada individuo a una coalición puede diferir en muchas formas. En definitiva, el punto de vista fundamental de la ía de los juegos cooperativos es que (suponiendo superaditividad[1]) los jugadores terminarán por cooperar y repartirse el valor creado por la gran coalisión eficientemente entre ellos. Es decir, la solución de un juego será una **imputación** . Ahora bien, no todas las imputaciones serán aceptables. Lo que las distintas coaliciones pueden obtener por si mismas, deberá tener una influencia sobre el resultado final. La forma de obtener una imputación aceptable, queda definida a partir del valor de Shapley.

El valor de Shapley se define para cada juego cooperativo (N, v). Asigna un único reparto (entre todos los jugadores) del beneficio total generado por la gran coalición. La idea subyacente a la valoración de Shapley es la de solución arbitral. Se caracteriza por un conjunto de propiedades *"deseables"* o axiomas. Esta distribuci'on del beneficio total generado por los indivduos participantes del juego, toma en cuenta la importancia que cada jugador tiene para la cooperación global, y la recompensa que razonablemente, puede esperar. Bajo estas características, si esta imputación fuera propuesta a los distintos jugadores al principio del juego les debería parecer, una solución razonable. La valoración podría considerarse por lo tatno, cmo el valor esperado del juego para cada jugador

[1] Un juego es superaditivo si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ para todo par de coaliciones $S, T \subset N$ que sean disjuntas, es decir $S \cap T = \emptyset$. La interpretacińde superaditividad es que la colaboración no crea interferencias negativas entre los jugadores.

Dado el juego de coalición (N, v) el valor de Shapley para el jugador i es igual a:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(|N| - |S| - 1)!}{N!}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Donde n es el número total de jugadores y la suma se extiende sobre todos los subconjuntos $S \subseteq N$ que no contiene el jugador i. Se puede interpretar de la siguiente manera: Considere la contibución del jugador i a coalición S esto es $v(S?i) - v(S)$ como una compensación justa, y luego tomamos el promedio de esta contribución sobre las permutaciones en la que se puede formar la coalición y sumamos sobre todas las coaliciones de este tipo.

Ejercicio 1 *Calcule el valor de Shapley para el juego del ejemplo (1).*

Nos dedicaremos de ahora en adelante unicamente al estudio de los juegos no cooperativos. A continuación haremos una presentación de los juegos no coopeartivos mediante algunos ejemplos paradigmáticos. Más adelante avanzaremos en su presentación formal. Los modelos de juegos no cooperativoos se dividen en dos grandes grupos, juegos en forma extensiva y juegos en forma normal. Comenzaremos con un ejemplo de los primeros.

2.1. Juegos en forma extensiva, ejemplos

Presentamos a continuación un ejemplo de juego en forma extensiva.

Ejemplo 2 *Considere un mercado en el que existe una única firma establecida y una potencial competidora. Mientras que actúe sola en el mercado la firma establecida gana 40 unidades monetarias. La entrante, duda entre si entrar a competir o no, pues la establecida, amenaza con reaccionar, bajando los precios de su producto, lo que si bien significaría una disminución de sus beneficios a 10 unidades, llevaría a la ruina a la entrante, perderá 10 unidades monetarias. No obstante si la firma establecida estuviera dispuesta a compartir el mercado, entonces ambas obtendrían un beneficio igaual a 20 unidades monetarias.*

Las estrategias posibles para la entrantes son: para la entrante: entrar (E), y no entrar (NE). Para la establecida (R), reaccionar y no reaccionar (NR). Los resultados serán los siguientes,

- $u_e(NE,R) = u_e(NE,NR) = 0 \;\; u_i(NE,R) = u_i(NE,NR) = 40$,
- $u_e(E,R) = -10, u_e(E,NR) = 20 \;\; u_i(E,R) = 10, u_i(E,NR) = 20$,
- Donde $u_e(\cdot,\cdot)$ y $u_i(\cdot,\cdot)$ correspondem a los retornos obtenidos por la firma, en función de las estrategias segudias por cada una de ellas.

Obsérvese que le juego puede representarse mediante un árbol, en cuyo primer nodo, ubicamos a la firma entrante, con dos ramas que cooresponde a las posibles estrategias. Siguiendo por la rama que corresponde a la estrategia no entrar, el juego termina y se obtienen los pagos o retornos correspondientes a cada uno de los particpantes. Si en cambio la entrante entra, la rama correspondiente del nodo. Las acciones posibles para la firma establecida son reaccionar contra la entrante o noreaccionar y copartir el mercado. Cada acción posible se representa por una rama saliente al final de las cuales deben indicarse los resultados del juego o retornos obtenidos, uno para cada jugador como resultado de sus estrategias.

Analizando con algún cuidado las soluciones posibles para el juego, vemos que si l afirma entrante decide entrar, entonces lo mejor que la establecida puede hacer es no reaccionar. A la vez que si la establecida opta por no reaccionar, lo mejor que entrante puede hacer es entrar. Ahora bien, su establecida es una firma combtiva y decide reaccinar, entonces la mejor opción para entrante será permanecer fuera del mercado. ¿Podría usted indicar cual de estas soluciones posibles será la realmente obtenida?

Analizaremos más adelante, con de talle los posibles resultados para este juego.

2.2. Juegos en forma normal, ejemplos

Comenzaremos considerando ejemplos de juegos no cooperativos en forma normal, más adelante daresmo una defineión formal de este tipo de juegos. Consideremos el siguiente ejemplo clásico de **juegos no cooperativos** , conocido como la **batalla de los sexos.** Tomado de [R. D. Luce and H. Raifa (1989)].

Ejemplo 3 *y El juego en discusión queda representado por la siguiente matriz de retornos:*

	F	B
F	$(2,1)$	$(-1,-1)$
B	$(-1,-1)$	$(1,2)$

Fig.1. La Batalla de los Sexos.

Un hombre, el jugador I, y una mujer, jugador II, deben elegir a que espectáculo asisten un sábado de noche. Se trata de un partido de fútbol o de un espectáculo de ballet. De acuerdo a las normas culturales vigentes el hombre prefiere el fútbol mientras que la mujer el ballet. Ambos coinciden en que lo mejor es ir juntos, aunque el espectáculo al que asista, corresponda a la diversión menos preferida.

El jugador I prefiere la estrategia (F_1, C_1) y el jugador II, la (F_2, C_2) pues de elegir el jugador I, la fila 1, y el jugador II, la columna 1, su retorno será el máximo posible, análogamente para el jugador II.

Resulta entonces que si el jugador 2 elije C_2 lo mejor que 1, puede hacer, es elegir F_1 y recíprocamente. Esta propiedad define a un equilibrio de Nash, es decir ser una elección estratégica que es una mejor respuesta para sí misma.

Si juegan sin cooperar, y dado que no parece claro cuál estrategia elegirá el contrincante, queda la posibilidad de elegir aleatoriamente. Cada jugador puede asignar probabilidades a la elección del otro y analizar el valor esperado a cada una de las estrategias propias. Por ejemplo, si el jugador 1, supone que el dos elegirá su primera estrategia con probabilidad q_1 y la segunda con proabilidad $(1 - q_1)$ los valores esperados asociados a cada una de sus estrategias serán

$$E_1(F_1) = 2q_1 - 1(1 - q_1)$$

$$E_1(F_2) = -1q_1 + 1(1 - q_1)$$

Si el jugador 1 es racional jugará F_1 cada vez que $E_1(F_1) > E_(F_2)$. Si la desigualdad es la contraria elegirá F_2 y será indiferente entre ambas estrategias cuando $E_1(F_1) = E_(F_2)$ es decir si y solamente si $q_1 = \frac{2}{5}$. Sólo en este caso se justificaría que el jugador eligiera de manera aleatoria. Pero nótese que, por la racionalidad asumida, el jugador 2, jugaría de esta forma si y solamente si, él supone que el jugador 1, elije la primera estrategia con una probabilidad p_1 tal que $E_2(C_1) = E_2(C_2)$. Lo que en este caso corresponde que el jugador 1, elija jugar su primera estrategia con probabilidad $p_1 = \frac{3}{5}$.

En este caso el valor esperado para cada jugador será igual a $\frac{1}{5}$ para cada uno. Es decir $E[(s_1, s_2) = \frac{1}{5}$.

Obsérvese que de la misma manera que los perfiles esratégicos (F_1, C_1) (F_2, C_2) tienen la propiedad de ser cada uno una mejor estrategia dado lo que el otro hace, resulta ser $s_1 = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ una mejor respuesta para $s_2 = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$. Pero obsérvese también que para definir este equilibrio tuvimos que introducir un concepto adicional de estrategias. Fue necesario considerar el conjunto de distribuciones de probabilidad sobr el conjunto de las estrategias puras. Puede suceder que no existan equilibrios de Nash en estrategis puras, pero como veremos, siempre existirán en este nuevo conjunto, al que denomiaremos estrategis mixtas, y que básicaemente es el resultado de considerar la cápsula convexa de las estrategis puras.

Si deciden cooperar podrían elegir tirar una moneda honesta y asistir juntos al ballet si sale cara o al fútbol si sale cruz, en este caso el retorno esperado para cada un asciende a $\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.

En el marco de la teoría de juegos no cooperativos, es posible obtener soluciones a las que los jugadores arribarían si pudiesen colaborar, pero en el marco no cooperativo estas deben aparecer como resultado de la *racionalidad* en el sentido utilizado en esta teoría, (voluntad maximizadora) y no como resultado de la cooperación. Ejemplo de esto es la solución que se obtiene en el juego conocido como el dilema del prisionero cuando el juego se repite infinitamente, o bien cuando se desconce el momento en que la secuencia de juegos finaliza.

El **dilema del prisionero** hace referencia a una situación en la que dos participantes de un delito son llamados a confesar el mismo. La confesión trae aparejada una considerable rebaja de la pena para quien la haga, mientras que quien no confiese pagará por los dos. Si ambos confiesan obtienen una pena relativamente fuerte, mientras que será débil (pero mayor que la obtenida por quien confiese en el supuesto de que el otro no lo haga). Si ninguno confiesa, pues en este caso la justicia carece de un testimonio.

La siguiente tabla, pretende representar los retornos posibles para los jugadores, en función de las estrategias elegidas por cada uno de ellos. Obsérvese que el resultado (años de prisión), que cada jugador obtiene depende no sólo de su propia elección, sino también, de la elección del otro.

	c	nc
c	$3,3$	$1,5$
nc	$5,1$	$1,1$

Fig.1a. El dilema del prisionero.

En el afán de maximizar su beneficio cada uno confiesa, obteniendo una situación peor que la que obtendrían si no lo hicieran.

A diferencia de lo que sucede en el juego denominado la batalla de los sexos, en el que se encontró una *solución aleatoria*, para el dilema del prisionero, jugado una sola vez, o repetido una cantidad finta de veces, no existe ningún equilibrio diferente a la indicada, esto es (confesar, confesar). ¿Podría explicar por qué?

Como veremos más adelante, ver sección (14), la solución cooperativa aparece como resultado de la repetición del juego infinitas veces, o bien si ningún jugador sabe cuándo será la última vez que el juego se repita. Como veremos la cooperación, bajo estas circunstancias aparece como una opción racional. No obstante,

$$(confiesa, confiesa)$$

resulta la única elección en la que no hay arrepentimiento cuando el juego se juega una sola vez, o bien se repite con un horiznte bien definido y conocido por ambos jugdores.

Ejemplo 4 ***(Un juego en forma normal con tres jugadores)*** *El jugador 1, elije filas, el 2 columnas y el jugador 3 elige la matriz.*

A	L	R
U	$0,0,10$	$-5,-5,0$
D	$-5,-5,0$	$1,1,-5$

B	L	R
U	$-2,-2,0$	$-5,-5,0$
D	$-5,-5,0$	$-1,-1,-5$

Este juego tiene dos soluciones en estrategias puras (dejamos de lado por ahora la posibilidad de sorteos aleatorios),

$$(U, L, A),\ y\ (D, R, B)$$

que corresponden a mejores respuestas de cada uno de los jugadores a lo que los demás están haciendo.

Obsérvese que para el jugador 1, jugar U es la mejor respuesta dado que los otros están jugando L y A respectivamente. Igualmente para 2, jugar L es una mejor respuesta a U y A. Mientras que lo mejor que 3 puede hacer es jugar A si los otros dos juegan U y L. Quizaś el retorno que cada uno de los jugadores obtiene jugando de acuerdo a esta cmbinación estratégica no es lo mejor que podrían obtener en el juego, pero obseérvese que si el jugador 1, juega D pensando en obtener una unidad, que es lo máximo que podría obtener, tres preferirá B, lo que daría para el jugador 1 un resultado peor que si hubiese elegido U, y aunque dos eligiera R, U no sería una mejor respuesta de 1, a R y B.

Ejercicio 2 *Muestre el lector que la combianción estratégica* (D, R, B) *corresponde a una mejor respuesta de cada jugador a lo que los otros dos están haciendo.*

Más adelante nos volveremos a encontrar con estos ejemplos.

2.3. Equilibrio de Nash: Primera aproximación

Las soluciones presentadas en los ejemplos anteriores, corresponden a **equilibrios de Nash**, esto es, combinaciones estratégicas, que ofrecen a cada uno de los jugadores, una mejor respuesta a lo que los demás están haciendo.

Entendemos por **combinación estratégica** una lista exhaustiva de las acciones que cada jugador realizará en cada momento en que le toque jugar, como veremos cada jugador puede jugar más de una vez, sea porque el juego se repite, ver sección (14) o bien por la naturaleza propia del juego (ver juegos extensivos, sección (3)). Podemos entonces considerar la siguiente definición:

Definición 1 *Un **equilibrio de Nash** es una combianción estratégica que ofrece a cada jugador la mejor estrategia a seguir, dadas las estrategias que los demás están siguiendo.*

El estudio de este tipo de solución de los juegos es el objetivo de estas notas.

En los ejemplos (2), (2.2) y (3), solo consideramos dos jugadores, por lo que el equlibrio de Nash corresponde a una mejor respuesta, de cada jugador, a lo que el otro está haciendo. En el caso del dilema del prisionero si un individuo confiesa, lo mejor que el otro puede hacer es confesar. Si observamos con cuidado, todas las posibles combinaciones estratégicas de esta juego, $(confesar, \ \ confesar)$ es la única que presenta esta propiedad. En el caso de la firmas potenciales competidoras, las dos soluciones indicadas corresponden a equilibrios de Nash.

En el caso de más jugadores, para que una combinación estratégica. corresponda a un equilibrio de Nash, debe verificarse que cada uno juegue una mejor respuesta a lo que los demás están haciendo. En el caso de tres jugadores, (ver ejemplo (4)), un equilibrio de Nash, corresponde a una mejor respuesta a lo que los otros dos están haciendo. Las dos combinaciones estratégicas consideradas en este ejemplo corresponden a este tipo de solución.

Como inidcamos anteriormente,podemos distinguir dos formas de modelar los juegos no cooperativos: la llamada **juegos en forma extensiva** y la segunda llamada **juegos en forma normal**. Veremos que existen situaciones que pueden representarse de ambas maneras sin perder información, aunque en general, una y otra capturan características diferentes. Mientras los juegos en forma extensiva corresponden a elecciones secuenciales, los juegos en forma normal corresponden a elecciones tomadas en un mismo momento por todos los participantes (o bien realizadas, sin que en el momento de elegir, cada jugador conozca lo elegido por los demás). No obstante veremos que es posible, en algunos casos, transitar de una representación a otra.

Comenzaremos a continuación con una introducción formal de los juegos no cooperativos. Primero consideraremos la forma extensiva y luego los juegos representados en forma normal o esratégica.

Capítulo 3

Juegos en forma extensiva (de manera formal)

La siguiente definición formal de un juego en forma extensiva, puede seguirse con la ayuda de la Fig. 2.

Definición 2 *Formalmente un juego en forma extensiva está definido por:*

i) *Un conjunto de jugadores.*

ii) *Un árbol finito, cuyos nodos representan los movidas, y cuyas ramas representan las posibles jugadas en cada movimiento.*

iii) *Un etiquetamiento del conjunto de nodos en una de $n+1$ clases que representan a cada uno de los n jugadores y una para la naturaleza (esta puede o no, estar presente).*

iv) *Una distribución de probabilidad sobre las ramas en cada nodo correspondiente a una movida de la naturaleza.*

v) *Una partición en el conjunto de los nodos para cada jugador en subconjuntos, llamados conjuntos de información. No pudiendo un jugador distinguir entre movidas (nodos) diferentes correspondientes al mismo conjunto de información. La existencia de información imperfecta queda representada por el hecho de que un conjunto de información posee más de un nodo.*

v) *Una asignación de resultados (retornos) para cada nodo final, esto es para cada sucesión de elecciones posibles.*

vi) *Para cada jugador, existe una función de utilidad definida sobre cada nodo final del árbol, de conocimiento público. Esta utilidad es asiganda al camino estratégico que lo llevá hasta allí*

Definición 3 *Entendemos por* ***nodo*** *lo siguiente:*

- *Un punto en el cual un jugador tiene que elegir la jugada que realizará de acuerdo a reglas previamente establecidas y conocidas por todos los participantes. Las ramas salientes de cada nodo, corresponden a posibles jugadas del jugador al que corresponde el nodo.*
- *Un punto en el cual la naturaleza juega. Cada rama saliente corresponde a un estado futuro, la distribución sobre los estados se supone conocida.*
- *Un punto donde el juego acaba. Se indican a continuación los retornos corresponentes a cada jugador, si el juego finaliza en tal nodo.*

Los nodos de cada jugador se dividen en conjuntos de información, el jugador en principio, no puede indistinguir en cual de los nodos del conjunto de información se encuentra. En ciertas ocasiones, apelando al conocieminto común puede suceder que logre saber en cual nodo se encuentra. Recuerde a las matemáticas del reino que no sabían si tenían puesto un sombrero rojo o uno azul. Lo que aprendieron en base al conocimiento común.

3.1. Estrategias puras y estrategias mixtas

En este tipo de juegos el orden de la elección es importante, debe estar claro cuando y quien elige, este orden introduce una dinámica en el juego. Una sucesión completa de tales elecciones es una estrategia. Por S_i representamos el conjunto de estrategias del jugador $i-$'esimo.

Sea $\mathcal{N}_i$ el conjunto de nodos y $S_i = \bigcup_{n_i \in \mathcal{N}_i} S_{n_i}$ donde S_n es el conjunto de acciones posibles del jugador i en el nodo n_i. En definitiva:

- Una **estrategia pura** para el jugador $i-$ésimo es una función

$$E_i : \mathcal{N}_i \to S_i$$

de forma tal que:

1. A cada $n_i \in N_i$ le hace corresponder una acción posible para el jugador $i-$ésimo en dicho nodo. Es decir $E_i(n_h) \in A(n_h)$ siennd $A(n_h)$ el conjunto de acciones posibles en el nodo n_h.
2. Además $E_i(n_h) = E_i(n_p)$ si n_h y n_p pertenecen al mismo conjunto de información,

En definitiva puede decirse que un estrategia pura para el jugador i es un mapa ϕ_i que asigna a cada conjunto de información una acción posible (la misma para cada nod del conjunto).

Nota: Una estrategia pura debe indicar una acción para cada nodo, aún para aquellos nodos, por los que el juego no pasará, asignanado la misma acción a nodos en el mismo conjunto de información. Para el ejemplo de la firma entrante y la establecida, aun cuando entrante decida no entrar y el uego se termina sin que establecida deba elegir, un perfil estratégico debe indicar las acciones que llevaría adelante la establecida, si se pasara por sus nodos. Precisamente una posible amenaza de la establecida hacia la entrante puede hacer que la entrante decida no entrar, lo que haría de no existir tal amenaza, ver sección (2.1).

Una lista que indique una estrategia para cada jugador, se denomina **perfil estratégico** o **combinación estratégica** Mas detalladamente:

Definición 4 *Entenderemos por* ***estrategia pura*** *de un jugador una regla o conjunto de reglas que estipulan la jugada a realizar por el jugador en cada uno de los nodos en los que debe jugar. Cada jugada corresponde a una rama que sale del nodo correspondiente. Un* ***perfil estratégico*** *es una lista exahustiva de elecciones una en cada nodo, independientemente de si el nodo se alcanza o no.*

Una **combinación estratégica** o perfil estratégico , **es de equilibrio** si el resultado obtenido por su aplicación maximiza las posibilidades de cada jugador, de forma tal que al desviarse de la estrategia indicada en el perfil, cada jugador acarrea el riesgo de pérdidas más importantes, o beneficios menores, que aquellos que podría obtener de guiarse por la estrategia de equilibrio. Es en este sentido que diremos que una estrategia de equilibrio es optimal.

Definición 5 *Entendemos por* ***estrategia mixta*** *de un jugador, a toda distribucióin de probablidades sobre el conjunto de estrategias puras.*

A cada perfil estratégico, corresponde un retorno para cada jugador, los que se indican en el nodo final. De forma tal que si S es el conjunto de perfiles estraťegicos $S = S_1 \times ... \times S_n$. Para cada $s \in S$ se obtiene una lista de n números reales, que corresponde a los retornos, uno para cada jugador. De esta forma una función de pagos o retornos tiene la siguiente forma $u; S \to R^n$.

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 *En la Fig. 2, N representa a la naturaleza, que determina la situación en la que el primer jugador hará su primera jugada. A continuación el jugador I, elegirá entre dos posibles acciones o movidas. Una estrategia para I quedará definida por una dupla elegida en el conjunto* $S_1 = \{(i,i),(i,d),(d,i),(d,d)\}$ *que representa la acción a elegir en una u otra situación.*

A continuación mueve II, quien tendrá que definir un estrategia posible dentro del conjunto $S_2 = \{(i,i,i),(i,i,d),(i,d,d),(i,d,i),(d,i,i),(d,d,i),(d,i,d),(d,d,d),(i,i,c),(i,d,c),(d,d,c),(d,i,c)\}$

Obsérvese que el jugador II no sabe distinguir en cual de los dos posibles nodos centrales se encuentra, para él existen únicamente tres situaciones posibles.

Una vez elegidas las estrategias el retorno para cada jugador queda determinado para cada estado de la naturaleza.

Un perfil estratégico para este juego es por ejemplo la lista: $s = \{i,d);(d,i,i)\}$ *de esta forma de esta forma el retorno a social a este perfil será;*

$$u(s) = u((i,d);(d,i,i)) = (u_1(i,d);(d,i,i)), u_2(i,d);(d,i,i))),$$

donde

$$u_1(i,d);(d,i,i)) = \tfrac{1}{3}(-1) + \tfrac{2}{3}(1) = \tfrac{1}{3}$$

$$u_2(i,d);(d,i,i)) = \tfrac{1}{3}(0) + \tfrac{2}{3}(1) = 0.$$

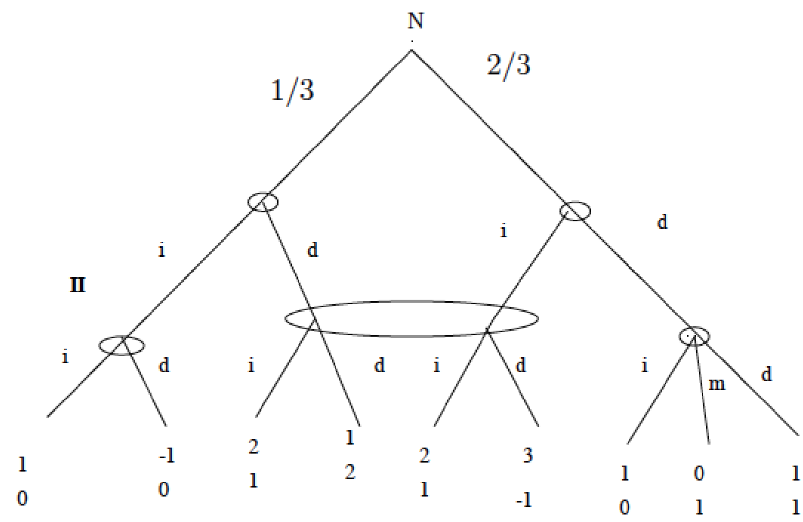


Fig. 2 La naturaleza juega primero. Los retornos de cada jugador aparecen al final. los de arriba para el I, los de abajo para el II.

Capítulo 4

Juegos en forma normal (de manera formal)

Un juego en forma normal o estratégica, puede ser considerado como una simplificación importante de un juego en forma extensiva, no obstante tiene importancia por sí mismo. Veremos más adelante (en la sección (5) la relación entre ambas representaciones.

Definición 6 *Un **juego en forma normal** consiste en:*

i) Un conjunto finito de jugadores, indexados por $i \in \{1, 2, ...n\}$.

ii) n *conjuntos de estrategias* $S_i, i \in \{1, ..., n\}$ *uno para cada jugador.*

iii) n *funciones de retorno* M_i*, una para cada jugador, cuyo valor depende de las estrategias elegidas por cada uno de los jugadores.*

iv) Cada jugador elige una sola vez. Todos eligen simultáneamente y por lo tanto, sin el conocimiento de la elección hecha por los otros. En este sentido, los juegos en forma normal son estáticos.

Como en el caso de juegos en forma extensiva, cada jugador será racional, en el sentido de que actuará siempre intentando maximizar su función de utilidad, pero sin tener un control total de la situación, por lo que sumejor estrategia dependerá de la elegida por los demás.

Los juegos con dos personas, pueden verse como un caso particular de juego de n personas. No obstante tienen su propio lugar en la teoría por cuanto muchas situaciones que envuelven intereses en conflicto, están protagonizadas por dos personas, o dos grupos de personas con intereses antagónicos, aunque elstos interesesm puedan ser comunes en el interior de cada grupo.

Un caso particularmente simple, pero paradigmático es el de los juegos de dos personas de suma cero, o suma constante. Estos juegos fueron aplicados para analizar conflictos militares posibles de estallar entre dos potencias. Ciertamente s bien el representante de cada potencia podría ser el presidente de cada una ellas, representa el interés común, de los habitantes de cada paías

Pero la importancia de este tipo de juegos, puede entenderse a traves del siguiente teorema. En 1944 John von Neumann y Oskar Morgenstern probaron el siguiente teorema,

Teorema 1 ***(de VNM)*** *Cualquier juego de suma cero que involucre a n jugadores es de hecho una forma generalizada de un juego de suma cero para dos personas. Además, cualquier juego de suma no cero para n jugadores puede reducirse a un juego de suma cero para $n+1$ jugadores, donde el jugador $(n+1)$ representa la ganancia o pérdida total (puede pensarse en la banca de ciertos juegos).*

Esto sugiere que los juegos de suma cero para dos jugadores forman una parte importante de la teoría de juegos. No obstante obtener la solución de un juego de de suma no cero, con n jugadores, mediante la reducción propuesta por el teorema de VNM, es complicada y requiere analizar las posibles coalisiones entre los jugadores y los posibles beneficos a lograrse por los jugadores participantes en una coalición S contra la coalición complementaria.

4.1. Juegos de suma cero

Es importante destacar que la elegancia matemática de los juegos de dos personas con suma cero, ha hecho que muchos matemáticos ampliaran su interés por las aplicaciones de su teoría a las ciencias del comportamiento.

La expresión "suma cero" hace referencia al hecho que lo que uno de los jugadores recibe de beneficio el otro lo tiene de perjuicio, esto es la suma de las utilidades, al finalizar el juego es cero. Son evidentemente juegos no cooperativos, no existe posibilidades de colusión o cooperación.

Tales juegos son representados por matrices, representando las filas las “estrategias puras” del jugador I y las columnas las del jugador II. Los elementos de la matriz representan los posibles resultados obtenidos al elegir las correspondientes estrategias. Esto es el retorno a_{ij} es un elemento de la matriz, que representa lo que uno de los dos jugadores recibirá, (por ejemplo I) y el otro (II) pagará como resultado de haber elegido el jugador I la fila (estrategia) i y II la columna j de la matriz. El principal problema para estos juegos, es el de construir una teoría adecuada para la elección de las estrategias.

Ejemplo 6 ***(juego de dos personas y suma cero)***

El siguiente ejemplo simple, ilustra la situación: ***PAR o IMPAR*** *Los jugadores I y II simultáneamente eligen un número, uno o dos. I gana si la suma es impar, II gana si la suma es par. El perdedor está obligado a pagar al ganador una cifra igual a la suma de los números elegidos.*

	“uno″	*“dos″*
“uno″	-2	$+3$
“dos″	$+3$	-4

Fig.3. Juego de Suma Cero.

El retorno sumado es siempre cero, la matriz representa solamente el retorno para uno de los jugadores, siendo el opuesto el retorno correspondiente al otro jugador.

Suponga que usted es el jugador I y que el juego se juega muchas veces : ?‘qué estrategia utilizaría? Piénselo y lo comentamos más adelante.

Otros juegos que no son de suma cero, admiten en su forma normal una representación matricial, ejemplo de ello son los juegos bimatriciales.

4.2. Juegos bimatriciales

Consiedre el juego $\Gamma = \{\Phi_1, \Phi_2, R_1, R_2\}$ siendo $|\Phi_1| = m_1$ y $|\Phi_2| = m_2$.

En estos juegos los retornos asociados a cada par deestrategias puras, $(a, b) \in \Phi_1 \times \Phi_2$, se ubican en dos matrices: M_1 de m_1 filas por m_2 columnas, y M_2 de m_2 filas por m_1 columnas,

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m_1 1} & ... & a_{m_1 m_2} \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1m_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m_2 1} & ... & b_{m_2 m_1} \end{bmatrix}$$

Donde a_{ij} representa los retornos correspondientes al jugador 1 cuando el juega si $i-$ésima estrategia pura y el oponente la $j-$ésima estrategia pura. Análogamente b_{ji} epresenta los retornos correspondientes al jugador 2 cuando el juega si $j-$ésima estrategia pura y el oponente la $i-$ésima estrategia pura, $i \in \{1, ...m_1\},\ j \in \{1, ..., m_2\}$.

Resulta entonces que

$$R_1(s_1, s_2) = s_1 M_1 s_2, \;\; R_2(s_2, s_1) = s_2 M_2 s_1$$

donde cada s_i corresponde a un vector de estrategias del jugador $i \in \{1, 2\}$.

Escrito en una única (bi)-matriz los retornos pueden explicitarse en la siguiente forma:

	C_1	$\cdots$	C_{m_2}
F_1	$a_{11},\ b_{11}$	$\cdots$	$a_{1,m_2},\ b_{m_2 1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
F_{m_1}	$a_{m_1 1},\ b_{1m_1}$	$\cdots$	$a_{m_1 m_2},\ b_{m_2 m_1}$

Las columnas de la (bi)-matirz corresponden a las estrategias puras del jugador 1 y las columnas a las del jugador 2.

Como ejemplo de juego bimatricial considere el juego al que denominamos anteriormete, la batalla de los sexos y el dilema de prisionero. Entre los más conocidos, podemos considerar el juego denominado Halcón y Paloma, este consiste en lo siguiente:

Dos animales de una especie, de dos tipos posibles, H y P, luchan por un territorio de valor v medido en términos de posibilidades de vida o de progenie.

- Un animal de tipo H luchará por el territorio hasta el final
- Un animal de tipo P enfrentado a uno de tipo H se retirará sin lucha, enfrentado a otro de tipo P terminará por compartir el territorio.

Para este juego las estrategias puras serán:

$$\Phi_i = \{H, P\}\,,\ i = \{1, 2\}$$

y los retornos para cada jugador quedar representados por las matrices:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{v-c}{2} & v \\ 0 & \frac{v}{2} \end{bmatrix} = M_2$$

la útlima igualdad es resultado de que el juego es simétric.

La (bi)-matriz de retorno para este juego será:

	H	P
H	$\frac{1}{2}(v-c)$, $\frac{1}{2}(v-c)$	v , 0
P	0 , v	$\frac{1}{2}(v)$, $\frac{1}{2}(v)$

Analizaremos los detalles de este juego más adelante, pero queda claro que la mejor estratgia dependerá de los valores que se asignen a v y a c es decir el valor del territorio y el costo por conquistarlo. En el caso de poblaciones animales, un comportameinto u otro de un individui de una especie cualquiera, dependerá de l carga genética que tenga. Ciertamente no será una elección racional como en el caso humano. Discutiremos más adelantes esta característica de los juegos evolutivos

4.3. El modelo de Cournot

El conjunto de estrategias puras puede ser un continuo. Considere el siguiente ejemplo;

Ejemplo 7 ***(El duopolio)*** *Dos firmas compiten en un mercado para el cual producen un único e indistinguible producto.*

- *Si la firma 1 produce la cantidad y_1 y la firma 2, la cantidad y_2 el precio de mercado será*

$p(y_1 + y_2)$ el costo asocoiado a esta producción será $c_1(y_1)$ y $c_2(y_2)$.

- *Ambas firmas son maximizadoras de beneficios y tomarán la cantidad producida por la otra como un dato. Por lo que cada una elegirá la cantidad a producir resolviendo el problema de optimización:*

$$\max_{y_i} \Pi_i(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2)y_i - c_i(y_i),\ i = \{1, 2\}$$

- *Suponemos que cada firma puede en el intervalo $[0, Q_i],\ i = \{1, 2\}$.*
- Esto corresponde a un continuo de estrategias puras.
- *Asuma que la inversa de demanda es de la forma $p(y_T) = \max\{0, 60 - y_T\}$ siendo $y_T = y_1 + y_2$ y las de costos $c_1(y_1) = y_1^2$ y $c_2(y_2) = 15y_2 + y_2^2$, resuleva el problema de las firmas.*
- *Las cantidades (y_1^*, y_2^*) que resuelven el problema se denomia Equilibrio de Cournot.*

Llamaremos función de reacción, a la función que determina a elección que cada jugador (racional) hace, a partir de la estrategia del adversario. La representaremos por $r_i : [0, Q_j] \to R$ tal que $y_i = r_i(y_j)$. En este caso

$$\Pi_i(r_i(y_j), y_j) \geq \Pi_i(y_i, y_j), \forall y_i \in [0, Q_i].$$

Ejercicio 3 *1. Encuentre las curvas de reacción para el ejercicio anterior.*

2. Suponga que el jugador 1, comienza en y_1^0 entences el jugador 2,elegirá $y_2^1 = r_2(y_1^0)$, luego $y_1^1 = r_1(y_2^1) = r_1(r_2(y_1^0))$ continúe iterando este proceso y muestre que si $|\frac{dr_1}{dy_2}||\frac{dr_2}{dy_1}| < 1$ entonces el proceso anterior para el equilibrio de Cournot (y_1^*, y_2^*) verificándose además que $y_1^* = r_1(y_2^*),\ \ y_2^* = r_2(y_1^*)$,

Obsérvese que el equilibrio resulta de un proceso de aprendizaje, que resulta del conocimiento común. Asumiendo la racinalidad del oponente, elegir el equilibrio de Nash resulta una condición necesaria para la racionalidad asumida.

Ejercicio 4 *Para el caso anterior:*

1. *Encuentre la solución de monopolio que corresponde a la colusión.*

$$\max_{y_1,y_2} P(y_1+y_2)(y_1+y_2) - c_1(y_1) - c_2(y_2),\ s.a: y_i \in [0,Q_i] i = 1,2.$$

2. *Grafique las las curvas de isobeneficios, es decir aquellas en las que* $\pi_i(y_1, y_2) = c$ *siendo* c *una constatne positiva.*

3. *Indicar en el diagrama, en el que ubicará a* y_1 *en las abscisas e* y_2 *en las ordenadas, la dirección de crecimiento de los beneficios.*

4. *Ubique la producción de monopolio. Muestre que ésta mejora los beneficios de ambas firmas, pero se obtiene una cantidad total de producto menor que la que corresponde al equilibrio de Cournot.*

5. *Unique en el diagrama las curvas de reacción.*

6. *¿Por qué la solución de monopolio es inestable? Relacione su respuesta con el dilema del prisionero.*

Capítulo 5

Relación entre juegos en forma extendida y juegos en forma normal

Obsérvese que si listamos las estrategias puras de cada jugador particpando en un juego en forma extendida, y los retornos posibles para todas las combinaciones estratégicas, es posible representar el juego extensivo, o al menos los resultados posibles de ser obtenidos como un juego en forma normal.

Esa observación permite escribir la siguiente proposición.

Proposición 1 *A todo juego en forma extendida le corresponde un juego en forma normal, en el que imaginamos a los jugadores eligiendo simultáneamente estrategias a implementar. Sin embargo a todo juego en forma normal, le corresponde, en general, varias formas extendidas diferentes.*

La demostración es sencilla y queda para la reflexión del lector. Haremos a través de ejemplos una ilustración de la proposición.

Sugerencia: Liste las estrategias puras de cada jugador, cada una de ellas cooresponderá a un listado de acciones una en cada nodo correspondiente al jugador. Si es un juego de dos persona, ubique las del jugador 1 como filas y las del jugador 2 como columnas.

Ejemplo 8 *El siguiente juego en forma normal, presenta dos alternativas posibles para modelarlo como un juego en forma extendida, las que serán representadas en la figura.*

	b_1	b_2
a_1	$(1,1)$	$(1,1)$
a_2	$(-1,-1)$	$(2,0)$

Fig. 4. Representación Normal.

La pregunta que queda planteada es la siguiente: ¿Hasta qué punto, la forma normal contiene toda la información relevante para entender un juego?

El papel de la información La Fig. 6, representa el hecho que el jugador II, no conoce a su turno cual fue la jugada de su antecesor. En este caso el juego es equivalente a uno en el cual ambos jugadores eligen simultanea e independientemente.

Por otra parte veamos que si consideramos el juego anterior, pero suponiendo que a su turno el jugador II puede distinguir entre los dos nodos de su conjunto de información el juego tiene un significado diferente. Ver Fig. 7.

En tanto que un jugador elige sabiendo lo que hizo el otro es posible obtener resultados diferentes, es de destacar que no siempre más información significa mejores retornos.

Juegos de dos jugadores en los que uno juega primero y el otro actúa en función de este conocimiento, como el representado en la Fig. 6, son llamados juegos de Stackelberg.

Las empresas pueden caer en la competencia de Stackelberg si una tiene cierta clase de ventaja permitiendo que se mueva primero. Una vez que el líder ha realizado su jugada, no puede deshacerla. Esta situación podría llegar a darse si el líder es una de las empresas principales de la industria y el seguidor es un nuevo integrante del mercado.

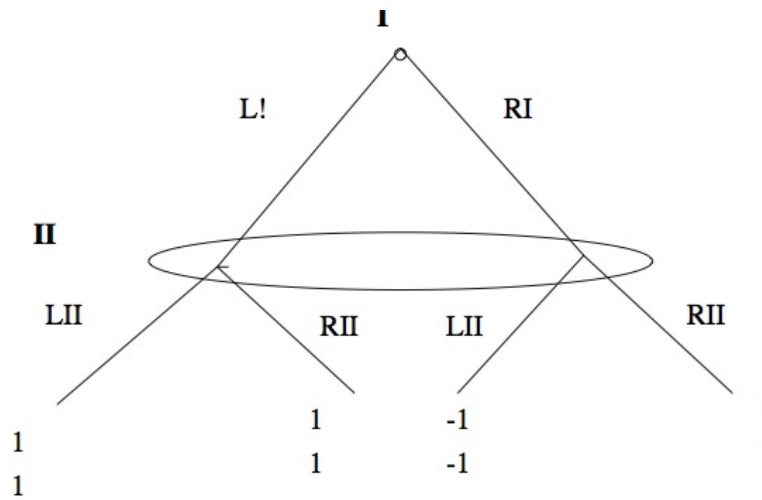
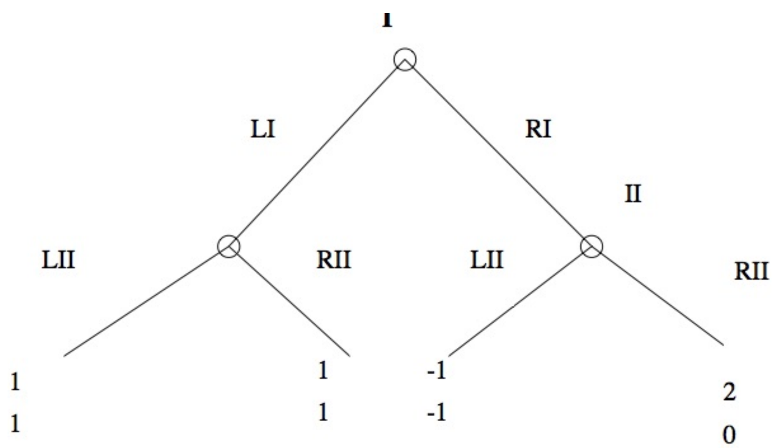


Fig.6. Otra de las posibles formas extendidas, correspondientes al juego, cuya forma normal aparece en Fig.4.



del representado en la Fig. 4. Este es un juego de Stackelberg.

El modelo de Stackelberg Como en el caso de Cournot, dos empresas deben decidir el nivel que deben producir de un determinado bien. Pero suponemos ahora que la firma 1, lleva ventajas sobre la firma 2, por tamaño, costos, posibilidades de acceso a los mercados, etc...por lo que puede actuar como lider. La firma 2 se acomoda a lo que la firma 1 hace.

Para cada cantidad del bien producida por la frma 1, la 2 elegirá como en el modelo de Cournto, es decir $y_2 = R(y_1)$. Atento a esto la firma 1, elegirá la cnatidad a producir, de forma tal de

$$\max_{y_1} \pi_1(y_1, R(y_1) = p(y_1 + R(y_2))y_1 - c_1(y_1).$$

Elegida y_1^* tal que resuelve este problema, la firma 2, elegirá $y_2^* = R(y_1^*)$.

Ejercicio 5 *Para le caso en ue* $p(y_t) = 60 - y_T,\ c_1(y_1)0y_1^2, c_2(y_2) = 15y_2 + y_2^2$

1. *Muestre que* $R(y_1) = \frac{45-y_1}{4}$.

2. *Muestre que* $y_1^* = 13.9\ y_2^* = 7.8$.

3. *Compare estos resutlados con los obtenidos en el caso de Cournot.*

En 1975, Selten [R. Selten (1975)] introduce el concepto de *agnet-strategic form*, denominando de eta forma a la representación normal de un juego extensivo, pero en el que un mismo jugador que actúa en dos conjuntos de infornación diferentes es considerado como un jugador diferente. Este concepto tiene interés cuando analizamos la posibilidad de que los jugadores cometan errores en la elección estratégica y que estos errores estén correlacionados.

Capítulo 6

Formalización y notación

En este apartado haremos una presentación formal de los juegos no ccoperativos, en sus dos formas, extensiva y estratégica, este puento de vista nos mostrará el la gran capacidad que tiene la teoría de juegos para modelar situaciones reales muy diversas y razonar en forma similar sobre ellas, a pesar de su diversidad. Con seguridad cada lector encantrará gran cantidad de ejemplos de la vida real que pueden ser representados por estos modelos y verá que es posible razonar en forma similar para entender su esencia y los posibles resultados

Introduciremos y haremos comentarios sobre la notación seguida en la teoría de juegos, enla que sin duda se basa su capacidad de abstracción y el desarrollo lógico formal, propio de eta teoría que permite entender por qué muchas situacines conflictivas se resuelven en la forma en que lo hacen.

A pesar de que presentaremos a los juegos en forma extensiva y normal seprados, el lector deberá tener presente que ambos enfoques están relacionados fuertemente, por lo que la notación utilizada para una forma es muchas veces válida tambi'en para la otra. Ambas formas, aunque con enfoque diferentes,tienen por objetivo ayudarnos a pensar y modelar situaciones conflictivas cuay solución depende de las acciones desarrolladas por todos los involucrados.

Comenzaremos con los juegos en forma extensiva.

6.1. Juegos en forma extensiva, nuevamente

Consideremos un juego de n jugadores, no cooperativo en forma extensiva. Cada jugador será indexado por $i \in \{1,...,n\}$. Este queda represenatado por un árbol donde los nodos, con excepción de los finales, corresponden a los momentos en que cada jugador (eventualmnete la naturaleza), debe elegir, y las ramas a las acciones posibles en cada momento. En los nodos finales $\mathcal{Z}$ se especifica los retornos correspondeientes a cada jugador, si el nodo es alcanzado.

Para definir el juego se requeire admás de algunas consideraciones sobre la estructura del árbol, muchas de las cuales hacen referencia a lainformación disponible por los jugadores en el momento de jugar. Cada nodo no terminal es adjudicado a un único jugador. Eventualmente podrán adjudicarse nodo a momentos en que la natrualeza particpa de manera aleatoria.Cada rama representa un estado posible futuro, al que en el presente se le adjudica una proabilidad.

Sea $\mathcal{H}$ una partición del conjunto de los nodos no terminales de un árbol. Representamos por $\mathcal{H}_i,\ i \in \{1,...,n\}$ a los elementos de esta partición.

1. $\mathcal{H}_i$ corresponde a los nodos adjudicados al jugador $i \in \{1,...,n\}$
2. $\mathcal{H}_i \neq \emptyset, \forall\, i \in \{1,...,n\}$
3. $\mathcal{H} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i,\ \ \mathcal{H}_i \bigcap \mathcal{H}_j = \emptyset,\ \forall\ i \neq j.$

A su vez cada $\mathcal{H}_i$ es particionado en conjuntos de información $\mathcal{F}_{ij}$ de forma tal que

1. $\mathcal{F}_{ij} \neq \emptyset, \forall : i \in N$ y $j \in \{1,...,k_i\}$
2. $\mathcal{F}_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} \mathcal{F}_{ij},\ \ \mathcal{F}_{im} \bigcap \mathcal{F}_{il} = \emptyset,\ \forall m \neq l\ \forall\ i \in \{1,...,n\}.$

Cada comjunto de información puede estar compuesto por uno o más nodos. En este último caso el jugador no consigue distinguir en cual nodo precisamente se encuentra. Es decir si los nodos $n_1,....,n_k$ pertenences a un mismo conjunto de información, llamemosle $\mathcal{F}_{il}$, el jugador no consigue distinguir en que nodo se encuentra, aunque si reconoce que está en alguno de los nodos correspondientes a este conjunto de información. Las aciones posibles de ser elegidas, en cada uno de estos nodos, serán las mismas.

Cuando cada conjunto de información está compuestopor un único nodo, diremos que el juego es de **información perfecta.**

Además, si $A(n_h)$ representa la acción (o movida) que el jugador i haría en el caso en que el juego alcance el nodo $n_h \in \mathcal{F}_{il}$ entonces si $n_p \in \mathcal{F}_{il}$ debe verificarse que $A_i(n_h) = A_i(n_p)$. Es decir, la acción elegida por el jugador, es la misma en cada nodo de un mismo conjunto de inforaión, independientemente del nodo por el que el juego pase.

Consecuentemente, $A_i(\mathcal{F}_{ij})$ representará las acciones (o movidas) posibles de ser realizadas por el jugador i en cada conjunto de informaci'ón $\mathcal{F}_{i,j} \in \mathcal{F}_i$. Siendo $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{F}_{i1}...., \mathcal{F}_{ik_i}\}$.

Definición 7 *Una* ***estrategia pura*** *para i, es un mapa* $\phi_i : \mathcal{F}_i \rightarrow A(\mathcal{F}_i)$ *que verifica además que* $\phi(\mathcal{F}_{ij}) \in A(\mathcal{F}_{ij})$. *Donde* $A(\mathcal{F}_i)$ *es el conjunto de acciones posibles del jugador* $i-$*ésimo*

Cada estrategia determina un camino en el árbol, al final del cual se especificana los retornosobtenidos por cada jugador.

Definición 8 *Alternativamente, el conjuntos de las estrategias puras,* Φ_i, *es precisamente el conjunto de todos los mapas del tipo* ϕ_i. *Tal espacio puede escribirse como el producto cartesiano* $\mathcal{S}_i = \times_{j=1}^{k_i} A(\mathcal{F}_{ij})$.

Así por ejemplo, si al jugador i le corresponden 3 conjuntos de información, siendo que en el primero y el segundo sólo puede elegir dos acciones, ir a la izquierda (i) o a la derecha (d) y en el tercero tres, ir a la izquierda (i), al centro (m) o a la derecha (d). Entonces la lista (i, im) indica que en el primer nodo irá a la izquierda, en el segundo también y en el tercero elegirá ir al centro. Obśervese que en cada nodo de cada conjunto de información el jugador debe hacer la misma elección, independientemente de la cantidad de nodos que existan en el conjunto de información.

Definición 9 *Un* ***perfil estratégico*** *es una lista de mapas* $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ *donde* $\phi_i : \mathcal{F}_i \rightarrow A(\mathcal{F}_i)$ *es una estrategia pura para el jugador* $i \in \{1, ..., n\}$. *A cada perfil estratégico corresonde un camino en el árbol, que se inicia en el primer nodo y termina en un nodo final, en el que se listan los retornos para cada jugador.*

En definitiva un juego en forma extensiva de n jugadores queda representado por el conjunto:

$$\Gamma = \{K, N, \mathcal{F}, A, p, r\}$$

siendo:

- K un árbol, que especifica el orden de las movidas.
- N representa al conjunto de jugadores.
- $\mathcal{F}$ los conjuntos de información.
- $A(\mathcal{F}_{ij})$ las acciones posibles en cada conjunto de información.
- p la probabilidad de los estados de la naturaleza en los que se juega, no siempre se requeire. En general, en estas notas, para no complicar demasiado la notación no lo requeriremos. Si así fuere lo diremos explícitamente.
- $r(z)$ es un vector especifica en cada nodo final $z \in \mathcal{Z}$, los retornso de cada jugador si ese nodo es alcanzado.

Para el jugador I del ejemplo de la, Fig.1, es la estrategia que hará al jugador mover hacia la izquierda para uno de los estados de la naturaleza y hacia la derecha, si el estado que se realiza es el de mayor probabilidad. Análogamente puede entenderse $\{i, i, c\}$, para el jugador II. Luego el perfil estratégico será

$$P = ((i, d), (i, i, c)),$$

La cantidad de estrategias posibles, $\#\phi_i$, es igual al producto de las acciones posibles en cada conjunto de información. Es decir:

$$\#A_i(\mathcal{F}_i) = \#A_i(\mathcal{F}_{i1}) .... \#A_i(\mathcal{F}_{ik_i}).$$

Luego veremos que existen situaciones en las que para describirlas, es suficiente una cantidad bastante menor de estrategias, alcanza con las llamadas estrategias de comportamiento.

Definición 10 *El **retorno** que cada jugador recibirá al terminar el juego, queda definido una vez conocidos el estado de la naturaleza que se revela, (no siempre se requiere) y las estrategias aplicadas por los jugadores. Será representado por una aplicación* $\mathcal{R} : \Phi = \Phi_1 \times, \ldots, \Phi_n \to R^n$.

A cada perfil estratégico en estrategias puras, le corresponde un camino en el árbol, que se inicia en el primer nodo y termina en un nodo final, en el que se listan los retornos que recibirá cada jugador si se juega acorde con dicho perfil. El conjunto de nodos finales será indicado como Z.

- Una **estrategia mixta** para el jugador $i-$ ésimo, será una distribución de probabilidades sobre el conjunto de todas las estrategia puras posibles.
- Una **estrategia de comportamiento** para el jugador i, corresponde a un elemento del producto cartesiano, de probabilidades sobre las acciones posibles en cada conjunto de información,
- Analizaremos más adelante, las relaciones entre estas estrategias,

Decimos que un nodo x es posible para el perfil estratégico s de alcanzarlo siguiendo dicho perfil es positiva, es decir cunado $P(x/s) > 0$.

Obsérvese que a cada perfil en estrategias mixtas determina una distibición de probabilidad sobre los camisno posibles en el arbol, que se inician en la raiz y acaban en un nodo final. Equivalentemente determinan una distribución sobre el conjunto Z de nodos finales.

Podemos entonces dar la siguiente definición:

Definición 11 ***El retorno esperado de cada jugado asociado al perfi mixto*** s, *corresponde a*

$$R_i(s) = \sum_{z \in Z} r_i(z) P(z/z)$$

donde $r_i(z)$ *es el retorno correspondiente al jugador* i *cuando el nodo final* z *es alcanzado. En tanto que* $P(z/s)$ *corresponde a la probabilidad de que se alcance el nodo* z *dado que se está jugando la estrategia mixta* s.

6.2. Juegos en forma normal, nuevamente

Un o **en forma normal,** con n jugadores, será representado por:

$$\Gamma = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1, \ldots, R_n\},$$

siendo Φ_i el conjunto de estrategias puras para el jugador i, y R_i un mapa, donde $R_i : X_{i=1}^n \Phi_i \rightarrow R$.

$$m_i = |\Phi_i|, \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad m* = \Pi_{i=1}^n m_i. \tag{6.1}$$

Definición 12 *Una estrategia mixta s_i para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre Φ_i.*

Denotaremos por s_i^k la probabilidad de que el jugador i elija la estrategia pura k.

Denotaremos por S_i al conjunto de todas las estrategias mixtas de este jugador, es decir:

$$S_i = \left\{ s_i \in \mathcal{F}(\Phi_i, R^{m_i}) : \sum_{k=1}^{m_i} s_i^k = 1, s_i^k \geq 0 \; \forall \, k \in \Phi_i \right\}.$$

Por $\mathcal{F}(\Phi_i, R^{m_i})$, entendemos el conjunto de las funciones con dominio en Φ_i y recorrido en R^{m_i}.

Representaremos como $\Phi = \times_{i=1}^n \Phi_i$ y como $S = \times_{i=1}^n S_i$, respectivamente, al conjunto de combinaciones estratégicas puras y mixtas. Luego si $s \in S$ entonces $s = (s_1, ..., s_n) \in R^m$. La estrategia pura k, para el jugador i, quedará identificada por una estrategia mixta, en la que i, asigna probabilidad 1 a la acción k y cero a las restantes.

En un juego en forma normal, cada jugador hace su elección, en forma independiente de la de cada uno de los otros. Por lo tanto, la probabilidad $s(\phi)$ de que $\phi = (k_1, \ldots, k_n)$, ocurra si $s = (s_1, \ldots, s_n)$ es jugada queda dada por: $s(\phi) = \Pi_{i=1}^n s_i^{k_i}$.

Sea s un perfil estrtégico, observe que s es un vector de $R^m = R^{m_1} \times ... \times R^{m_n}$. Si s es jugada el retorno esperado para ese perfil estratégio será $R_i(s) = \sum_\phi s(\phi) R_i(\phi)$. Siendo ϕ un elemento genérico de Φ.

Utilizaremos la notación (k, s_{-i}) donde $s_{-i} = (s_1, ...s_{i-1}, s_{i+1}, ...s_n)$ para indicar que el jugador $i-$ésimo elige su estrategia k mientras que los demás juegan de acuerdo a s. $s_{-i} \in S_{-i} = X_{j \neq i} S_j$.

Definición 13 *Diremos que $\bar{s}_i \in S_i$ es una mejor respuesta de i contra s, si:*

$$R_i(\bar{s}_i, s_{-i}) = \max_{h \in S_i} R(h, s_{-i}). \tag{6.2}$$

Denotaremos por $B_i(s_{-i}) \subseteq \Phi_i$ al conjunto de **mejores respuestas en estrategias puras,** del jugador i, cuando los otros está siguiendo la estrategia s.

Es fácil ver que $\bar{s}_i$ es una mejor respuesta contra s si y sólo si se tiene que:

$$si\ R_i(k, s_{-i}) < R_i(l, s_{-i}),\ \text{entonces}\ s_i^k = 0, \forall k, l \in \Phi_i, \tag{6.3}$$

Lo que es equivalente a decir que el **soporte** de $\bar{s}$, $Sop(\bar{s})$ está incluido en $B_i(s)$. Siendo $Sop(s) =\in \Phi = \times_{i=0}^{n} \Phi_i :\ s(k) > 0\}$.

Es decir $\bar{s}_i$ es la mejor respuesta para i contra s, si y solamente si, $\bar{s}_i$ asigna probabilidad positiva solamente a las estrategias puras que son mejor respuesta para i contra s.

En resumen $\bar{s}_i$ es la mejor respuesta para i contra s, si y solamente si $sop(\bar{s}_i) \subseteq B_i(s)$

Definición 14 *Sean $s, \bar{s} \in S$ decimos que $\bar{s}$ es una mejor respuesta contra s si $\bar{s}_i$ es una mejor respuesta contra s para todo i. Denotaremos al conjunto de mejores respuestas puras contra s como $B(s)$, luego $B(s) = \times_{i=1}^{n} B_i(s)$.*

Definición 15 *Una combinación estratégica s, es un* ***equilibrio de Nash*** *para Γ si s, es una mejor réplica contra si misma .*

Proposición 2 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La combinación estratégica s es un equilbrio de Nash .*

2. *Ningún jugador tiene incentivos a desviarse unilateralmente dado lo que los demás están haciendo*

3. *$Sop(s) \subset B(s)$.*

En el caso particular en que una combinación estratégica s, satisfaga que $Sop(s) = B(s)$ decimos que s es un *equilibrio cuasi-estricto.*[1]

Denotaremos por $E(\Gamma)$ al conjunto de los equilibrios de Nash del juego Γ.

[1] No todo juego posee un equilibrio cuasi estricto. Además un equilibrio cuasi-estricto, puede ser muy poco "razonable". [E. Van Damme (1991)], pag. 24 y secc. 3.4.

Capítulo 7

Preferencias y funciones de utilidad en el conjunto de estrategias

Esta sección, está destinada a justificar lógicamente, la elección de estrategias de un jugador "racional," esto es, de un jugador que busca maximizar sus retornos, entendiendo por tales una evaluación de lo que recibirá una vez terminado el juego. Tal evaluación está hecha sobre la base de un ordenamiento que el jugador realiza en el conjunto de resultados posibles, que pueden ser, cestas de consumo, dinero, plataformas electorales, bienes de diverso tipo, etc..., este conjunto es llamado *conjunto de consumo o de alternativas*, el ordenamiento lo reprsentaremos por $\succeq$. En general, cuando este ordenamiento que cada indivduo introduce en su conjunto de alternativas, corresponde a un preorden completo, lo denominamos relación de preferencias.

Definición 16 *Sea$X$ un conjunto de alternativas, se denomina preferenecia o relación de preferencias en X a una relación binaria en X completa y transitiva.*

- Relación binaria B en X es cualquier subconjunto de $X \times X$.
- B se dice completa cuando dados dos elementos x, y en el conjunto de alternativas X se verifica que $(x, y) \in B$ o bien $(y, x) \in B$.
- B es transitiva si dados tres elementos $x, y, z \in X$ cada vez que (x, y) e $(y, z) \in B$ entonces $(x, z) \in B$.

En forma intuitiva podemos decir que cuando un individuo es capaz de comparar entre dos alternativas cualesquiera y elegir una de ellas como aquella que prefiere (pudiendo ser indiferente entre ambas) y esta elección es transitiva, introduce en el conjunto de alternativas un preoden completo al que denominamos relación de preferencias y representamos como $\succeq$.

Bajo determinados supuestos estas preferencias son representables por funciones con dominio en el conjunto de consumo o alternativas, y recorrido real, es decir funciones del tipo $u : X \rightarrow R$ para las que se verifica que $x, y \in X$ entonces $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$. Las denominamos utilidades o funciones de utilidad. Cada una de ellas reresenta un preorden completo.

Tales funciones no interesan tanto por el número que asignan a un determinado consumo o alternativa posible, sino por el orden que introducen en el conjunto de alternativas. Así si A y B son alternativas tales que B no es preferible a A, entonces el valor que la función de utilidad u asignará a B, será menor o igual que el que le asignará a A es decir, $u(A) \geq u(B)$.

Para concretar, asumiremos que cada individuo expresa preferencias sobre el conjunto de resultados posibles de un juego, a las que es posible representar mediante un oreden numérico, definido por una función de utilidad.

En tanto que los resultados que se alcanzan en un juego dependen de las estrategias de todos los jugadores, extenderemos las preferencias al conjunto de perfiles estratégicos. Pero esto no es tan sencillo, pues el resultado que un jugador puede alcanzar siguiendo una cierta estrategia, depende de los premios posibles de alcanzar y las probabilidades con las que estos premios se alcanzan. Pero estas las determina no sólo la estrategia que el jugador en cuestión elige, sino también de las estrategias que los demás están siguiendo.,

En tanto que una lotería se determina por los premios que ofrece y las probabilidades de obtenerlos, quedarár representada por un par (Z, p) siendo Z el conjunto de premios y p una distribución de probabilidades sobre Z. Es posible asimilar el concepto de estrategia al conscpto de lotería, pues cuando el jugador elige una estrategia, en definitiva está eligiendo una lotería.

Pensamos entonces al conjunto de perfiles estratégicos S, como un conjunto $\mathcal{L}$ de loteriías o variables aleatorias que toman valores en $\mathcal{Z}$. Si es posible expresar las preferencias sobre los premios que una lotería ofrece, mendiante utilidades, esto es con funciones reales con dominio en el conjunto de premios, podemos decir que el valor esperado de una lotería L queda definido por

$$E[L] = \sum_{z \in \mathcal{Z}} u(z)p(z),$$

Siendo $P : \mathcal{Z} \to R$ la probabilidad con la que en la lotería L se obtiene cada premio ofrecido. y $u : \mathcal{Z} \to R$ la utilidad del jugador en el conjunto de premios.

Cada perfil estratégico, puede pensarse como una lotería que, con probablidad definida permite alcanzar distintos premios.

El teorema de la utilidad esperada de Von Neumann Morgenstern (VNM) (véase sección (7.2)) asegura que, si un individuo tiene una preferencia, definida sobre un conjunto de loterías, (que cumpla ciertos axiomas) entonces esa preferencia puede ser representada por el valor esperado. Donde por valor esperado de la loteria L, entendemos $E(L) = \sum_{z \in Z} u(z)p(z)$. Siendo $u : Z \to R$ la utilidad que representa a las preferencias del individuo en el conjunto de alternativas o premios y $p : Z \to R$ es un probabilidad sobre Z. Luego, para todo par $L, L' \in \mathcal{L}$ se verifca $L \succeq L'$ si y solamente si $E(L) \geq E(L')$.

Definición 17 *Una relación de preferencias en el conjunto de loterías, es un preorden completo sobre un conjunto de loterías, es decir, es una relación binaria en $\mathcal{L}$ que es transitiva y completa.*

En el caso de la teoría de juegos lo que interesa es asignar preferencias sobre el conjunto de perfiles estratégicos. Siguiendo una estrategia determinda cada jugador puede obtener un resultado, cuyo valor depende de las estrategias seguidas por los restantes participantes y los retornos posibles. En este sentido, seguir una estrategia s_i cuando los demás jugadores están jugansdo s_{-i} es como comprar una lotería que con probabilidades definidas por el perfil s ofrece distintos premios. Así podemos asignar a cada estrategia un valor, valor esperado.

Por ejemplo, el valor esperado que para el jugador i tiene jugar su $k-$ésima estrategia pura, cuando todos los demas juegan $s_{-i} \in S_i$ viene dado por el valor esperado

$$R_i(k, s_{-i}) = \sum_{j_h \in \Phi_h, h \neq i \in \{1 \ldots n\}} r_k^{1^{j_1} 2^{j_2} \ldots n^{j_n}} s_1^{j^1} \ldots . s_n^{j^n}$$

Donde $\{1, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores Φ_h el conjunto de estrategias puraas del jugador h y $s_i^{j^i}$ la probabilidad con la que, el jugador h juega la estrategia pura $j^h \in \Phi_h$ y $r_k^{j^1 j^2 \ldots j^n}$ el premio obtenido cuando el jugador i juega su $k-$ésima estrategia pura y cada jugador $h \in \{1, ..., n\}$ la estrategia pura $j^h \in \Phi_h$.

En consecuencia definir preferencias sobre un conjunto de loterías, tiene gran importancia para la teoría de juegos. Para que una preferencia en $\mathcal{L}$ sea representable por una utilidad esperada, deben cumplirse algunos axiomas. El cumplimiento de tales axiomas ha sido muchas veces puesta en entredicho por la experiencia, no obstante ellos han pasado al cuerpo axiomático de la teoría de juegos.

Sin entrar en mayores consideraciones sobre estos axiomans, a los efectos de conocer algunas de las dificultadoes que se presentan, al considerar estos axiomas como válidos, considerems el siguiente ejemplo. Suponga que le ofrecen una lotería en la que puede ganar 100 pesos 1 vez en 80 veces, y cero en las restantes, o bien 1 peso en forma segura. El valor esperado de la lotería es $1,25$ y el del peso seguro, es 1 peso. Hay personas adversas al riesgo que preferirán el peso seguro, no obstante ser $u(L) > 1$. En la teoría de juegos preferiremos la lotería L a la L', es decir $L \succ L'$ si y solamente si $u(L) > u(L')$ y seremos indiferentes entre ambas, $L \sim L'$ si y solamente si $u(L) = u(L')$.

¿Cuánto está dispuesto a pagar por participar en una lotería, o en un juego que le ofrece beneficios positivos con cierta probabilidad? Una respuesta posible es, el valor esperado del beneficio.

7.1. La paradoja de San Peterbsurgo

En el siguiente ejemplo se presenta una paradoja, que como tal se mantuvo durante algún tiempo, hsta que fue resuelta por Daniel Bernoulli.

La formulación original de la paradoja aparece en una carta enviada por Nicolaus Bernoulli a Pierre de Montmort, fechada el 9 de septiembre de 1713. Después de esto Nicolaus estuvo aún un tiempo intentando encontrar la solución al problema que él mismo se había planteado, pero finalmente en 1715 optó por consultar a su primo Daniel, al que reconocía una capacidad matemática superior a la suya. Por aquel entonces Daniel Bernoulli se encontraba en San Petersburgo, atraído junto con otros grandes científicos y pensadores de la época por las magnificas condiciones de estancia y trabajo ofrecidas por Pedro el Grande para hacer de esa ciudad el mayor foco de conocimiento de toda Europa. Tras su primera respuesta, Daniel estuvo unos años reflexionando sobre el problema planteado, publicando su análisis y su propuesta de solucin en 1738 en las Actas de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, ciudad de donde proviene el nombre de la paradoja.

La formulació de la paradoja de San Petersburgo es la siguiente: el jugador tiene que pagar unacierta cantidad de dinero para participar en el juego. A continuación éste realiza lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga cruz por primera vez. Entonces se detiene el juego, se cuenta el nmero de lanzamientos que se han producido, y el jugador obtiene $2n$ monedas (euros por ejemplo). Si sale cruz la primera vez el jugador gana $2^1 = 2$ euros; si la cruz sale en el segundo lanzamiento gana $2^2 = 4$ euros; si sale en el tercero $2^3 = 8$ si en el cuarto $2^4 = 16, ...$ ¿Cuánto estaría el lector dispuesto a pagar para jugar a este juego? ¿cinco?, ¿diez?, ¿quince euros?... El valor esperado de este juego es

$$\sum_{k_1}^{\infty} p_k 2^k$$

donde $p_k = \frac{1}{2^k}$ corresponde a la probabilidad de que la primera cara ocurra en el lanzamiento $k-$ésimo. La teoría de la utilidad esperada propone que una persona debe participar en el juego, no importa cuánto tenga que pagar. Pero en realidad esto no ocurre así.

El aporte realizado por Bernoulli, al resolver esta paradoja, pasó desapercibido hasta que Von Neumann y Morgenstern, interesados por los juegos, la publican en su obra de 1947. Veamos cón Daniel Bernoulli la resolvió. La idea de Bernoulli, es que la utilidad marginal de la riqueza, disminuye cuando ésta aumenta. Propone que el incremento marginal de la utilidad correspondiente a un aumento marginal de la riqueza es inversaemente proporcional a la riqueza, es decir que $\frac{\Delta U}{\Delta Y} \sim \frac{b}{Y}$ tomando límites para $\Delta Y \to 0$ resulta: $\frac{dU}{dY} = \frac{b}{Y}$. Integrando obtenemos que $U(Y) = b\ln(Y) + C$ podemos suponer que la utilidad está definida sólo para valores de la riquza mayores que Y_s siendo $U(Y_s) = 0$ luego $C = -\ln(Y_s)$. Ahora la utilidad esperada del juego resulta:

$$E(J) = b\left[\frac{1}{2}\ln(Y_0 + 1) + \frac{1}{2^2}\ln(Y_0 + 2) + ...\right] - b\ln(Y_0)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\right]$$

o bien

$$E(J) = b\left[\frac{1}{2}\ln(Y_0+1) + \frac{1}{2^2}\ln(Y_0+2) + ...\right] - b\ln(Y_0)$$

La serie converge. Lo que supone ahora que tiene un valor esperado finito.

En la actualidad la teoría económica, considera que como adversos al riesgo aquellas personas cuyas funciones de utilidad tienen la propiedad de que su derivada es decreciente con respecto a la riquzas, propiedad que tiene el logaritmo, pero no es la única.

7.2. La utilidad esperada de von Neumann

Consideremos ahora loterías cuyos premios está definidos es un único conjunto finito ‡ Podemos asignar a los premios valores numéricos, correspondientes a los valores asigandos por las utilidades que representan las preferencias de cada individuo sobre el conjunto de premios. Así, si con probabilidad $p(z)$ la lotería ofrece el premio z, diremos que con probabilidad $p(z)$ ganamos $u(z)$ unidades monetarias por ejemplo, siendo u la utilidad definida en el conjunto de premios.

Proposición 3 ***(de la utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern)*** *Los siguientes tres axiomas de comportamiento son necesarios y suficientes para que una preferencia en un espacio de loterías $\mathcal{L}$, tenga una función de utilidad que la representa.*

(i) $\succeq$ es una relación binaria que es transitiva y completa.

(ii) Para todo $p, q, r, \in \mathcal{P}$ y $\alpha \in (0,1], p \succ q$ implica $\alpha p + (1-\alpha)r \succ \alpha q + (1-\alpha)r$

(iii) Para todo $p \succ q \succ r, \in \mathcal{P}$ entonces existe α y $\beta \in (0,1)$, tales que $\alpha p + (1-\alpha)r \succ q \succ \beta q + (1-\beta)r$.

Recuerde que $p \succ q$ significa que $p \succeq q$ pero no $q \succeq p$. Es decir, p es estrictaemnte preferida a q.

El axioma (ii) es conocido como el axioma de la independencia o de substitución, el axioma (iii), es llamado arquimediano. Para una discusión de los referidos axiomas, así como para la demostración de la proposición sugerimos [C. Huang and R. H. Litzemberger (1988)].

Sean L y L' dos loterías cuyos premios pertenences a un mismo conjunto Z, finito, entonces, bajo los supuestos indicados, se verifica también que

1. $L(\alpha) = \alpha L + (1-\alpha)L' \in \mathcal{L}, \ \forall \alpha \in [0,1]$, lo que sigue del hecho de ser convexo el conjunto de las distribuciones, pues si $L = (u(Z), p)$ y $L' = (u(Z), p')$ entonces $L(\alpha) = (u(Z), \alpha p + (1-\alpha)p') \in \mathcal{L})$. Intuitivamente esto significa que con probabilidad α jugaremos la lotería L y con probabilidad $(1-\alpha)$ la lotería L'.

2. La linealidad de la utilidad esperada,

$$U(\alpha L + \beta L') = \alpha U(L) + \beta U(L'), \forall \alpha, \beta.$$

   Se concluye entoces que el conjunto de estrategias mixtas es convexo.

Del item [1], se deduce que el conjunto de estrategias mixtas es convexo.

Como ya dijimos, una estrategia pura puede ser considerada como una estrategia mixta concentrada, es decir, que asigna probabilidad cero a toda estrategia pura diferente de la considerada. Luego si $A \ y \ B \in \Phi_i$ para todo $\alpha \in [0,1]$ $H(\alpha) = \alpha A + (1-\alpha)B$ representará una estrategia mixta s_i del jugador i, bajo la que, con probabilidad α juega la estrategia pura A y con proabilidad $(1-\alpha)$ la estrategia pura B.

En definitiva, asumiremos que las preferencias de un jugador sobre sus estrategias, pueden ser representadas por una función de utilidad esperada. Consecuentemnete, diremos que para un jugador el perfil estratégico s es al menos tan bueno cuanto el s', si el perfil s le ofrece un pago esperado no menor que el obtiene como resultado del perfil s', es decir, si $U(s) \geq U(s')$, siendo U la utilidad esperada sobre el conjunto de estrategias mixtas.

Ejemplo 9 *Considere el juego representado por la matriz*

	C_1	C_2
F_1	a_{11}, b_{11}	$a_{12}, b_{1,2}$
F_2	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}

Considere el perfil estratégico $s = (s_1^1, s_1^2; s_2^1, s_2^2)$ *entonces*

$$E_1(s) = s_1^1[s_2^1 a_{11} + s_2^2 a_{12}] + s_1^2[a_{21} s_1^2 + a_{22} s_2^2]$$

1. *Indique el valor esperado de este perfil para el jugador 2.*

2. *Considere* $a_{11} = 2, a_{12} = 0, a_{21} = 1, a_{22} = 0,5$ *y* $b_{11} = 1, b_{12} = 0, b_{21} = 1, b_{22} = 2$. *y los perfiles* $s = ((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (1, 0)),\ s' = ((0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. *Indique que perfil prefiere cada uno de los jugadores.*

En lo que sigue, el retorno obtenido por un jugador asociado a un perfil estartégico, $s = (s_i, s_{-i})$ aunque muchas veces es denotado por $R_i(s_i, s_{-i})$ corresponde al valor esperado, de VNM.

Capítulo 8

Dominación, equilibrios minmax y equilibrios de Nash

En esta sección mostraremos como el conocimiento común en muchos casos ayuda a resolver un juego y en especial a encontrar los equilibrios de Nash. Ciertamente, en general el conocimiento común de los resultados posibles de un juego, no es necesario ni suficiente para justificar al equilibrio de Nash. Pero en algunos casos basta con que los jugadores conozcan los retornos del juego para obtner una solución, este es el caso de los juegos que pueden resolverse, mediante un proceso iterativo de eliminación de estrategias estrictamente dominadas.

Otros juegos pueden ser resueltos a partir de estrategias min-max o max-min. Estas estrategias cobran pleno sentido cuando tratamos ocn juegos estrictamente competitivos, también llamados juegos de suma cero. Veremos que estos equilibrios son un caso particular de equilibrios de Nash.

Mediante estos conceptos nos iremos aproximando a una comprensión profunda del equilibrio de Nash, el que ciertamente como veremos, a pesar de sus aplicaciones posibles y de su justificación teórica no es la panacea para la teoría de juegos.

Debe tenerse en cuenta, que no existen en general mecanismos generales que permitanencontrar los equilibrios de Nash de un juego. Cada juego debe resolverse de manera particualr, analizando las distintas posibilidades. Este proceso en muy largo y tedioso, e involucra muchas operaciones, no obstante, en algunos casos reducido, por ejemplo si por algún motivo podemos eliminar estrategias que no se usarán o que son redundantes. Esto es lo que sucede cuando existen estrategias dominadas. En el caso de juegos extensivos es posible dsminuir el número de estrategias a considerar, si utilizamos las llamadas estrategias de comportamiento.

Introduciremos acontinuación el concepto de *dominación estratégica*.

8.1. Estrategias dominantes y dominadas

Asociando a cada estrategia un retorno posible, podemos suponer que cada jugador elige en un espacio de estrategias puras A_i. El jugador racional preferirá la estrategia que maximice su utilidad, esto es en un estado de la natrualeza θ, $a_i \succ a_j$ si y sólo si $R_i(a_i, \theta) > R_i(a_j, \theta)$. Ciertamente esta preferencia puede cambiar si cambian los estados de la naturaleza, en los que el juego se realiza, o bien de acuerdo a lo que los demás estén jugando.

Definición 18 *Sean A_i el conjunto de estrategias puras del jugador $i-$ésimo y sea $A = \times_{i=1}^{n} A_i$ Supongamos además que $a_h, a_k \in A_i$. Decimos que la estrategia a_h **domina estrictamente** a otra a_k si ante cualquier estado de la naturaleza o estrategia de sus oponentes, la utilidad asociada a la estrategia a_h para el jugador i es estrictamente mayor que la asociada a a_k.*

Más formalmente $a_h \in A_i$ domina estrictamente a $a_k \in A_i$ si y solamente si $R_i(a_h, b_{-i}) > R_i(a_k, b_{-i})$ para todo $b_{-i} \in A_{-i}$.

Equivalentemente, iremos que la estrategia $a_k \in A_i$ es estrictamente dominada por la estrategia $a_h \in A_i$.

Definición 19 *Decimos que una estrategia $a \in A_i$ es **estrictamente dominada**, si para toda acción de los demás, existe $a(b_{-i}) \in A_i$ tal que $R_i(a(b_{-i}), b_{-i}) > R_i(a, b_{-i})$.*

Más formalmnete $a \in A_i$ es estricamente dominada si

$$\forall\, b_{-i} \in A_{-i}\; \exists\, a(b_{-i}) \in A_i : R_i(a(b_{-i}), b_{-i}) > R_i(a, b_{-i}).$$

Es decir, el jugado $i-$ésimo siempre tiene algo mejor que hacer que jugar a.

Una estrategia estrictamente dominada jamás será jugada por un jugador racional.

Definición 20 *Una estrategia a_h* ***domina débilmente*** *a otra a_k si ante cualquier estado de la naturaleza o estrategia de sus oponentes, la utilidad asociada a la estrategia a_h para el jugador i no es menor que la asociada a a_k con desigualdad estricta en al menos un estado de la naturalesa*

Si por estados de la naturaleza consideramos, el estado definido por la elección estgratégica de los demás entonces más formalmente podemos decir que a_h domina débilmente a a_k si y solamente si $R_i(a_h, b_{-i}) \geq R_i(a_k, b_{-i})$ para todo $b_{-i} \in S_{-i}$ con desigualdad estricta en al menos un b_{-i}.

Diremos que la estrategia a_k es débilmente dominada por la estrategia a_h.

Definición 21 *Decimos que una estratgia $a \in A_i$ es* ***débilmente dominada****, si para toda acción de los demás, existe $a(b_{-i}) \in A_i$ tal que $R_i(a(b_{-i}), b_{-i}) \geq R_i(a, b_{-i})$ con desigualdad estricta en al menos un b_{-i}*

Más formalmente $a \in A_i$ es **débilmente dominada** si

$$\forall\, b_{-i} \in A_{-i}\; \exists\, a(b_{-i}) \in A_i : R_i(a(b_{-i}), b_{-i}) \geq R_i(a, b_{-i})$$

Como veremos, es posible que un jugador racional, bajo determinadas circunstancias use una estrategia débilmente dominada.

Si bien el concepto de dominancia lo introdujimos para estrategias puras, observe que si una estrategia mixta s_i del jugado $i-$ésimo, asigna probabilidades positivas a estrategias dominadas, fuerte o débilmente por una estrategia a_j, ella será también respectivamente, fuerte o débilmente dominada De la misma manera una estrategia mixtas que asigne probabilidades positivas solamente a esrategias que dominen a otra dada, también la dominará. fuerte o débilmente.

Pero observe que es posible que una estrategia mixta, combinación convexa de estrategias puras no dominadas, resulte ser dominada. El siguiente caso es un ejemplo de esta posibilidad.

Ejemplo 10

$\cdot$	L	R
U	$(1,3)$	$(-2,0)$
M	$(-2,0)$	$(1,2)$
D	(0.1)	$(0,1)$

La estrategia σ para el jugador 1 que consiste en jugar sus estrategias puras U y M con proabilidad $\frac{1}{2}$ tiene valor esperado igual a $-\frac{1}{2}$ independientemente de lo que el jugado 2 elija, Reuslta entonces ser σ dominada estrictamente por D aunque ni M ni U lo fueran.

Los concetos de estrategia dominada, dominante, etc... puede ser extendido a las extragias mixtas son cambiar nada.

Ejemplos de juegos con estrategias dominadas

Ejemplo 11 *Consideremos el siguiente juego en forma normal, ilustrado por el siguiente cuadro:*

	L	R
U	$(3,6)$	$(7,1)$
M	$(5,1)$	$(8,0)$
D	$(6,0)$	$(6,2)$

Fig.8. Estrategias Dominadas.

Dado que el jugador I, siempre puede elegir la estrategia M, la estrategia U no será elegida jamás, esto es M *domina* a U. A continuación se debe resolver el juego:

	L	R
M	$(5,1)$	$(8,0)$
D	$(6,0)$	$(6,2)$

Fig.9. Juego Reducido

Ejemplo 12 *El siguiente ejemplo muestra como Eliminando en forma iterada estrategias estrictamente dominadas, se obtiene un equilibrio de Nash, esto es un resultado en la que ninguno* *de los dos jugadores se arrepentirá de lo hecho.*

	L	R
U	$(3,6)$	$(7,1)$
M	$(5,1)$	$(8,2)$
D	$(6,0)$	$(6,2)$

Fig. 10. Dominación Iterada.

Para eI U sigue siendo una estrategia dominada, consciente de esta situación, II sabe que se jugará el juego:

	L	R
M	$(5,1)$	$(8,2)$
D	$(6,0)$	$(6,2)$

Fig. 11. Juego Reducido.

Obsérvese que es el conocimiento común, el que permite anticipar el resultado y dado que se considera a mabos jugadores como racionales.

Ahora, L resulta ser una estrategia dominada por R para II, el resultado de proceder de esta forma es que se jugará: (M, R).

Si bien es cierto que el resultado de un proceso de eleminación iterada de estrategias estrictamente dominadas, es independiente del orden en el que se porcede, y que no se pierden equilibrios de Nash, esto no sucede así en un porceso de eliminación de estrategia déblmente dominadas.

Un ejemplo clásico de un juego donde la eliminación de estrategias dominadas reduce la elección de cada jugador a una única posibilidad es el juego conocido como "dilema del prisionero". Una descripción detallada del mismo se encuentra en la sección 7 de estas notas, y en muchos manuales de teoría de juegos como [D. Fudemberg and J. Tirole (1991)], donde se le presta una detallada atención.

Ejemplo 13 *La solución de un juego por eliminación de estrategias dominadas, no es independiente del orden en el que se eliminan estrategias débilmente dominadas.*

	b_1	b_2
a_1	$(3,2)$	$(2,2)$
a_2	$(1,1)$	$(0,0)$
a_3	$(0,0)$	$(1,1)$

Fig. 12. La solución no es independiente del orden en que se eliminan estrategias débilmente dominadas.

i $a_1 \succ a_3$ por lo tanto a_3 es eliminada, luego $b_1 \succ b_2$, se obtienen los retornos $(3,2)$.

ii También es cierto que $a_1 \succ a_2$ por lo tanto a_2 es eliminada, luego $b_2 \succ b_1$, se obtienen los retornos $(2,2)$.

8.2. Equilibrios minmax (o maxmin) en juegos de suma cero

Para los juegos de suma cero, también llamados estrictamente competitivos, es posible encontrar equilibrios de Nash, considerando estrategias minmax. Recordamos que son juegos de suma cero aquellos en los que un jugador gana lo que el otro pierde. Es decir que, $u_1(a,b) = -u_2(a,b),\ \forall (a,b) \in A_1 \times A_2$, siendo A_1 el conjunto de estrategias puras del jugador 1 y A_2 el del jugador 2. El jugador I, puede elegir en $A_1 = \{F_1, F_2, ..., F_{m_1}\}$, y el jugador II en $A_2 = \{C_1, C_2, ..., C_{m_2}\}$.

Suponga que I elige i y II elige j el retorno para I será entonces el elemento a_{ij} de la matriz de pagos M cuyas entradas son precisamente los elementos $a_{ij}, i \in \{1,...,n\}, j \in \{1,...,m\}$, mientras que el correspondiente a II será $-a_{ij}$.

Los jugadores tiene intereses exactamente opuestos, de forma tal que cada el mejor resultado corresponiente a uno de ellos es el peor para el otro. Dada la racionalidad asumida, cada jugador buscará maximizar su retorno y el contrario minimizarlo.

Definición 22 *Sea* $\Gamma = \{A_i, u_i, i \in \{1,2\}\}$ *un juego estrictamente competitivo. Diremos que* $x^* \in A_1$ *es un* ***maximinimizador para el jugador 1*** *si*

$$\min_{y \in A_2} u_1(x^* y) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x,y) = -u_2(x,y)\ \forall\ x \in A_1.$$

*Análogamente que $y^* \in A_2$ es un **maximinimizador para el jugador 2** si*

$$\min_{x \in A_1} u_2(x, y^*) \geq \min_{x \in A_1} u_2(x.y), \forall\, y \in A_2.$$

En otras palabras, un maxminimizador para ejugador 1, es una acción que maximiza el retorno que el jugador 1, puede alcanzar por sí mismo, un maxminimizador para el jugador 1, resuelve el problema

$$\max_{x \in A_i} \min_{y \in A_2} u_1(x, y),$$

y para el jugador 2, resuleve el problema

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y),$$

Ejemplo 14 *Para facilitar la comprensión considere el siguiente juego de suma cero de dos jugadores, siendo $n = m = 2$ y la matriz:*

	C_1	C_2
F_1	0	$\frac{1}{2}$
F_2	$\frac{1}{2}$	1

Fig. 13.

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = a_{2,1} = \frac{1}{2}$$

En esta situación el jugador I elige de forma de maximizar su retorno tomando como dato que su oponente hace la elección que lo minimice. A su vez el jugador II hace su elección de forma de minimizar el retorno de I, teniendo en cuenta que I hace su elección de modo de maximizarlo.

El jugador I, buscará aquella estrategia que maximice su retorno, sabiendoque el jugador II, elegirá la suya propia de modo de minimizarlo.

Considere la matriz de retornos del jugaor 1, definida por $M_1 = \{a_{ij}\}; i \in F = \{1, ..., m_1\}$ $j \in C = \{1, ..., m_2)$ En el caso en que se de la igualdad

$$\min_{j \in C} \max_{i \in F} a(i, j) = \max_{i \in F} \min_{j \in C} a_j) = a_{i^*, j^*} = v \tag{8.1}$$

tenemos una solución de equilibrio (llamado **equilibrio maxmin**), el que, como veremos corresponde a un equilibrio de Nash. Llamamos a v el **valor del juego** y corresponde a lo que ganará el jugador 1, y $-v$ lo que ganará el jugador 2, en el caso de jugarse el equilibrio de Nash.

Como puede verse facilemente la igualdad (8.1) no siempre se cumple. Para ver esto considere el juejo de suma cero definido por la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

No obstante siempre es cierto que

$$\bar{v} = \min_{j \in C} \max_{i \in F} a_{ij} \geq \max_{i \in F} \min_{j \in C} a_{ij} = \underline{v}.$$

El teorema de existencia de la solución minmax de VNM de 1944, afirma que si consideramos estrategias mixtas, siempre existe (x^*, y^*) tal que

$$\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} u_1(x, y) = u_1(x^*, y^*) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} u_1(x, y) = \underline{v}.$$

Donde consideramos a $X = S_1$ y $Y = S_2$ los correspondientes conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores 1, y 2. Observe que S_1 y S_2 son subconjuntos convexos, y compactos de R^{m_1} y R^{m_2} respectivamente. Además $u_1 : X \times Y \to R$ queda definida como

$$u_1(x, y) = xMy^t = -u_2(x, y) \; \forall x \in S_1, y \in S_2$$

siendo M la matriz del juego.

Demostraremos el teorema de la existencia de solución minmax en estrategias mixtas más adelante, 8.4. s Si bien la solución minmax, es como veremos a continuación, un caso particular de equilibrio de Nash, es históricamente de gran valor para el desarrollo posterior de la teoría de juegos, lo que justifica conocer su demostración.

El siguiente lema es un paso previo para demostrar que la solución minmax es un equilibrio de Nash.

Lema 1 *Sea* Γ *un juegos estrictamente competitivo, entonces:*

$$\max_{y\in S_2}\min_{x\in S_1} u_2(x,y) = -\min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} u_1(x,y).$$

Más aún $y \in S_2$ *resuelve* $\max_{y\in S_2}\min_{x\in S_1} u_2(x,y)$ *si y solo si resuelve*

$$\min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} u_2(x,y).$$

Demostrción: Para cualquier función f se verifica que :

$$-\min_{z}(f(z)) = \max_{z}(-f(z)) \ \ y,$$

$$argmin_z(f(z)) = argmax_z(-f(z)).$$

Se sigue, que para todo $y \in S_2$,

$$-\min_{x\in S_1} u_2(x,y) = \max_{x\in S_1}(-u_2(x,y)) = \max_{x\in S_1}(u_1(x,y))$$

Luego, $\max_{y\in S_2}\left[\min_{x\in S_1} u_2(x,y)\right] = -\min_{y\in S_2}\left[-\min_{x\in S_1} u_2(x,y)\right] =$

$$= -\min_{y\in S_2}\left[\max_{x\in S_1} -(u_2(x,y))\right] = -\min_{y\in S_2}\left[\max_{x\in S_1} u_1(x,y)\right].[]$$

El siguiente resultado da la conección entre el equilibrio de Nash de un juego de suma cero y los maxminimizadores.

Teorema 2 *Sea* Γ *un juego estrictaemnte competitivo, entonces:*

1. *Si* (x^*, y^*) *es un equilibrio de Nash* Γ, *resulta ser* x^* *un maxminimizador para el jugador 1, y* y^* *un maxminimizador para el jugador 2.*

2. *Si* (x^*, y^*) *es un equilibrio de Nash del juego* Γ *entonces*

$$\max_{x}\min_{y} u_1(x,y) = \min_{y}\max_{x} u_1(x,y) = u(x^*, y^*),$$

luego todo equilibrio de Nash de Γ *da los mismos retornos.*

3. Si $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$ *(en particular si* Γ *tiene un eqilibrio de Nash),* x^* *es un maxminimizador para 1, y* y^* *lo es para eljugador 2, finalmente* (x^*, y^*) *es un equilibrios de Nash para el juego* Γ.

Demostración: (1.) and (2.). Sea (x^*, y^*) un equilibrio de Nash para Γ.

- Entonces $u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, y)$ para todo $y \in S_2$. Luego $u_1(x^*, y^*) \leq u_1(x^*, y)$, para todo $y \in A_2$ por lo que $u_1(x^*, y^*) = min_y u_1(x^*, y) \leq \max_x \min_y u_1(x,y)$.

- Análogamente $u_1(x^*, y^*) \geq u_1(x, y^*)$ para todo $x \in S_1$. Se sigue que $u_1(x^*, y^*) \geq \min_y u_1(x,y)$ para todo $x \in S_1$. Se concluye que , $u_1(x^*, y^*) \geq \max_x \min_y u_1(x,y)$.

  Un argumento análogo para el jugador 2, estableces que y^* es un maxminimizador para el jugador 2, y que $u_2(x^*, y^*) = \max_y \min_x u_2(x,y)$, luego $u_1(x^*, y^*) = \min_y \max_x u_1(x,y)$.

Demostración (3.) Sea $v^* = \max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$. Por el lema previo:$-v^* = \max_y \min_x u_2(x,y)$.

- Dado que x^* es un maxminimizador para 1, $u_1(x^*, y) \geq v^*$ para todo $y \in A_2$.

- Siendo y^* un maxminimizador para el jugador 2, $u_2(x, y^*) \geq -v^*$ para todo $x \in S_1$.

- Considerando $x = x^*$ e $y = y^*$ A partir de la igualdad $u_2 = -u_1$ obtenenmos que $u_1(x, y^*) \leq v^*$. Dado que

- $u_1(x^*, y^*) = v^*$ concluimos que (x^*, y^*) es un equilibrio de Nash.

Ejemplo 15

i/j	1	2
1	0	1
2	1	0

Fig. 14.

$$\min_j \max_i a_{ij} = 1 \quad \max_i \min_j a_{ij} = 0$$

El cumplimiento de la igualdad

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}$$

en un juego de suma cero, es equivalente a la existencia del equilibrio maxmin para el juego en estrategias puras. En este ejmplo la igualdad no se verifica. No obstante el teorema de existencia de VNM que serẹmostrado más adelante, nos asegura la existencia de un equilibio en estrategias mixtas.

Consideraremos a continuación algunos ejemplos que nos ilustran acerca de cómo encontrar estrategias mixtas minmax.

8.3. Resolución de equilibrios con estrategias mixtas para juegos de suma cero

Consideremos el caso par impar, ejemplo (6). En primer lugar puede verse que no existe equilibrio en estrategias puras.

El jugador I puede ponerse en una situación que le garantice un cierto valor mínimo. Asegurarse de obtener este mínimo equivale a que su estrategia le permita obtenerlo independientemente de lo que haga II. Así, si $s_1 = \{p, (1-p)\}$, siendo p la probabilidad de elegir la fila 1, es tal que: $-2p + 3(1-p) = 3p - 4(1-p)$ resulta $p = \frac{7}{12}$ y el retorno esperado será: $E(r) = \frac{1}{12}$. El jugador II jugará analogamente, eligiendo $s_2 = \{q, (1-q)\}$ de forma de ser independiente de lo que haga I, obtendrá el mismo retorno.

Veamos como pueden hallarse soluciones en casos sencillos, usando métodos geométricos. En casos generales la solución se obtiene con métodos de programación lineal.

Ejemplo 16 ***Resolución Geométrica (caso de suma cero).***

El siguiente método gráfico que presentaremos para resolver un caso simple, de un juego de dos personas con suma cero, pierde eficiencia cuando aparecen dimensiones mayores. En este caso hay que recurrir a métodos mas complicados de cálculo, dando lugar a posibilidades amplias de aplicación de métodos de la programación lineal.

Consideremos el juego representado por la siguiente matriz 2×4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

El conjunto de estrategias puras para I, está dado por las filas de la matriz y las del jugador II, por las columnas.

Si el jugador I adopta la estrategia mixta $p = (p_1, p_2)$. p es una distribución de probabilidad sobre el espacio de filas elegida por I, siendo p_i la probabilidad de elegir la fila $i = \{1, 2\}$. Suponiendo que II, elija la primera columna, entonces el retorno esperado será:

$$E_{1p} = 2p_1 + 4p_2.$$

Análogamente si II elige la segunda, tercera o cuarta columna como estrategia pura:

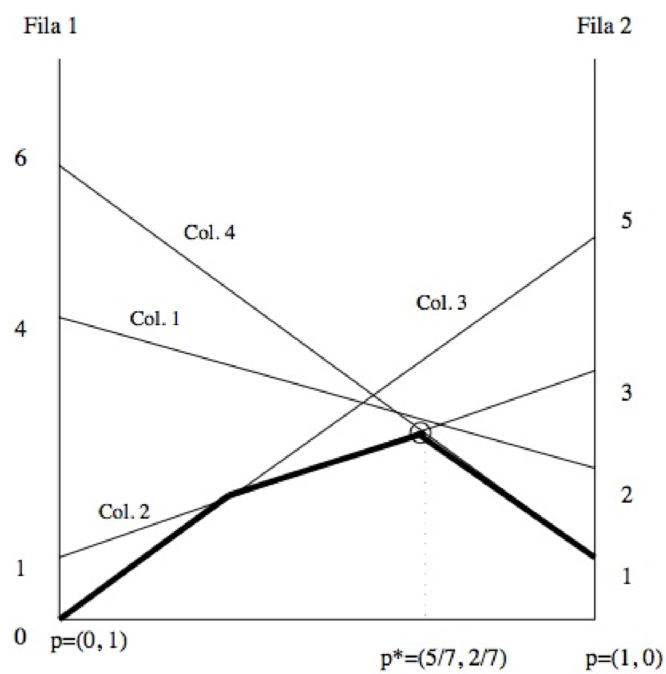
$$E_{2p} = 3p_1 + p_2.$$

$$E_{3p} = 5p_1.$$

$$E_{4p} = p_1 + 6p_2,$$

respectivamente. Siendo p una probabilidad tenemos que $p_1 + p_2 = 1$.

La figura siguiente muestra las gráficas correspondientes a las distintas funciones.



El eje vertical a la derecha corresponde a la elección de la estrategia $p = (0, 1)$ por parte de I, esto es el jugador uno elige la fila 1. Mientras que el eje a la izquierda representa la estrategia mixta $(1, 0)$, esto es la elección de la fila 2. El eje horizontal representa los posibles valores de p_1, $0 \leq p_1 \leq 1$.

Interpretación del diagrama:

Cualquiera sea la elección de p, el jugador I no estará peor que lo indicado por la línea remarcada, la llamada "envolvente inferior". Dicha función es $f(p) = \text{mín}\{E_{jp} : j = 1, 2, 3, 4.\}$. El jugador I, elegirá aquella estrategia mixta, p^* de forma de maximizar $f(p)$. Tal p está dado por el corte de E_{2p} con E_{4p}.

En aras de resolver completamente el juego, consideramos ahora la submatriz definida por las columnas 2 y 4:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Resolviendo análogamente para II, quien elegirá una distribución de probabilidades $q = \{q_1, q_2\}$ sobre las columnas de la submatriz, suponiendo que I elegirá en estrategias puras, una u otra fila, obtendremos las ecuaciones suficientes para hallar una envolvente superior $g(q_1)$, II elegirá aquella estrategia tal que, q_1 sea un mínimo de dicha función.

De esta forma obtendremos las siguientes estrategias de equilibrio: $p^* = (5/7, 2/7)$; $q^* = (0, 5/7, 0, 2/7)$; el valor de juego, esto es el retorno esperado para I será $v = 17/7$.

Ejercicio 6 *Encuentre a solución minmax en estrategias mixtas para el caso del ejemplo (15)*

8.4. Existencia del minmax para juegos de dos personas de suma cero

El siguiente teorema,fue demostrado en [O. Morgenstern, J. von Neumann(47)] y prueba que para juegos de suma cero, siempre existe una solución minmax en estrategias mixtas.

Sea $\Gamma = \{\Phi_1, \Phi_2, u_1, u_2\}$ un juego de dos personas de suma cero. donde Φ_1 y Phi_2 conjuntos finitos de estrategis puras. Las distribuciones de probabilidad sobre estos conjuntos son vectores tales que $p \in R^{m_1}$ y $q \in R^{m_2}$ y serán considerados vectores escritos como culumnas, siendo

$m_1 = |\Phi_1$ y $m_2 = |\Phi_2|$. Sean Q_1 y Q_2 los conjuntos de distribuciones de probabilidad sobre Φ_1 y Φ_2 respectivamente.

Teorema 3 ***(De existencia del equilibrio minmax)*** *Para toda matriz A, siempre existe un equilibrio minmax en estrategias mixtas, esto es existen p y q distribuciones de probabilidad, sobre el conjunto de estrategias puras, tales que:*

$$\max_{p \in P} \min_{q \in Q} p^{tr} Aq = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} p^{tr} Aq.$$

Este teorema fue conjeturado por [E. Borel, (1921)] quien lo verificó en casos particulares, pero la primera prueba aparece en [J. Von Neumann (1928)].

Demostración: Es inmediato verificar que la siguiente desigualdad se cumple siempre:

$$\underline{v} = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} p^{tr} Aq \leq \min_{q \in Q} \max_{p \in P} p^{tr} Aq = \bar{v}.$$

Para verificar la dsigualdad opuesta consideremos

$$\mathcal{M} = \{m \in R^m, m_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j,\ \sum_{j=1} q_j = 1,\ q_j \geq 0\},$$

que es convexo y compacto.

Es obvio que: $\min_{q \in Q} \max_{p \in P} p^{tr} Aq = \min_{m \in \mathcal{M}} \max_{p \in P} p^{tr} m = v_2$. Sea ahora

$$\mathcal{M}(v_2) = \{t \in R^m, t_i < v_2, i = 1, \ldots, m\}.$$

Se puede afirmar que: $\mathcal{M}(v_2) \cap \mathcal{M} = \emptyset$.

La demostración de esta afirmación la haremos por el absurdo. Supongamos que existe $z \in \mathcal{M}(v_2) \cap \mathcal{M}$.

Es inmediato ver que para todo $z \in R^m$ se verifica que:

$$\max_i z_i \geq xz, \forall x : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Como $z \in \mathcal{M}$ resulta que existe $q \in Q$ tal que

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j.$$

Se sigue que:

$$\min_{q\in Q} \max_{p\in P} p^{tr} Aq \leq \max_{p\in P} p^{tr} z \leq \max_{i} z_i.$$

Luego, como $z \in \mathcal{M}(v_2)$ se comple que

$$\min_{q\in Q} \max_{p\in P} p^{tr} Aq \leq \max_{p\in P} p^{tr} z \leq \max_{i} z_i < v_2 = \min_{q\in Q} \max_{p\in P} p^{tr} Aq,$$

lo que es una contradicción.

Entonces a partir del teorema de separación de convexos, podemos concluir con que existe $\bar{p}$ no nulo tal que

$$\bar{p}z \leq v_2 \; \forall \; z \in \mathcal{M}(v_2), \; y \; \bar{p}z \geq v_2 \forall z \in \mathcal{M}.$$

Luego si $\bar{p}$ es no negativo, obtendremos:

$$\underline{v} = \max_{p\in P} \min_{q\in Q} p^{tr} Aq \geq \min_{z\in\mathcal{M}} \bar{p}z \geq \bar{v}$$

con lo que se completaría la prueba.

Para probar que $p \geq 0$, suponga que tuviera una coordenada negativa, por ejemplo la i-ésima. Entonces, sea $\bar{z} \in \mathcal{M}(v_2)$, consideremos $z^n \in \mathcal{M}(v_2)$ definido por:

$$z^n_= \begin{cases} \bar{z}_j & j \neq i \\ \bar{z}_i - n & j = i \end{cases}$$

Así, $pz^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, lo que contradice que $pz \leq pz^n \; \forall z \; \in \mathcal{M}$ y $\bar{\bar{z}} \in \mathcal{M}(v_2)$.[]

Demostraremos a continuacion que (x^*, y^*) es una solución minmax si y solo si es un punto silla para $u_1(x, y)$.

Definición 23 *Decimos que* (x^*, y^*) *es un* ***punto silla*** *de una función* $f : X \times Y \to R$ *si se verifica que*

$$sup_{x\in X} f(x, y^*) = f(x^*, y^*) = inf_{y\in Y} f(x^*, y), \; \forall \, x, y \in X \times Y.$$

Siendo X e Y compactos y la función continua, el supremos y el ínfimo pueden cambiarse por máximo y mínimo.

Teorema 4 *Sea* Γ *un juego de suma cero de dos jugadores y sea* $u_1(x,y)$ *en* $X \times Y$, *el producto cartesianos de los conjuntos de strategias mixtas, entonces* (x^*, y^*) *es un punto silla de* u_1 *si y solamente si:*

$$\max_{s \in X} \min_{y \in Y} u_1(x,y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} u_1(x,y)$$

Demostración: Sea (x^*, y^*) un punto silla de u_1. Se verifica que

$$\bar{v} \leq \max_{x \in X} u_1(x, y^*) = u_1(x^*, y^*) = \inf_{y \in Y} u_1(x^*, y) \leq \underline{v}$$

pero como siempre se verifica que $\bar{v} \geq \underline{v}$ se sigue que $\bar{v} = \underline{v}$.

Supongamos ahora que $\bar{v} = \underline{v}$. Se tines que

$$u_1(x, y^*) \leq \max_{x \in X} u_1(x, y^*) = \bar{v} = \underline{v} = \min_{y \in Y} u_1(x^*, y) \leq u_1(x^*, y^*).[]$$

Capítulo 9

Juegos de múltiples etapas con acciones observadas

Son juegos con múltiples etapas aquellos en que los diferentes jugadores deben elegir una movida en más de una ocasión temporalmente diferente. En forma más precisa, podemos decir que se trata de juegos donde:

i) En cada etapa k, todos los jugadores conocen las acciones elegidas en toda etapa previa $0, 1, \ldots, k-1$.

ii) Todos los jugadores mueven "simultaneamente" en cada etapa k. Esto es en el momento k ningún agente conoce lo que hace el otro.

- **Observación:** No están excluídos los juegos en los que los individuos mueven alternándose, puesto que se permite la "acción" no hacer nada.

  Por ejemplo, en el juego de Stackelberg, conocido como "seguir al líder", en el primer momento el líder elige una determinada acción, por ejemplo un cierto nivel de producción y el rival no hace nada. En la segunda etapa, el seguidor, elige una acción, conociendo la elección previa del líder, y este no hace nada.

iii) Las etapas tienden usualmente a asimilarse a períodos de tiempo, pero en la teoría una etapa no tiene porque tener una interpretación temporal.

Para la resolución de juegos multietapas es posible condicionar la acción futura al pasado. Los jugadores juegan en forma secuencial distintos juegos. El asunto está en que os resultados pueden ser diferntes si los jugadores actúan en cada juego como is estos fueran indepenedientes, o bien lo consideran un único juego global. Por ejemplo, supongamos que dos jugadores deben jugar en una primera etapa el juego del prisionero:

	M	F
M	$4,4$	$-1,5$
F	$5,-1$	$1,1$

Luego de este juego los jugadores deben enfrentarse en el siguiente juego,

	L	G
L	$0,0$	$-4,-1$
G	$-1,-4$	$-3,-3$

El primero tiene un único equilbrio de Nash, ambos jugadores juegan F. Para el segundo nos encontramos ocn tres equilibrios de Nash:

$$(L,L),\ (G,G),\ ((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$$

La pregunta natural es, ¿deberán los jugadores ver este juego como un único gran juego o como dos juegos asilados? En el primer caso, es poisble pensar en que los jugadores pueden condicionar la elección del segundo a lo que el oponente haya realizado en el pasado. Si así fuera, es posible. la existencia de equilibrios de Nash que puedan evitar el resultado (F,F). Nuevamente los jugadores apelarán a la racionalidad, o al cnsocimeito común para obtener sin ccoperaci"on explícita, un resultado cooperativo.

Es posible generalizar a partir de este sencillo ejemplo, un juego multi-etapa como una sucesión finita de la juegos-etapa, siendo cada una de ellas un juego de información completa pero imperfecta (un juego de movimiento simultáneo). En cada etapa los jugadores juegan de manera simultánea, es deicr sin saber lo que los demás están haciendo. Esto sólo se descubre al final de la etapa.

Estos juegos se juegan de forma secuencial por los mismos jugadores, y los pagos totales de la secuencia de los juegos serán evaluados mediante el secuencia de los resultados en los juegos. Los jugadores pueden crear nexos entre las etapas de forma tal de obtener un resultado mejor que si los consideran en forma independiente, como por ejemplo, si en el dilema del prisionero jueggas M en lugar de F entonces yo jugare de forma de beneficiarte en el segundo período,etc... Resultan así **estrategias condicionales**.

Las estrategias condicionales son muchas por ejemplo para el caso conisderado tendremos:

$$s_i = (s_i^1, s_i^{MM}, s_i^{FF} s_i^{MF}, s_i^{FM})$$

donde s_i^1 representa lo que el jugador i hará en el primer juego, y s_i^{ab} representa lo que el jugador i hará en la segunda etapa, condicionado a que el jugador i haya jugado a en la primera etapa y el jugador $j \neq i$ haya jugado b.

En el caso de considerar el juego multi-etapas como un juego único y jugar estrategias condicionadas, podemos obtener equilibrios de Nash difiernetes de aquellos que implican jugar el equilibrio de Nash de cada etapa. Si consideramos cda juego en forma independiente, el resultado será jugar M en la primera etapam y luego uno de los tres equilbrios posibles, por ejemplo:

$$s_i = (s_i^1, s_i^{MM}, s_i^{FF} s_i^{MF}, s_i^{FM}) = (F, G, G, G, G) \ \forall \ i \in 1, 2.$$

En el caso consiiderado, dado que hay más de un equilibrio en la segunda etapa, podemos condicionar jugar unos de ellos a lo realizado previamente. Por ejemplo es un equilbrio de Nash, perfecto en subjuegos (este concepto será anlizado más adelante) el siguente:

1. jugar M en la primera etapa.
2. Jugar L en la segunda si (M, M) se jugó.
3. Jugar G si algo distinto a (M, M) ocurrió en la priemra etapa.
4. Es decir:

$$s_i = (s_i^1, s_i^{MM}, s_i^{FF} s_i^{MF}, s_i^{FM}) = (M, L, G, G, G) \ \forall i \in 1, 2$$

Observe que este equilibrio es resultado de considerar el juego como un todo. Se obtiene en equilibrio de Nash cooperativo, que evite la jugada (F, F) en un juego no cooperativo. La posibilidad de obtener este resultado se basa en la racionalidad de los jugadores, reconocida por el conocimiento común y no en la cooperación explícita de los jugadores.

Un hecho más a considerar, es que la segunda etapa puede ser relativamente lejana en el tiempo a la primera. por lo que habría que considerar un factor de descuento, para considerar el valor presente del juego. Por ejemplo si el factor de descuento de un jugador es δ se obtendrían los retornos

$$u_1(M, s_2) = 4 + 0\delta, \ y \ \ u_1(F, s_2) = 5 + (-3)\delta$$

lo que implica que M es una mejor respuesta si $4 \geq 5 - 3\delta$ o $\delta \geq \frac{1}{3}$

Esto significa que para considerar una estrategia que contemple jugar en algún período en forma diferente al equilibrio de Nash debe suceder que:

1. En la última etapa hay más de un equilbrio de Nash.
2. Los factores de descuento sean lo sufcientemente altos.

Más adelante volveremos a considerar estos juegos. Usaremos la siguientes definiciones

Una historia es una sucesión de acciones, una en cada nodo no termianl, de forma tal que

- Por $h^k = (a_1, ..., a_k)$ representaremos la historia al final de la etapa k, $(h^0 = \emptyset)$.
- $\in A(h^j)$ denota el conjunto de acciones posibles de elección en el nodo j de forma tal que $a_j \in A(h^j)$ corresponde a una elección hecha en el nodo h_j por el jugador correspondiente.
- Si el total de etapas del juegos es K, h^K representa la historia completa.
- Definiremos como H^K el conjunto de todas las historias terminales. de formatla que $(a_1, ..., a_k)$ es terinal si no existe ninguna acción posible de ser elegida luego de la etapa k
- Cada historia termina en un nodo terminal. Los retornos indicados en los nodos terminales muestran las preferencias de los jugadores sobre el conjunto de historias.

En este caso una *estrategia pura para el jugador i,* es un plan contingente en cada etapa k para toda posible historia terminal h^k.

Mientras que, una estrategia mixta, será un sorteo sobre las historias posibles,

Capítulo 10

Equilibrio perfecto en subjuegos

Dado un juego extensivo $\Gamma = \{K, N, \mathcal{F}, A, r\}$, es posible dividirlo en juegos más pequeños. Esta idea se formaliza mediante el concepto de subjuegos.

Entendemos por **subjuego de un juego en forma extensiva** al juego que se inicia en un conjunto de información compuesto por un úinco nodo del juego original y el subárbol que le sigue, siempre que no se rompa la estructura de información del juego original. Esto es, dado un conjunto de información del juego original, se integra totalmente al subjuego o ningún nodo puede formar parte del subjuego. Es decir, si el conjunto de inforamción u pertenece a un subjuego, todo conjunto de información compuesto por nodos sucesores de u debe formar parte del subjuego, no pudiendo ser los nodos de estos conjuntos de información sucesores de nodos no considerados en el subárbol.

Sea K el árbol que reresenta el juego Γ y sea $F_{ij} \in \mathcal{F}_i$ un conjunto de información tal que $F_{ij} = \{x\}$. Sea $K_x \subseteq K$ el subárbol que se inicia en x para el que se verifica que $F_{ij} \subset K_x$ o bien $F_{ij} \cap K_x = \emptyset$ para todo $i \in N, j \in \{1, ..., n_i\}$. Entonces la restricción de Γ a K_x constituye en sí mismo un juego, que será llamado subjuego denotado como Γ_x y que se inicia en x. Toda estrategia s podrá ser escrita como (s_{-x}, x_x) donde por s_x representaremos la estrategia s apartir de x, y s_{-x} la estrategia que corresponde al resto del juego, el que será denominado juego truncado. Si sabmeos que en Γ_x se jugará s_x es suficente analizar el juego truncado Γ_{-x} que resulta de remmplazar en Γ el subárbol K_x por un nodo final con los los retornos $R_{ix}(s_x)$, para todo jugador i.

Si en el nodo x comienza un subjuego, las historia que una estrategia pura represeenta, puede ser dividida en dos etapas. Si conocemos la historia posterior a la etapa en la que el nod x se alcanzó, para conocer toda la historia, solo nos resta conocer la que corresponde al juego truncado.

Un equilbrio de Nash se dice perfecto en subjuegos, si restringido el perfil estrtatégico que lo determina, a cada subjuego es un equilibrio de Nash para el subjuego. Es decir si s es equilibrio de Nash perfecto en subjuegos si y solamnete si s_x es equilibrio de Nash para cada subjuego posible de Γ.

Es decir que una historia, corresponde a un equilibrio perfecto en subjuegos, si la parte de la historia que comienza en cada subjuego, corresponde a un equilibrio de Nash del subjuego.

Obsérvese que un equilibrio perfecto en subjuegos evita irraconalidades en subjuegos propias de algunos equilibrios de Nash, no obstante aun así, no es totalmente satisfactorio, pues como veremos existen equilibrios perfectos en subjuegos que no son sensibles.

Se tiene el siguiente teorema

Teorema 5 ***(de Kuhn)*** *Todo juego finito en forma extensiva con información perfecta, contiene un equilibri perfecto en subjuegos.*

La demostración de este teorema, es inemdiata a partir de considerar el método de inducción hacia atras.

Inducción hacia atrás o retroinducción La posibilidad de particionar un juego es subjuegos, nos permite resolver el juego de atrás para adelante. Para esto nos vamos hasta los útimos nodos, y formamos, llendo hacia atrás los subjuegos más pequeños admisbles. Resolvemos cada uno de ellos, En el nodo inicial de cada subjuego considerado, anotamos los retornos que corresponden a la resolución del subjuego considerado. Debenos recordar las estrategias que corresponden al equilibrio de este subjuego. Hacemos esto reiteradamente hasta que todos los nodos finales hayan sido considerados en algún subjuego. Seguimos hacia atrás, considerando en el nuevo árbol, que finaliza en los nodos iniciales de los subjuegos de la etapa anterior. Cosntruiremos así un perfil estratégico que corrsponderá a un equilibrio perfecto. Este método se conoce como inducción hacia atrás,

10.1. Retroinducción en juegos multietapas

Retroinducción puede ser aplicada para cualquier juego finito, con información perfecta, donde finito significa que sólo existe una cantidad finita de etapas, e información perfecta que en cada etapa, cada conjunto de información consta a lo más de un nodo.

El algoritmo consiste en determinar las movidas optimales en la última etapa para cada historia h^k. Entonces trabajar en la $K-1$ etapa, y definir la estrategia optimal para el jugador que debe mover allí, sabiendo que en la etapa K la historia será , de acuerdo a la elección anterior. El algoritmo continúa de esta manera, hasta la etapa inicial. Habremos construído así una estrategia óptima en el sentido de Nash, de acuerdo al concepto que discutiremos en la siguiente sección.

En el caso del juego de dos etapas previamente considerado, nos fuimos primeramente a la segunda estapa. Vimos que acaá había tres posibles equilibrios de Nash, y sobre etos vimos la posibilidad de alcanzarlo, jugando en forma adecuada en la etapa anterior.

Capítulo 11

Equilibrios de Nash

Un equilibrio de Nash es un conjunto de estrategias, una para cada jugador (un perfil o combinación estratégica), que es la mejor respuesta que cada uno puede dar a las acciones de los otros. En un equilibrio de Nash cada jugador maximiza su utilidad esperada, tomando las acciones de los otros como dadas. De esta forma en un equilibrio de Nash, ningún jugador se siente tentado a modificar en forma unilateral, su estrategia.

Los resultados obtenidos, obtenidas eliminando estrategias esttrictamente dominadas son ejemplos de equilibrios de Nash muy "robustos", no obstante veremos que existen otras respuestas que son equilibrios de Nash, que pueden no estar soportadas por estrategias dominantes.

Los equilibrios maxmin, encontrados para juegos de suma cero, son también equilibrios de Nash.

Definición 24 *Para un juego con n jugadores, con estrategias $S_i, i \in \{1, , , , .n\}$ y funciones de utilidad $u_i : X_{i=1}^n S_i \to R$ Un **equilibrio de Nash** es un vector s^* de estrategias individuales cuyas componentes cumplen:*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_i^*,) \;\; \forall\, s_i \in S_i.$$

Un equilibrio de Nash se llama fuerte si cambiamos la desigualdad por una desigualdad estricta. No obstante ser un equilibrio robusto, en el sentido de que pequeñas oscilaciones en las utilidades no modifican el equilibrio, no siempre es posible probar su existencia. A pesar de su debilidad, podemos probar la existencia de un equilibrio de Nash en condiciones muy generales.

Las proposiciones siguientes relacionan los equilibrios de Nash, con los obtenidos eliminando estrategias dominadas.

Proposición 4 *Si* $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ *es un equilibrio de Nash, entonces estas estrategias sobrevivirán a la aplicación reiterada del principio de eliminación de estrategias fuertemente dominadas.*

Demostración Sea $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ un equilibrio de Nash, supongamos que s_i^* es la primer estrategia del vector s^* que se elimina. Entonces, existe $s_i' \in S_i$ tal que $s_i' \succ s_i^*$. Es decir que $u_i(s_i^*, s_{-i},) < u_i(s_i', s_{-i})$, cualquiera sea $s_{_i} \in S_i$, en particular para $s_{_i}^*$ luego, $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) < u_i(s_i', s_{-i}^*)$ lo que contradice nuestro supuesto de que s^* es un equilibrio de Nash.[]

Proposición 5 *Si en un juego con un conjunto finito de estrategias posibles para cada jugador la eliminación de estrategias dominadas conduce a descartar a todas las estrategias con excepción de una estrategia por jugador, las estrategias no eliminadas constituyen un equilibrio de Nash.*

Demostración Por la proposición anterior, sabemos que todo equilibrio de Nash sobrevive al proceso de eliminación de estrategias estrictamente dominadas. Hay que probar que si el proceso deja como único sobreviviente a: $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ entonces este es un equilibrio de Nash. Razonando por el absurdo, supongamos que no sea un Equilibrio de Nash. Entonces existe $s_i' \in S_i$ tal que $u_i(s_i^*, s_{-i}^*,) < u_i(, s_i', s_{-i}^*)$. Pero como s_i' fue eliminada, existe $s_i^{''} \in S_i$ tal que $u_i(s_i', s_{-i},) < u_i(s_i'', s_{-i}), \forall S_i$ y en particular $u_i(s_i', s_{-i}^*) < u_i(s_i'', s_{-i}^*)$. Si $s_i^* = s_i''$ la contradicción obtenida termina la prueba. Si $s_i^* \neq s_i''$, existe $s_i''' \succ s_i''$ pues s_i'' no sobrevive. Repitiendo el proceso, teniendo en cuenta que el espacio de estrategias es finito si el juego es representado en forma normal se termina la prueba.[]

Directamente de la definición de equilibrio de Nash, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 6 *Ningún equilibrio de Nash con estrategias mixtas, asigna probabilidad positiva a una estrategia pura estrictamente dominada.*

Es decir, en términos de la definición 10, se tiene que si para algún jugador i, $R_i(k, s_{-i}) < R_i(ls_{_i})$ siendo $s = (s_i, s_{-i})$ un equilibrio de Nash, entonces $s_i(k) = 0$.

11.1. Existencia del Equilibrio de Nash

Vamos a probar aquí la existencia del equilibrio de Nash, si bien este teorema fue probado en [J. Nash, (1959)], su utilización se remonta a [A. Cournot, (1897)], de ahí el hecho de que muchos autores prefieran llamar a este equilibrio de Nash-Cournot.

Supondremos que las funciones de utilidad definidas en el elsapcio de estrategias mixtas de cada uno de los jugadores son funciones cuasi- cóncavas.

Definición 25 *Una función $u : S \subset R^n \to R$, S convexo, se dice cuasi- cóncava si*

$$\{x : u(x) \geq \alpha\}$$

es convexo, para todo $\alpha \in R$.

Recordemos que una función de utilidad representa el retorno que el jugador obtendrá como resultado de la estrategia por él utilizada, en función de las estrategias que todos los demás jugadores lleven adelante.

Sea S_i el conjunto de las estrategias mixtas del jugador $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Sea $u_i : \times_{i=1}^{n} S_i \to R$ la función de retorno del jugador $i-$ésimo. Entonces tenemos el siguiente concepto de equilibrio de Nash:

Definición 26 ***(Equilibrio de Nash)*** *El vector estratégico:*

$$\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2 \ldots, \bar{s}_n) \in \times_{i=1}^{n} S_i$$

es un equilibrio de Nash si y sólo si $\forall i \in \{1, ..., n\}, u_i(\bar{s}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \bar{s}_{-i})$.

Para la demostración del teorema de existencia del equilibrio de Nash, vamos a necesitar introducir algunas definiciones adicionales, así como el teorema de punto fijo de Kakutani y el teorema del máximo.

El primer concepto que definiremos es el de función multívoca o aplicación.

Definición 27 *Sean X e Y dos conjuntos cualesquiera Una aplicación, correspondencia o función multívoca $\phi : X \to Y$, $x \to \phi(x) \subset Y$, es una correspondencia que asocia puntos de X a subconjuntos de Y.*

Sean X e Y dos espacios topológicos. Para los objetivos de estas notas bastará considerar $X = R^m$ e $Y = R^l$

Definición 28 *Una aplicación $\phi : X \to Y$ es llamada* ***hemicontinua superiormente,*** *h.c.s. en x si para toda sucesión $x_n \in X$ e $y_n \in \phi(x_n), x_n \to x_0, y_n \to y$ entonces $y \in \phi(x)$.*

Equivalentemente:

Definición 29 *Una aplicación o correspondencia $\phi : X \to Y$ es hemicontinua superior en $x_0 \in X$, si para todo entorno V en Y que contiene a $\phi(x_0)$ existe U entorno de x_0, tal que $\phi(x) \subseteq V$ para todo $x \in U$*

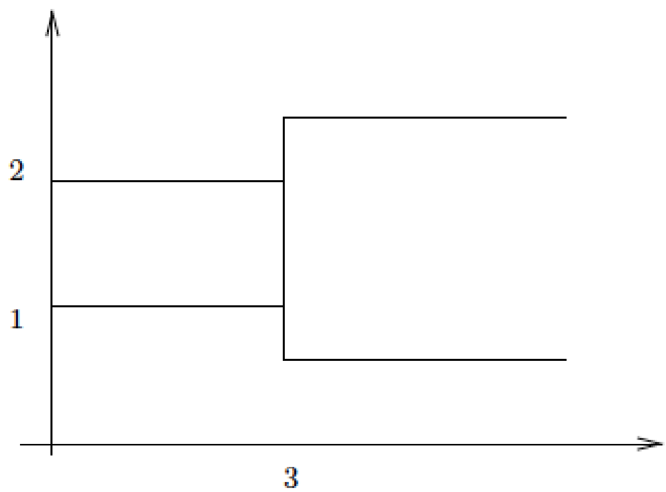


Fig. 16. Aplicación S.C.S.

Definición 30 *Sean X e Y espacios topológicos. Una aplicación o correspondencia $\phi : X \to Y$ es llamada* ***hemicontinua inferiormente,*** *h.c.i. en x si para toda sucesión $x_n \in X : x_n \to x$ e $y \in \phi(x)$, existe una subsucesión con $y_{n_k} \in \phi(x_{n_k})$ tal que $y_{n_k} \to y$.*

Equivaletemente:

Definición 31 *Sean X e Y espacios topológiocs Una aplicación o correspondencia $\phi : X \to Y$ es llamada* ***hemicontinua inferiormente,*** *h.c.i. en $x_0 \in X$ si para todo entorno U tal que $U \cap \phi(x_0) \neq \emptyset$ el conjunto $\{x \in X : \phi(x) \cap [U \cap \phi(x_0)] \neq \emptyset\}$ es un entorno de x_0.*

La correspondencia se dirá hemicontiuna superior o hemicontinua inferior, si lo es, para todo punto de su dominio.

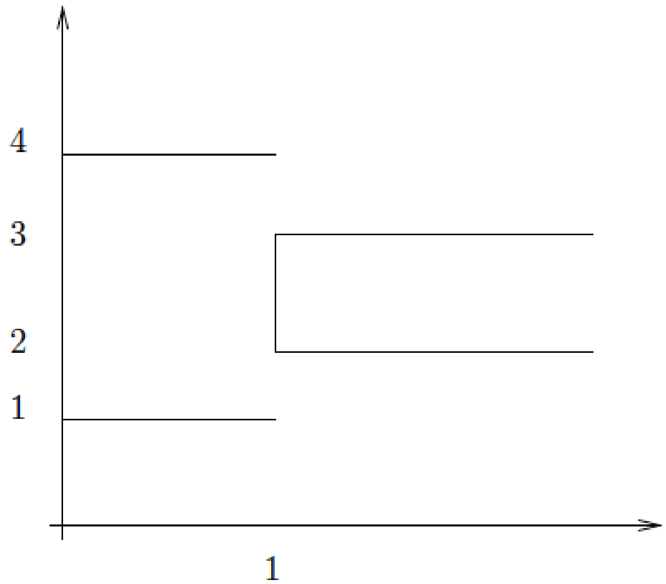


Fig. 17. Aplicación S.C.I.

Observación 1 *Puede verse fácilmente que una aplicación que sea una función, esto es* $\#\phi(x) = 1$ *para todo* x *en el domnio de* ϕ*, puede ser h.c.s sin ser continua, esto dejaría de ser cierto si exigimos que el recorrido de la función fuese compacto (es el teorema del grafo cerrado).*

No obstante una aplicación h.c.i. que sea función es inmediatamente continua.

Definición 32 *Diremos que una correspondencia* $\phi : X \to Y$ *es de valores compactos o compacta, si* $\phi(x) \subset Y$ *es compacto para todo* $x \in X$.

A continuación probaremos un importante teorema que garantiza la continuidad de la aplicación máximo de una función continua $u : S \times T \to R$. Este teorema nos permitirá obtener el Equilibrio de Nash (o Nash-Cournot) como el punto fijo de una aplicación vía el Teorema de Kakutani.

Teorema 6 ***(del Máximo de Berge)*** *Sea* $u : X \times Y \to R$ *una función continua y* $\phi : X \to Y$ *una correspondencia h.c.i. con valores compactos. Entonces la* ***función valor*** $m : X \to R$ *definida como*

$$m(x) = max_{y \in \phi(x)} u(x, y)$$

es continua y la correspondencia de los maximizadores $\rho : X \to Y$ definida como

$$\rho(x) = \left\{ y \in \phi(x) : \; u(x,y) = \max_{z \in \phi(x)} u(x,z) \right\}$$

es h.c.s.

Demostación: Probar que m es continua en $x \in X$, es equivalente a probar que para toda $x_n \to x$ se verifica que $m(x_n) \to m(x)$. Sea $m(x_n) = u(x_n, y_n) = \max_{y \in \phi(x_n)} u(x_n, y)$ y $m(x) = u(x,z) = \max_{y \in \phi(x)} u(x,y)$. La existencia de y_n y z se deduce de la compacidad de ϕ y la continuidad de f. Como $z \in \phi(x)$ y ϕ es h.c.i, existe x_{n_k} subsucesión de x_n tal que $y_{n_k} = \phi(x_{n_k}) \to z$. Como u es continua $m(x_{n_k}) = u(x_{n_k}, y_{n_k}) \to u(x,z) = m(x)$.

Sea $x_n \to x, y_n \to y, y_{n_k} \in \phi(x_{n_k})$, probar que ρ es h.c.s equivale a probar que $y \in \phi(x)$, esto es, que $\forall\, z \in \phi(x)$, $u(x,z) \leq u(x,y)$. Para esto observemos que como ϕ es h.c.i, $x_n \to x$ para todo $z \in \phi(x)$ existen $z_{n_k} \in \phi(x_{n_k})$, con $z_{n_k} \to z$ por lo tanto $u(x_{n_k}, z_{n_k}) \leq u(x_{n_k}, y_{n_k})$.

La continuidad de u termina la demostración.[]

Enunciaremos a continuación el **teorema de punto fijo de Kakutani.** No daremos aquí la demostración, el lector interesado puede encontrar la prueba del mismo en [C. Berge, (1963)]

Teorema 7 ***(de Kakutani)*** *Sea $S \subset R^m$ compacto y convexo. Sea $\phi : S \to S$ aplicación h.c.s. y con valores convexos. Entonces ϕ tiene un punto fijo, esto es existe un $\bar{x} \in S : \bar{x} \in \phi(\bar{x})$.* [1]

Finalmente probaremos el teorema de existencia del equilibrio de Nash, para **juegos finitos**, es decir, aquellos en los que participan un conjunto fiito de jugadores, que disponen de un conjunto finito de estrategias puras, y que tiene un horiznte finito, es decir que no se puede jugar indefinidamente.

Las utilidades de cada jugador $u_i : S_i \times S_{-i} \to R$ son funciones continuas en $S = S_i \times S_{-i}$ cuasi-cóncavas en S_i, definidas sobre el conjunto de estrategias posibles, a las que corresponde un conjunto de retornos, así $u_i(s_{-i}, \cdot) : S_i \to R$ para todo $i = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorema 8 ***(Teorema de Nash)*** *Sea $\Gamma = \{(S_1, \ldots S_n, R_1, \ldots R_n\}$ un juego infinito con n personas, con las siguientes propiedades:*

[1] *El teorema de Kakutani, introducido a partir de las necesidades de la teoría de juegos, fue durante los años 1950 a 1970, hasta la introducción de la topología diferencial, la principal herramienta de la economía matemática.*

- *S_i es un subconjunto no vacío, compacto y convexo, de un espacio euclidiano.*
- *Cada jugador i tiene una utilidad $u_i : S = \times_{i=1}^{n} S_i \rightarrow R$ continua.*
- *Para s fijo, el mapa $s_i' \rightarrow u_i(s'i, s_{-1})$ es cuasi-cóncavo.*

Entonces el juego Γ posee al menos un equilibrio de Nash, es decir $E(\Gamma) \neq \emptyset$.

Demostración Sea $\Phi_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i},) = \text{máx}_{t \in S_i} u_i(t, s_{-i})\}$. Por el teorema del máximo (probado anteriormente), resulta que ϕ es h.c.s., la cuasi-concavidad de u_i en S_i asegura que Φ toma valores convexos. Entonces resulta que el producto d $\Phi(s) = \Phi_1(s_{-1}), \times \ldots, \times \Phi_n(s_{-n})$ es h.c.s. y de valores convexos.

Además S es compacto y convexo. Luego $\Phi : S \rightarrow S$ es una aplicación en las condiciones el Teorema de Kakutani, por lo tanto existe $\bar{s} : \bar{s} \in \Phi(\bar{s})$. Equivalentemente $\bar{s}_i$ maximiza $u_i(\bar{s}_{-i}, t)$ $\forall t \ \in S_i$. Con lo cual queda probada la existencia de la solución de equilibrio.[]

Mencionaremos aunque sin demostrarlo que el conjunto de los equilibrios de Nash es *generalmente* impar. Esto puede concluirse a partir del teorema siguiente:

Teorema 9 *Casi todo juego finito, tiene una cantidad impar de equilibrios en estrategias mixtas.*

El lector interesado puede consultar [R. Wilson (1971)]. Se entiende por **casi todo** un conjunto abierto y denso de juegos. Recordamos que por **juegos finitos,** entendemos juegos en los que participan un conjunto fiito de jugadores que disponen de un conjunto finito de estrategias puras, y que tiene un horiznte finito, es decir que no se puede jugar indefinidamente.

Un teorema usa argumentos similares a los desarralloados en [G. Debreu (1970)] y [A. Mas-Colell (1985)], donde se prueba que el conjunto de los equilibrios walrasianos en economías competitivas es finito e impar.

Como puede el lector convencerse fácilmente, no todo equilibrio de Nash conlleva el mismo retorno, no obstante es de destacar que en juegos de suma cero, todo equilibrio de Nash asocia a cada jugador el mismo retorno, definido por el valor del juego. Es decir si (x^*, y^*) es equilibrio de Nash entonces $u_1(x^*, y^*) = -u_2(x^*, y^*) = v$.

Ejercicio 7 1. *Compruebe el lector esta afirmación.*

2. *Verifique también que para juegos de suma cero si,* (x, y) *y* (x', y') *son equilibrios de Nash, entonces también lo serán:* (x', y) *y* (x, y').

11.2. Relación de los distintos tipos de equilibrio con el concepto de Pareto optimalidad

Un concepto importante en economía, es el de **eficiencia en el sentido de Pareto.** Una distribución de bienes o recursos se dice **eficiente en el sentido de Pareto,** si cualquier otra distribución de los mismos, perjudica por lo menos a uno de los participantes.

Ciertamente no es un criterio de justicia, pues distribuciones muy "injustas" pueden ser eficientes en el sentido de Pareto (por ejemplo aquella que da todos los recursos a uno de los agentes actuantes y nada a los restantes). No obstante si la distribución no tiene la propiedad de Pareto sucede que sin empeorar a nadie al menos uno puede mejorar, y muchas veces poder mejorar al menos a uno implica, poder llevar a todos los agentes de la economía a un nivel de satisfacción más elevado.

Así más que por su presencia, la ausencia de Pareto eficiencia en una distribución derecursos es lo que más preocupa, pues ella nos indica que algo se podría hacer mejor.

Definición 33 *Una distribución factible de recursos,* $x = \{x_1, \cdots, x_n\}$ *es eficiente en el sentido de Pareto si no existe otra* $x' = \{x'_1, \cdots, x'_n\}$*, posible tal que* $x'_i \succ x_i$ *para todo* $i = \{1, \cdots, n\}$ *y estrictamente preferida para por lo menos uno de ellos.*

Entendemos por **distribuciones factibles,** aquellas que pueden alcanzarse con los recursos existentes en el momento de realizarse. Así si el total de recursos a repartir entre n individuos es C, $x = \{x_1, \cdots, x_n\}$, es posible si $\sum_{i=1}^{n} x_i = C$.

En un juego, una combinación estratégica será Pareto eficiente, si no existe ninguna otra que en caso de seguirse, permita mejorar a al menos un jugador sin empeorar a ninguno de los demás.

La pregunta natural que surge es la de cómo los conceptos de equilibrio presentados se comportan respecto a la eficiencia de Pareto.

Es claro por la propia definición de juegos de suma cero, que todo equilibrio de Nash, no es sólo una solución maxmin, sino que también es una solución Pareto eficiente. Pues una vez en cada una de ellas, todos los recursos que no son asignados al jugador I van para el II.

No obstante, en general, no todo equilibrio de Nash es Pareto eficiente. Es decir existen equilibrios de Nash en los que es posible obtener una situación mejor para todos. Es clásico en este sentido el juego de los prisioneros, donde el equilibrio de Nash robusto, que se obtiene no es Pareto eficiente.

Capítulo 12

Necesidad de refinamiento de los equilibrios de Nash

Una primera razón importante y fácil de comprender por la cual se debe refinar el concepto de equilibrio de Nash, es el hecho de que algunos de ellos son Pareto óptimos y otros no. En economía es frecuente la necesidad de distinguir entre ambos tipos de equilibrios que pueden estar presentes en un mismo modelo, véase por ejemplo [Accinelli et al, (2015)]. Socialmente es preferible que una econmía alcance aquellos equilibrios que son también óptimos de Pareto. No obstante debe considerarse que aun cuando un juego presente dos equilibrios de Nash y uno de ellos sea óptimo de Pareto, no es neceariamente este el que se juega. Consideremos el siguiente ejemplo que también nos sirve para mostrar la necsidad de nuevos refinamientos.

Ejemplo 17 *Considere el juego representados por la siguiente matriz de retornos:*

	L	R
U	$10, 10$	$-80, 7$
D	$7, -60$	$6, 6$

El juego presenta dos equilibrios en estrategias puras; (U, L) y (D, R) mientras el primero corresponde a un óptimo de Pareto, el segundo no. No obstante, observe que, si el jugador 2 comete un error, una vez que 1, elijió U, éste obtenga grandes pérdidas. Análogamente, si 2 elige L y uno por error elige D entonces 2 se vea altamente perjudicado. Mientras que 1 no obtendrá pérdidas si elige D, ni 2 las obtendrá si elige R. En estos casos, independientemente de lo que el otro haga, cada uno se asegura un retorno de 6 unidades. Según la naturaleza de los jugadores, o las estimaciones que cada uno haga de los posibles errores que el otro pueda cometer, puede resultar un equilibrio que no es óptimo de Pareto. Más adelante, en la subsección (12.1) resentaremos el concepto de equilibrio perfecto, que puede orientarnos en la caractrización de estos equilibrios.

Como ya lo consideramos previamente, en juegos modelados en forma extensiva, existen equilibrios de Nash, que dan lugar a comportamientos irracionales, (no maximizadores) en nodos alcanzables únicamente *con "probabilidad nula"*, véase ejemplo ((2)). Veremos que esta situación puede resolverse, mediante el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos, véase sección (13.2). Concepto que, al menos en principio. deja fuera estas irracionalidades.

Otra razón, quizás no tan inmediata, es que en juegos modelados en forma normal pueden aparecer equilibrios no robustos, esto es equilibrios que sólo se juegan si estamos seguros de que no se cometarán errores en el momento de elección, véas ejemplo (17). El concepto de equilibrio perfecto refina al equilibrio de Nash, dejando de lado este tipo de equilibrios. Define como perfectos aquellos equilibrios que protegen a cada jugador de errores o vacilaciones en el momento de decidir.

Presentamos a continuación ejemplos en los que la necesidad de los refinameintos se hacen presentes. Para obtener un amplio y detallado panorama de refinamientos del equilibrio de Nash, recomendamos [E. Van Damme (1991)].

Ejemplo 18 ***(Irracionalidad en un juego en forma extensiva)***

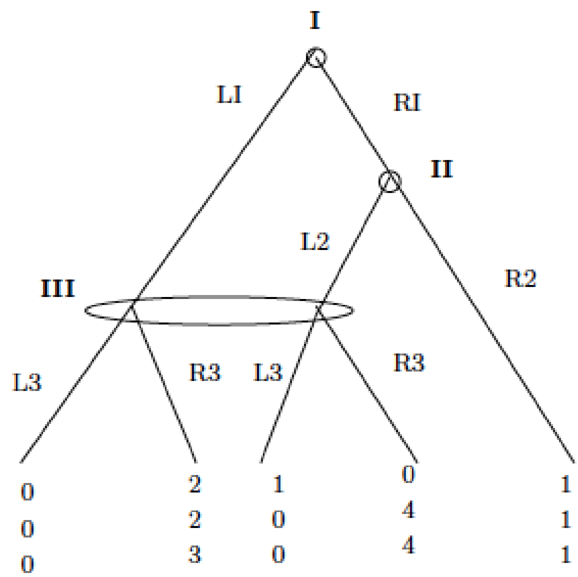


Fig. 18. Equilibrio Imperfecto.

En el juego representado en la Fig. 18, la estrategia (L_1, R_2, R_3) *es un equilibrio de Nash, pero obsérvese que en tanto que el nodo y no se alcance, le es indiferente la estrategia a elegir, no obstante si el nodo y se alcanzase, elegir la estrategia mencionada es irracional. Así, estrategias de equilibrio pueden prescribir movidas irracionales en determinados nodos, pero esto sólo puede suceder para nodos que, a menos de existir errores no serán alcanzados. Estos equilibrios se denominan* ***equilibrios imperfectos****. Obsérvese que para juegos con conjuntos grandes de estrategias posibles, la posibilidad de errores es alta, por lo que sería preferible evitar imperfecciones, es decir poder definir* ***equilibrios perfectos****, esto es equilibrios que no den lugar a irracionalidades.*

En juegos presentados en forma normal, no existen nodos inalcanzables en los que puede haber irracionalidades, no obstante existen equilibrios de Nash que pueden ser no robustos, inestables, en el sentido de que modificaciones inesperadas en el comportamiento de los jugadores puede dar lugar a cambios en las estrategias elegidas que acarrean pérdida de bienestar para algún jugador.

Ejemplo 19 ***(Inestabilidad en un juego en forma normal)***

	L_2	R_2
L_1	$(1,1)$	$(0,0)$
R_1	$(0,0)$	$(0,0)$

Fig. 19. Equilibrios Inestables

Este juego presenta dos equilibrios, (L_1, L_2) *y* (R_1, R_2)*. Si bien ambos son equilibrios de Nash, veremos que mientras el primero es robusto el segundo no lo es.*

Consideremos (R_1, R_2)*, si el jugador II, juega* R_2 *entonces el jugador I no gana modificando su estrategia. No obstante el jugador I, nada pierde si el juega su estrategia* L_1 *es más puede ganar si* II *juega* L_2*. En definitiva se jugará el equilibrio* (L_1, L_2) *pues ambos jugadores tienen incentivos a desiviarse de* (R_1, R_2)*. Decimos que* (R_1, R_2) *es un equilibrio no sensible, es decir que en definitiva no se juega.*

Otro argumente que muestra la necesidad de refinar el concepto de equilibrios de Nash, aparece al considerar que los jugadores pueden cometer errores en el momento de elegir su movida, con pérdida de bienestar para algún jugador. Por ejemplo en el caso siguiente

Ejemplo 20

	L_2	R_2
L_1	$(1,1)$	$(0,-10)$
R_1	$(-10,0)$	$(10,10)$

Aparecen dos posibles equilibrios, (L_1, R_1) *y* (L_2, R_2) *no obstante cada jugador deberá estar muy seguro de la elección del otro antes de jugar su segunda estrategia.*

La posibilidad de cometer errores en juegos en forma extensiva, puede llevarnos por un camino tal que se alcance un nodo a partir del cual la estrategia prevé un comportamiento irracional. Un equilbrio de Nash en forma extensiva puede implicar comportamientos irracionales a partir de un nodo que no se alcanza si se sigue tal estrategia de equilibrio. Equilibrios de Nash que eviten esta posibilidad ponen a los jugadores a resguardo de errores en la elección de los demás jugadores.

12.1. Equilibrio perfecto

Veremos que el requerimiento de que un equilibrio sea perfecto es realmente débil, si un equilibrio no es perfecto es realmente insensible, en el sentdio de que no se juega. En el ejemplo (19), Fig. 3, se ve que no todo equilibrio de Nash es perfecto. El equilibrio (R_1, R_2) no es perfecto, mientras que sí lo es (L_1, L_2), esto prueba que el concepto de equilibrio perfecto es, estrictamente, un refinamiento del concepto de equilibrio de Nash.

Para obtener el concepto de equilibrio perfecto, comenzaremos definiendo, para un juego en forma normal, un **juego perturbado**. En estos juegos se asume que todo jugador puede al menos en principio, por error en sus cálculos, o información imperfecta, jugar cualquier estrategia con probabilidad positiva.

Definición 34 *Sea* $\Gamma = \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, R_1, R_2, \ldots, R_n\}$, *un juego de* n *personas en Forma Normal. Para* $i = \{1, 2, \ldots, n\}$ *sea* η_i *y* $S_i(\eta_i)$ *tales que:* $\eta_i \in \mathcal{F}(\Phi_i, R^{m_i})$ *con* $\eta_i^k > 0$ *para todo* $k \in \Phi_i$ *y con* $\sum_{i=1}^{m_i} \eta_i^k < 1$; $S_i(\eta_i) = \left\{s_i \in S_i; s_i^k \geq \eta_i^k \text{ para todo } k \in \Phi_i\right\}$. *Entonces* $\Gamma(\eta) = \{S_1(\eta_1), S_2(\eta_2), \ldots, S_n(\eta_n), R_1, R_2, \ldots, R_n\}$, *se define como el* ***juego perturbado.***

Obsérvese que el juego perturbado elimina estrategias que asignan probabilidad cero a alguna estrategia pura. Es decir, todas las estrategias pueden ser jugadas con alguna probabilidad.

Observación 2 ***(Notación)*** *Por* $R_i(s|k)$ *representaremos el retorno que ofrece la estrategia puera* $k \in \Phi_i$ *cuando se está jugando el perfil* s. *Por* s_i^k *representamos la probabilidad que la estrategia mixta* s_i *del jugador* $i-$*ésimo asigna a su estrategia pura* k.

De las definiciones se sigue el siguiente lema:

Lema 2 *Una combinación estratégica* $s \in S(\eta)$ *es un equilibrio de* $(\Gamma(\eta))$ *si y sólo si, se satisface que: si* $R_i(s|k) < R_i(s|l)$, *entonces* $s_i^k = \eta_i^k$ *para todo* i, k, l.

Ahora, asumir que un jugador racional solamente cometerá errores con probabilidad muy baja, nos lleva a la siguiente definición de equilibrio perfecto:

Definición 35 *Sea* Γ *un juego en forma normal. Un perfil estratégico* s *de* Γ, *es un* ***equilibrio perfecto****, si* s *es el límite de una sucesión* $\{s(\eta)\}_{\eta \to 0}$ *siendo* $\{s(\eta)\}$ *un equilibrio de* $\Gamma(\eta)$ *para todo* η.

Recuerde que un equilibrio de Nash s^* en estrategias mixtas del juego Γ, asigna probabilidad cero a una esttrategia pura $k \in \Phi_i$ tal que $R_i(s|k) < R_i(s|l)$. El equilibrio del juego perturbado, asigna a estas estrategias puras, la menor probabilidad posible, la que, por definición, no puede ser cero, pues se considera $\eta > 0$ en todos sus argumentos, es decir $\eta_i^k > 0 \; \forall \; i \in \{1, ..., n\}$ and $k \in \Phi_i$.

Obsérvese que, para que un equilibrio s de Γ sea perfecto es suficiente que algunos, no necesariamente todo juego perturbado, con η próximo de cero posea un equilibrio "próximo" a s. De aquí que requerir que un equilibrio sea perfecto es una condición no muy restrictiva, téngase en cuenta que si un equilibro no es perfecto es insensible, en el sentido de que nos e jugará.

Dado que, como veremos, todo juego (Γ, η) perturbado, posee un equilibrio (ver teorema (10)), siendo S producto de conjuntos compactos es el mismo compacto, se sigue que existe s en γ punto de acumulación de la sucesión, $\{s(\eta)\}_{\eta \to 0}$ que es un equilibrio en Γ.

Teorema 10 *Todo juego perturbado* (Γ, η) *posee un equilbrio* $s(\eta)$.

Demostración: Es la misma que para el caso de la existencia del equilibrio de Nash en estrategias mixtas, con la salvedad deuq que debemos conisderar como el cojunto de estrategias mixtas de cada jugador, no todo el simplex, sino solamente sun subconjunto propi de él.

Con lo cual queda probado el siguiente teorema:

Teorema 11 *Todo juego en forma normal, posee al menos un equilibrio perfecto.*

Demostración: Considere uns sucesión $s(\eta)$ de equilibrios de (Γ, η), como ella está en S que es compacto, existe una subsucesión convergente, luego el equiibrio perfecto existe.

A continuación daremos dos caracterizaciones del equilibrio perfecto. Una de ellas usa el concepto de $\epsilon-$**perfecto equilibrio** introducido en [R. B Myerson (1978)].

Definición 36 *Sea* $\Gamma = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1, \ldots, R_n)$ *un juego normal y sea* $\epsilon > 0$. *Una* combinación estratégica $s \in S$ *es un* $\epsilon-$ ***equilibrio perfecto*** *de* Γ *si satisface que:*

i) Es completamente mixto. Esto es $\Phi = Sop(s)$, *o sea que el conjunto de las combinaciones estratégicas es el soporte de* s.

ii) $R_i(s|k) > R_i(s|l)$, *entonces* $s_i^l \leq \epsilon \; \forall \; i \in \{1,...,n\}k, l \in \Phi_i.(*)$

Teorema 12 *Sea* $\Gamma = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1, \ldots, R_n)$ *un juego normal y sea* $s \in S$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) s *es un equilibrio perfecto de* Γ.

ii) s *es un punto límite de una sucesión* $\{s(\epsilon)\}_{\epsilon\downarrow 0}$, *siendo* $s(\epsilon)$ *un equilibrio perfecto de* Γ, *para todo* ϵ.

iii) s *es un punto límite de una sucesión* $\{s(\epsilon)\}_{\epsilon\downarrow 0}$ *combinaciones estratégicas completamente mixtas con la propiedad de que* s *es la mejor respuesta contra todo elemento* $s(\epsilon)$ *en la sucesión. Es decir*

$$R_i(s_i, s(\epsilon_{-i}) \geq R_i(s_i', s(\epsilon_{-i}) \; \forall \; s_i' \in S_i, \forall \, i \in \{1, ...n\}.$$

Demostración $i) \rightarrow ii)$: Sea s un punto límite de la sucesión $\{s(\eta)\}_{\eta\downarrow 0}$, con $s(\eta) \in E(\Gamma, \eta)$ para todo η. Definamos $\epsilon(\eta) \in R_{++}$ por: $\epsilon(\eta) = \max_{i,k} \eta_i^k$. Entonces $s(\eta)$ es un $\epsilon(\eta)-$equilibrio perfecto. Lo que establece ii).

Veamos ahora que $ii) \rightarrow iii)$: Sea $\{s(\epsilon)\}_{\epsilon\downarrow 0}$, como en ii) y, sin pérdida de generalidad, asumiremos que, $\{s(\epsilon)\}_{\epsilon\downarrow 0} \rightarrow s$ cuando ϵ tiende a cero. De acuerdo a (*) se sigue que todo elemento en el soporte de s, es una mejor respuesta contra $s(\epsilon)$ siempre que ϵ sea suficientemente pequeño.

Finalmente probaremos que $iii) \rightarrow i)$: Sea $\{s(\epsilon)\}_{\epsilon\downarrow 0}$, como en iii) y, sin pérdida de generalidad, asumiremos que, s es el único límite de la sucesión. Definimos $\eta(\epsilon) \in R_{++}^m$ por:
$$\eta(\epsilon)^k = \begin{cases} s_i^k(\epsilon) & si\ k \notin Sop(s) \\ \epsilon & \text{en otro caso} \end{cases} \; \forall \; i, k.$$

Entonces $\eta(\epsilon)$ converge a cero cuando ϵ tiende a cero, así el juego perturbado $\{\Gamma, \eta(\epsilon)\}$ está bien definido. Para ϵ pequeño tenemos que $s(\epsilon) \in S(\eta(\epsilon))$ y como se sigue del lema anterior $s(\epsilon)$ es un equilibrio para $\{\Gamma, \eta(\epsilon)\}$. Así como $\eta(\epsilon)^k \rightarrow 0$ cuando ϵ tiende a cero el teorema sigue de la definición de juego perturbado y de mejor respuesta.[]

Veremos a continuación algunas críticas al equilibrio perfecto.

12.2. Críticas al concepto de equilibrio perfecto

El equlibrio perfecto es de alguna forma un resguardo contra vacilaciones en la forma de elegir de algún jugador. Se le suele describir como el equilbio de la mano temblorosa (*trembling hand equilibrium*), porque precisamente nos pone a resguardo de *"temblores"* o vacilaciones de algún jugador en el momento de elegir la acción a seguir.

Como Selten observa, véase [R. Selten (1975)], la noción de equilibrio perfecto no es totalmente satisfactoria. Al limitarnos a considerar como válidos sólo aquellos equilibrios que son perfectos podemos eliminar equilibrios racionales. Por ejemplo, cuando juegos en forma extensiva se representan en forma normal es posible que aparezcan equilibrios perfectos que no son perfectos en subjuegos. Lo dicho lo confirmaremos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 21 *El juego representado en la figura siguiente, tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos:* $\{L_1, L_2, L'_3\}$. *Pero* $\{R_1, R_2, R_3\}$ *es bajo ciertas condiciones que se describirán el límite de una sucesión de equilibrios con vacilaciones, y por lo tanto perfecto. Mientras que el primer equilibrio no se jugará si el jugador* I *elige con vacilaciones o mano temblorosa, o bien* II *se las atribuye.*

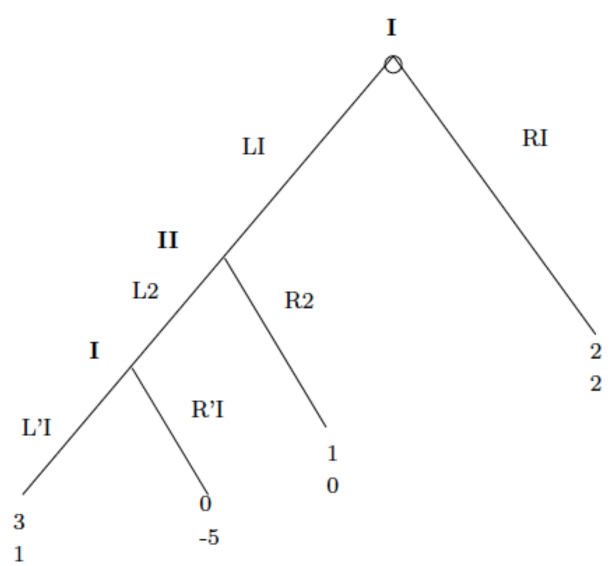


Fig. 20 Un equilibrio secuencial, no es necesariamente . perfecto.

	L_2	R_2
R_1	$(2,2)$	$(2,2)$
L_1, L_1'	$(3,1)$	$(1,0)$
L_1, R_1'	$(0,-5)$	$(1,0)$

Fig. 21. Forma Estratégica

Supongamos que el jugador I, elige con vacilaciones, siendo las siguientes las probabilidades con que I elije uno u otro camino:

$$\begin{aligned} prob(L_1, L_1') &= \epsilon^2 \\ prob(L_1, R_1') &= \epsilon \\ prob(R_1) &= 1-\epsilon-\epsilon^2 \end{aligned}$$

La probabilidad de elegir R_1', dado que eligió L_1, es

$$P(R_1'/L_1) = \frac{P(L_1, R_1')}{P(L_1, L_1') + P(L_1, R_1)} = \frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon^2} \to 1$$

cuando ϵ tiende a cero.

El problema está en que las vacilaciones (los temblores de la mano) en la elección correcta están correlacionadas, aquí si el jugador I, se equivoca la primera vez, y eleige L_1 muy probablemente se volverá a equivocar la segunda vuelta, y eleigirá R_1' con mucha probabilidad. Como resultado, se obtiene el equilbrio (R_1, R_2, R_1') el que si bien es perfecto, no es perfecto en subjuegos.

En [R. Selten (1975)], se introduce el concepto de *agente en forma estratégica* para eliminar esa posibilidad de correlación entre vacilaciones ante cada movida. Para detalles al respecto [D. Fudemberg and J. Tirole (1991)], y el trabajo original de Selten citado arriba.

12.3. Equilibrio esencial

Sea $\mathcal{G}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ el conjunto de todos los juegos $\Gamma = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1, \ldots, R_n)$ con estrategias $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$.

Para $\Gamma \in \mathcal{G}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, sea r_i el retorno de i asociado a las estrategias puras de Γ, es decir

$r_i = \langle R_i(\phi)\rangle_{\phi\in\Phi}$. Esto significa que $r_i \in R^{m*}$ donde $m^* = \Pi_{i=1}^{n} m_i$, siendo $m_i = |\phi_i|$. El vector de retornos del juego Γ es $r = (r_1, \ldots, r_n) \in R^{nm*}$

Podemos establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto $\mathrm{G}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ y el conjunto de vectores del espacio vectorial R^{nm*}. Entonces es posible definir una distancia o métrica $\rho(\Gamma, \Gamma')$ en el conjunto $\mathrm{G}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$.

$$\rho(\Gamma, \Gamma') = max_{i,s}|r_i(s) - r_i'(s)|.$$

Una distancia entre dos estrategias $s, s' \in S$ puede definirse por

$$\rho(s.s') = \max_{i,a} |s_i(a) - s_i'(a)|.$$

Diremos que una cierta afirmación $\mathcal{S}$, es cierta *para casi todo* juego si, la clausura del conjunto de los juegos para los que S es falsa, considerado como subconjunto del espacio R^{nm*} tiene medida de Lebesgue cero.

Definición 37 ***(Equilibrio esencial)*** *Sea Γ un juego en forma normal con n jugadores. Un equilibrio s de Γ es esencial si para todo $\epsilon > 0$ existe δ tal que, para todo Γ' para el que se verfique que $\rho(\Gamma, \Gamma') < \delta$, existe $s' \in E(\Gamma')$ con $\rho(s, s') < \epsilon$.*

Definición 38 ***(Equilibrio fuertemente estable)*** *Sea $\Gamma^* = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1^*, \ldots, R_n^*)$ un juego de n personas en forma normal. Un equilibrio s^* es fuertemente estable en γ^* si existen entornos U de Γ^* en R^{nm*} y V de s^* en R^m, tal que*

(i) $|E(\Gamma) \cap V| = 1$, para todo $\Gamma \in U$ y

(ii) el mapa $s : U \to V$ definido por $\{s(\Gamma)\} = E(\Gamma) \cap V$ es continuo.

De nuestras definiciones sale inmediatamente que:

Proposición 7 *Todo equilibrio fuertemente estable es esencial.*

Definición 39 ***(Equilibrio aislado)*** *Diremos que un equilibrio s es* ***aislado*** *si existe un entorno V de s tal que $V \cap E(\Gamma) = \{s\}$.*

Como consecuencia tenemos que:

Proposición 8 *Todo equilibrio fuertemente estable es aislado.*

El concepto más restrictivo de equilibrio es el de **equilibrio regular.** Su definición está asociada al hecho de que una determinada matriz jacobiana, evaluada en alguna de las estrategias $\phi \in Sop(s)$, siendo s un equilibrio de Nash, sea no singular. En esas condiciones s es un equilibrio regular. [E. Van Damme (1991)].

Obsérvese que una estrategia $s \in S$ es un equilibrio para Γ si y solo si la siguiente condició se verifica:

$$s_i^k > 0 \Rightarrow R : i(s/k) = \max_{l \in \Phi_i} R_i(s/l) \; \forall \; i \in \{1, ..., n\}. \; k \in \Phi_i.$$

Luego $s \in R_+^m$ es un equilibrio de Γ si y solo si es solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_i^k \left[R : i(x/s) - \max\nolimits_{i \in \Phi_i} R_i(x/l) \right] = 0 \; \forall \; i \in \{1, ..., n\}, \; k \in \Phi_i$$

$$\sum\nolimits_{k \in \Phi_i} x_i^k - 1 = 0 \; \forall \; i \in \{1, ..., n\}.$$

Sea

$$F_i^k(x/\phi) = x_i^k \left[R_i(x/s) - \max\nolimits_{i \in \Phi_i} R_i(x/l) \right] \; \forall \; i \in \{1, ..., n\}, \; k \in \Phi_i$$

$$F_i(x/\phi) = \sum\nolimits_{k \in \Phi_i} x_i^k - 1 = 0 \; \forall \; i \in \{1, ..., n\}.$$

Sea $J(x/\phi)$ el jacobiano de anterior con $m + n$ ecuaciones y m incógnitas Es decir,

$$J(x/\phi) = \frac{\partial F(x/\phi)}{\partial x}$$

se para $s \in E(\Gamma)$ resulta ser el jacobiano una matriz no singular, entoces decimos que el equilibrio s es regular.

En [J.C. Harsanyi (1973)] siguiendo [G. Debreu (1970)], usando el teorema de Sard, se prueba que:

Teorema 13 *Para casi todo juego en forma normal, todos sus equilibrios son regulares.*

Los equilibrios regulares gozan de muchas buenas propiedades: son fuertemente estables, aislados, esenciales, propios y aparecen en cantidad impar.

Esto muestra que par juegos en forma normal, si bien pueden aparecer juegos con equilibrios de Nash “irracionales”, estos son pocos, al menos en el sentido de la medida de Lebesgue, veremos que esto no sucede cuando tratamos con juegos en forma extensiva.

Estos conceptos están rigurosa y ampliamente analizados en [E. Van Damme (1991)].

Capítulo 13

Juegos con memoria perfecta

Aquellos juegos en forma extensiva, donde cada jugador recuerda todos los antecedentes que lo llevaron al nodo actual, son llamados **juegos con memoria perfecta.**

Un caso particular de juegos con memoria perfecta, son los llamados juegos con *información perfecta* en estos cada conjunto de información es un singleton. La Fig. 6, muestra un ejemplo donde el jugador II no puede distinguir entre dos posibles nodos, no sabe cual es la acción anterior del jugador I.

Aquellos juegos donde no existe información perfecta, se caracterizan por la existencia de conjuntos de información conformados por más de un nodo. El jugador con tal partición de su conjunto de información no puede distinguir entre un nodo y otro de un mismo conjunto de información.

La mayoría de los juegos que aparecen en economía si bien no tienen información perfecta, son de memoria perfecta. A los efectos de considerar estos introduzcamos las siguientes consideraciones.

A cada jugador i le corresponde un conjunto P_i, de puntos de decisión (nodos), ver definición 1. El mismo tiene asociado una partición U_i, en subconjuntos llamados *conjuntos de información* tales que:

i) Todo camino intersecta cada conjunto de información a lo más una vez.

ii) Todos los nodos en el mismo conjunto de información tienen la misma cantidad de sucesores.

Notación

Sea x un nodo, llamaremos $Suc(x)$ al conjunto de sucesores inmediatos de x, es deicr al conjunto de nodos que estaán unidos por ramas salientes de x. Por C_u entendemos una partición de $\cup_{x \in u} Suc(x)$ en las llamadas elecciones en u, siendo u un elemento de $\cup_{i=1}^{n} U_i$, de forma que a toda elección le corresponda un único elemento en $Suc(x)$. De esta manera identificamos una acción $c \in C_u$, con las elecciones posibles de ramas que se alejan de u y que en el gráfico aparecen etiquetadas, comenzando en un elemento $x \in u$ y terminando en un $Suc(x)$ que está en c, es deicr, que se alcanza,partiendo de algén $x \in u$ mediante la acción c. Recuerde que para cada $x \in u$ corresponden las mismas acciones, estas son C_u.

Definición 40 *El juego Γ tiene memoria perfecta si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}, u, v \in U_i$, $c \in C_u$ para $x, y \in v$, tenemos que c es anterior a x si y sólo si c es anterior a y.*

En juegos con memoria perfecta, ningún jugador olvida información que una vez conoció, por lo tanto, en cada nodo conoce las acciones que lo trajeron a la situación actual, por lo tanto dos nodos en el mismo conjunto de información no pueden ser predecesores. No obstante esto no es suficiente para imponer memoria perfecta. Pues supongamos que x y $\bar{x}$ pertenecen a nodos distintos de un jugador dado, y supongamos que x' y x'' son los sucesores respectivos, y ambos en un mismo conjunto de información. Esto supone que le jugador olvidó algo que sabía, pues ahora no sabe si llego al conjunto de informació habiendo elegido en x o en $\bar{x}$.

Necesitamos también imponer que si $x'' \in h(x')$, y si x es un predecesor de x', actuando el mismo jugador i en x y x' y por lo tanto en x'', entonces existe un nodo $\bar{x}$, que está en el mismo conjunto de información que x (posiblemente él mismo) que es predecesor de x'', y tal que la acción elegida en $\bar{x}$ que lo lleva a x'', es la misma que que de x lo lleva a x'. Intuitivamente, si dos nodos están en el mismo conjunto de información, se distinguen sólo por propiedades que el jugador desconoce, y que no podía conocer cuando eligió un acción que lo llevará a este conjunto de información. Además el jugador recuerda la acción $h(x)$ elegida en x, que lo lleva al nodo de x' que es el mismo que el de x''.

Ejemplo 22 *El ejemplo representado en la Fig. 22, nos muestra un juego que no tiene memoria perfecta. Ubicado en su segundo conjunto de información, el jugador I no es capaz de reconstruir las acciones que lo llevaron allí.*

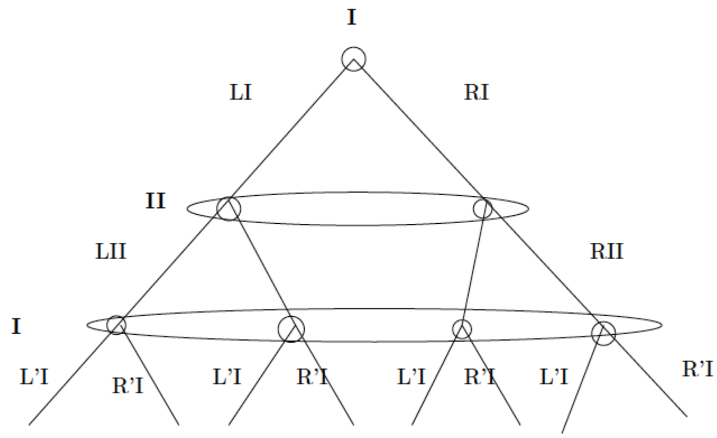


Fig. 22. En su segunda movida, el jugador I. olvida algo que previamente le era conocido.

13.1. Estrategias de comportamiento

Definición 41 *Una* ***estrategia de comportamiento*** *del jugador i asigna una distribución de probabilidad sobre C_u para todo conjunto $u \in U_i$, al conjunto de estas estrategias lo notaremos por B_i, mientras que por B, representaremos el conjunto de las combinaciones de estrategias de comportamiento, es decir al conjunto de n-uplas de estrategias, una para cada jugador.*

Las estrategias mixtas corresponden a una aleatorización *a priori* mientras que una estrategia de comportamiento supone una aleatorización local.

La equivalencia entre estrategias de comportamiento y estrategias mixtas para juegos con memoria perfecta tiene importante valor para entender una amplia clase de trabajos con juegos extensivos. Para esto introduciremos el concepto de **Probabilidad de Realización.**

Si $b \in B$, entonces para todo $z \in$ Z se puede computar la probabilidad $P^b(z)$ de que z sea alcanzado cuando b es jugado.

Un nodo x se dice **posible para** b_i si existe algún $b \in B$ con i^{th} componente b_i tal que $P^b(x) > 0$. Un conjunto de información se dice *relevante para* b_i, si jugando b_i existe un nodo posible $x \in u$ para b_i. Denotaremos por $Pos(b_i)$ respectivamente $Rel(b_i)$ al conjunto de los nodos posibles, respectivamente relevantes para b_i.

Definición 42 *Dos estrategias s y s'* ***son equivalentes*** *si dejan la misma distribución de probabilidades sobre los resultados para toda estrategia de los oponentes.*

Cualquier estrategia mixta s_i, genera un única estrategia de comportamiento equivalente:

Supongamos que el jugador i usa la estrategia mixta s_i, entonces si $u \in U_i$ es alcanzado, la probabilidad de elegir $c \in C_u$ quedará dada por lo que llamaremos *probabilidad de realización*:

$$b_{iu}(c) = \sum_{\phi_i \in Rel(c)} s_i(\phi_i) / \sum_{\phi_i \in Rel(u)} s_i(\phi_i), \tag{13.1}$$

donde $Rel(u)$ denota el conjunto de todas las estrategias puras ϕ_i del jugador i, relevantes para u, es decir que dada la estrategia mixta s_i, llevan a u, con probabilidad positiva. Mientras que $Rel(c)$ representan las estrategias puras que, una vez alcanzado, el conjunto de información u asignan probabilidad positiva a la acción c en u. De esta manera como el lector puede comprobar fácilmente habremos obtenido unas estrategia de comportamiento equivalente a la estrategia mixta.

El recíproco de esta afirmación es inmediato.

Esto muestra que lo que puede alcanzarse usando estrategias mixtas, puede lograrse con estrategias de comportamiento. Por lo que no hay razón para que un jugador use estrategias más generales que las de comportamiento. Esto se demuestra por primera vez en [H. Kuhn. (1953)].

Si (1) está bien definido b_i será la estrategia de comportamiento, y se definirá arbitrariamente cuando u no puede ser alcanzado con la estrategia s_i.

Consideremos el siguiente ejemplo, tomado de [D. Fudemberg and J. Tirole (1991)].

Ejemplo 23 *Según la Fig. 22, el jugador I, tiene cuatro posibles estrategias:*

$$(L_1, L_1'); (L_1, R_1'); (R_1, L_1'); (R_1, R_1').$$

No obstante, si el jugador I juega R_1, su segundo nodo de información es inalcanzable, y por lo tanto (R_1, L_1') y (R_1, R_1') son equivalentes.

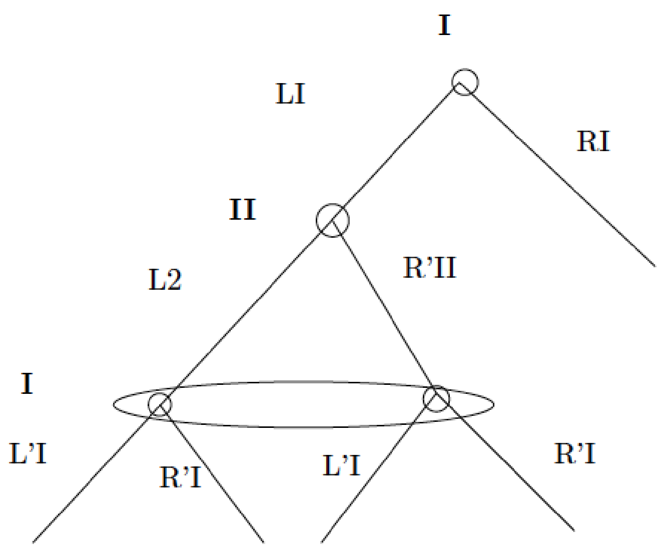


Fig. 23. El jugador II no juega si I elige RI.

En juegos con memoria perfecta, a partir de una estrategia mixta, sólo es posible construir una única estrategia de comportamiento equivalente, no obstante a la misma estrategia de comportamiento, puede corresponderle más de una estrategia mixta equivalente.

Ejemplo 24 *La figura (24) muestra un ejemplo de equivalencia entre estrategias mixtas y de comportamiento. El jugador II, usa la estrategia* σ_2*, que asigna probabilidad* $\frac{1}{2}$ *a las siguientes estrategias puras:* $s_2 = (L, L', R''); s_2 = (R, R', L'')$*. La estrategia de comportamiento equivalente es:* $b_{2h}(L) = b_{2h}(R) = \frac{1}{2}$*;* $b_{2h'}(L') = 0$ *y* $b_{2h'}(R') = 1$*, y* $b_{2h''}(L'') = b_{2h''}(R'') = \frac{1}{2}$.

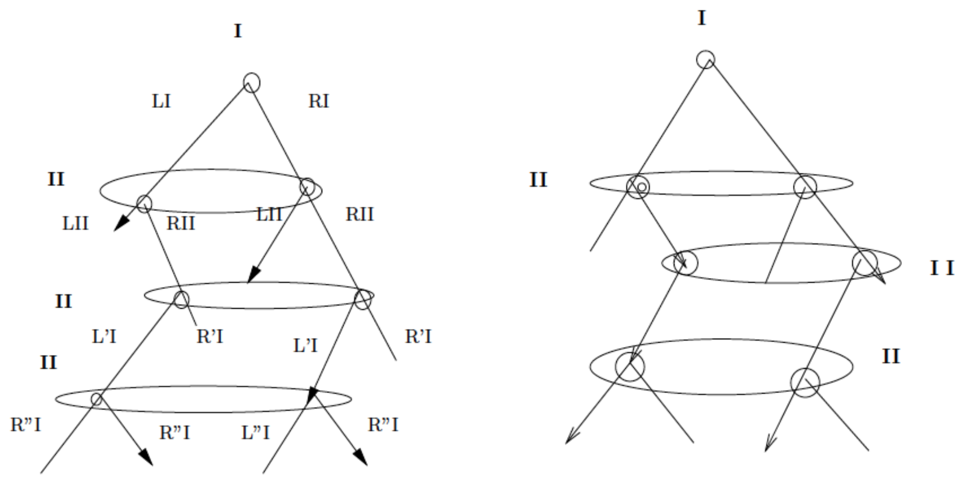


Fig. 24. Estrategias de comportamiento.

Muchas estrategias mixtas, pueden generar una única estrategia de comportamiento. En la Fig. 24, el jugador II tiene cuatro estrategias puras,

$$\phi_{21} = (L_2, L_2'); \ \phi_{22} = (L_2, R_2'); \ \phi_{23} = (R_2, L_2'); \ \phi_{24} = (r_2, L_2').$$

Las estrategias mixtas:

$$s_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \ \ \bar{\sigma}_2 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}),$$

generan la misma estrategia de comportamiento b_2; $b_{2h}(L_2) = b_{2h}(R_2) = \frac{1}{2}$ *y* $b_{2h'}(L_2') = b_{2h'}(R_2') = \frac{1}{2}$.

No habiendo razones para que un jugador use una estrategia más general que la que corresponde a estrategias de comportamiento nos limitaremos a ellas.

13.2. Subjuegos y equilibrios perfectos en subjuegos

Frecuentemente es natural descomponer un juego en subjuegos menores. Esto se formaliza con la noción de subjuego.

Definición 43 *Sea x un nodo de un juego Γ, con un árbol K, y sea K_x un subárbol que comienza en x. Si todo subconjunto de información de Γ o está completamente incluido en K_x o bien es* *disjunto con él, entonces la restricción de* Γ *a* K_x*, constituye un juego, llamado subjuego* Γ_x *con comienzo en* x.

Definición 44 *Una estrategia de comportamiento* b *de un juego en forma extensiva, es* equilibrio perfecto de subjuegos *si la restricción de* b *a* Γ*, es un equilibrio de Nash, para todo subjuego propio* Γ.

Sea Γ_x un subjuego de Γ, toda combinación estratégica b puede descomponerse en un par (b_{-x}, b_x), siendo b_x una combinación estratégica en Γ_x y b_{-x} una combinación estratégica en el juego truncado $\Gamma_{-x}(b_x)$.

Definición 45 *Dada la estrategia* b_x *de un subjuego* Γ_x *de* Γ*, se entiende por juego truncado,* $\Gamma_{-x}(b_x)$*, el que resulta de reemplazar* K_x *por el nodo final con retorno esperado* $R_{ix}(b_x)$ *para todo jugador* i.

Por $R_{ix}(b_x)$ entendemos el retorno esperado por el jugador i cuando la estrategia b es jugada.

El concepto de equilibrio perfecto de subjuegos, es un primer paso en el intento de eliminar equilibrios de Nash que prescriben comportamientos irracionales.

Sea Γ un juego en forma extensiva y sea b un vector de estrategias de comportamiento (*combinación estratégica*), en Γ. Diremos que $b'_i \in B_i$ es la **mejor respuesta** contra b si:

$$R_i(b|b'_i) = \max_{b''_i \in B} R_i(b|b''_i), \tag{13.2}$$

siendo $R_i(\cdot)$ el retorno esperado para i cuando $\cdot$ es jugado: $R_i = \sum_z P^b(z) r_i(z)$, siendo $P^b(z)$ la probabilidad de que el nodo final z, sea alcanzado, cuando b es jugado y $r_i(z)$ es el retorno que corresponde a i si z es alcanzado.

Una vez que el conjunto de información u es alcanzado, sólo serán relevantes para b, $Rel(b)$, aquellos conjuntos de información que son posibles de alcanzarse luego de u, jugando b.

Definiremos como mejor estrategia contra b a partir de u a una estrategia b'_i que satisface:

$$R_{ui}(b|b'_i) = \max_{b''_i \in B} R_{ui}(b|b''_i), \tag{13.3}$$

donde el retorno esperado condicional R_{ui} está definido por:

$$R_{ui}(b) = \sum_{z \in \mathcal{Z}} P^b(z|u) r_i(z) = \sum_{x \in u} P^b(x|u) R_{xi}(b) \text{ } si \text{ } P^b(u) > 0. \tag{13.4}$$

Obsérvese que: $R_{ui}(b|b'_i)$ depende solamente de lo que b' prescribe para todo conjunto de información posterior a u.

Teorema 14 *b'_i es la mejor réplica contra b si y sólo si b'_i es la mejor réplica contra b en cada conjunto de información $u \in U_i$ que es alcanzado con probabilidad positiva, cuando $b|b'_i$ es jugado.*

Demostración Sea $\{u_\alpha; \alpha \in A\}$ una partición en conjuntos de información del conjunto de los nodos, o puntos de decisión P_i de i. Sea $Z(P_i)$ el conjunto de los nodos finales asociados con P_i. Entonces para toda combinación estratégica de comportamiento, $b \in B$, tenemos:

$R_i(b) = \sum_\alpha P^b(u_\alpha) R_{iu_\alpha}(b) + \sum_{z \notin Z(P_i)} P^b(z) r_i(z)$, donde la suma sobre α se extiende a aquellos u_α con $P^b(u_\alpha) > 0$, ahora el teorema sigue inmediatamente.[]

Este teorema prueba que para que una combinación estratégica sea un equilibrio, necesita prescribir un comportamiento racional sólo en aquellos conjuntos de información que pueden ser alcanzados cuando un equilibrio es jugado, mientras que en los otros conjuntos de información, el comportamiento puede ser arbitrario. Esta es la razón de la existencia de equilibrios "irracionales" y por la que el concepto de equilibrio de Nash debe ser refinado. Veremos que a través del siguiente ejemplo que la necesidad de refinamiento extensiva, es mayor que en juegos en forma normal.

Ejemplo 25 *Ver [E. Van Damme (1991)], pag 107.*

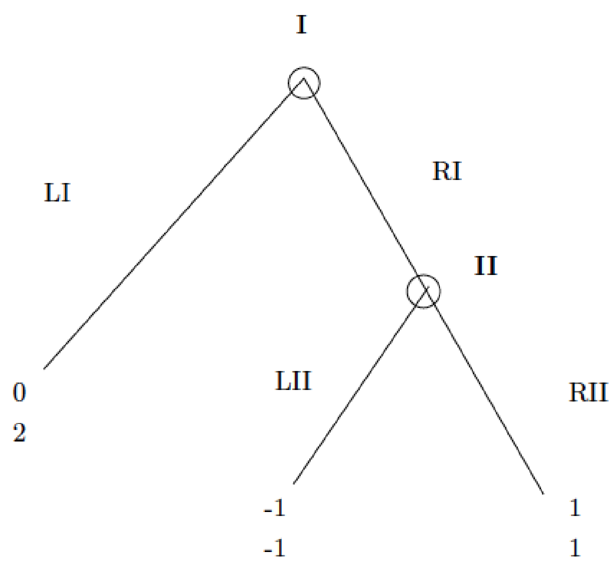


Fig. 25. En la figura se representa un juego con irracionalidades persistentes bajo perturbaciones.

Para demostrar lo dicho, consideremos el juego de la Fig. 25. El juego tiene dos conjuntos conexos de equilibrios de Nash. $\{(R_1, R_2)\}$ y $\{L_1, pL_2 + (1-p)R_2); p \leq \frac{1}{2}\}$. De aquí que el juego presente dos posibles resultados, (R_1, R_2) y L_1. El único equilibrio que tiene "razonable" es obviamente, (R_1, R_2). Nótese que para juegos con retornos próximos, el conjunto de equilibrios cambia constantemente pero se mantiene la irracionalidad. De aquí se sigue que existe un conjunto grande (con medida de Lebesgue positiva) de juegos, para los que la *"esencialidad"* (cf. Def. en subsección 6.3), no es suficiente para excluir irracionalidades. Parece ser que la única propiedad genérica asociada a los juegos en forma extensiva es el de que genéricamente tienen una cantidad finita de resultados posibles. Esta propiedad está demostrada en [D. M., Kreps and R. Wilson (1982)]

Teorema 15 *Para casi todo juego finito, en forma extensiva, el conjunto de los equilibrios de Nash es finito.*

Un importante concepto para eliminar aquellos equilibrios de Nash, que permiten un comportamiento irracional en los nodos no alcanzables, es el de **equilibrio perfecto de subjuegos.**

Un equilibrio b de un juego Γ se dice un **equilibrio perfecto de subjuegos** si para todo subjuego Γ_x de Γ la restricción b_x de b constituye un equilibrio para Γ_x.

Lema 3 *[H. Kuhn. (1953)].Si* b_x *es un equilibrio para* Γ_x *y* b_{-x} *es un equilibrio para el juego truncado* $\Gamma_{-x}(b_x)$, *entonces* (b_{-x}, b_x) *es un equilibrio de* Γ.

Demostración La prueba sigue de la observación de que para todo $b \in B$:

$$R_i(b) = P^b(x)R_{ix}(b) + \sum_{z \notin Z(x)} P^b(z)r_i(z),$$

siendo $Z(x) = \{y \in P_i : y \text{ sigue a } x\}$. Si Γ_x está bien definido, entonces $R_{ix}(b)$ depende solamente de b_x.[]

Este lema permite obtener cualquier equilibrio perfecto de subjuego, mediante el siguiente procedimiento iterativo: Primeramente consideramos los subjuegos minimales en el juego original, luego truncamos el juego asumiendo que en cualquiera de los subjuegos se jugo un equilibrio. Repitiendo el proceso y considerando el lema anterior, obtenemos su equilibrio perfecto de subjuegos. Finalmente resulta el siguiente teorema:

Teorema 16 *Todo juego posee al menos un equilibrio perfecto de subjuegos.*

Ejemplo 26 *Equilibrio Perfecto de Subjuegos. El juego ilustrado por la figura siguiente, no puede ser resuelto ni por la elección de una estrategia no dominada, ni por inducción retroactiva, no obstante podemos seguir la lógica de este último método, para obtener un equilibrio perfecto de subjuegos.*

El juego que comienza en el segundo conjunto de información del jugador I, tiene un único equilibrio de Nash, con valor esperado $(0, 0)$. El jugador II, a su turno, eligiría R_2, solamente si esperara que en el subjuego de partidas simultaneas final, I eligiera con probabilidad mayor que $\frac{3}{4}$, la rama con resultado favorable para él. Como sabe que I es racional, como lo es el mismo, en su nodo, elegirá L_2. El jugador I, en su primera movida hará R_1, quedando conformado el equilibrio.

Podemos ahora representar este juego de la siguiente forma:

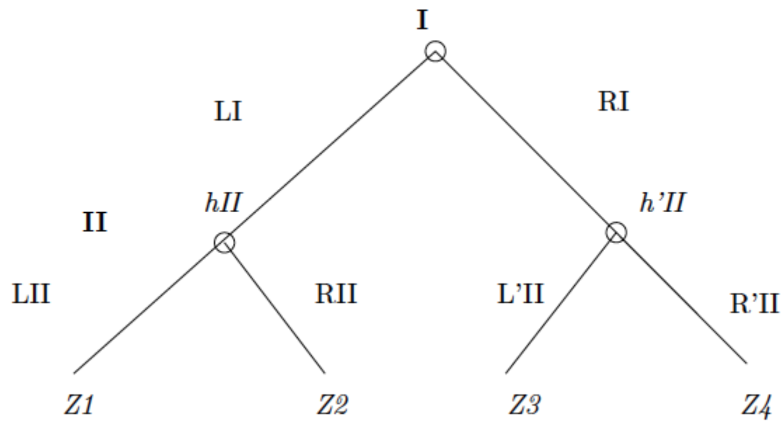


Fig. 26. Equilibrio perfecto en subjuegos.

13.3. Críticas a la resolución por estrategias débilmente dominadas

El siguiente ejemplo nos muestra que en ciertos casos proceder por eliminación de estrategias débilmente dominadas, puede llevarnos a resultados no deseados por quien aplicada dicho método.

Ejemplo 27 *Supongamos el juego en forma normal, representado en la siguiente matriz.*

	b_1	b_2
a_1	$(10, 1)$	$(1, 8)$
a_2	$(10, 15)$	$(-2, 3)$

Fig. 27 *Un mal caso para la eliminación de estrategias "débilmente dominadas"*

Observemos que el equilibrio "razonable" es el representado por las estrategias a_2, b_1. No obstante si el jugador I procede eliminado estrategias débilmente dominadas, eliminará la fila a_2. Sabiendo esto, el jugador II, elegirá b_2, contra la esperada elección b_1, obteniendo el jugador I un mal resultado.

13.4. Críticas a los métodos de resolución por retroinducción y por subjuegos

En esta sección discutiremos algunas de las limitaciones de los métodos de resolución por retroinducción o por subjuegos. Si bien ambos métodos resuelven bien algunos casos, como los de dos etapas, juegos de Stackelberg, no obstante a medida que aumentan las etapas del juego, o la cantidad de jugadores, las soluciones obtenidas por estos métodos merecen refinarse.

Las principales dificultades se presentan ante la posibilidad de que los jugadores cometan errores o duden de la racionalidad de los oponentes. Cadenas largas de retroinducción por la presencia de muchos jugadores, presuponen largas cadenas de supuestos de que cada uno sabe que el otro sabe, etc, consecuentemente la posibilidad de que algún jugador piense que alguno de sus sucesores olvide algo que es de *conocimiento público* aumenta y consecuentemente aumenta la posibilidad de un desvío de las *"estrategias racionales".*

En tanto que el método de resolución por subjuegos es una extensión de la retroinducción es vulnerable a las mismas críticas. Dificultades adicionales se presentan si pensamos en que en este caso, cada jugador espera que se juegue no sólo una estrategia que sea un equilibrio de Nash, sino además un único equilibrio de Nash.

Veamos algunos ejemplos que hacen referencia a las dificultades planteadas.

Ejemplo 28 ***(El juego del cien pies 1)*** *Algunas dificultades presentadas por probables fallas de la racionalidad. El conocido ejemplo del cienpies es ilustrativo en este sentido.*

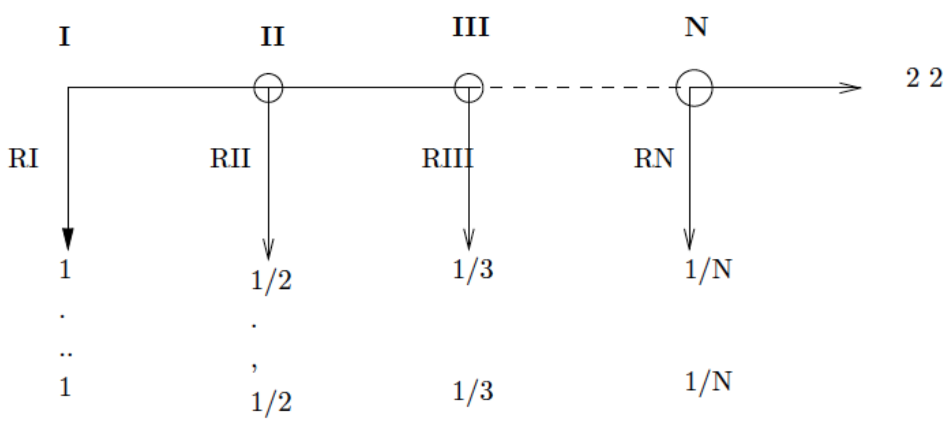


Fig. 28. El juego conocido como el cienpies.

El juego presentado en la figura anterior, es un juego con información perfecta, donde puede aplicarse la retroinducción, obteniendo como resultado que cada jugador i a su vez elegirá L_i.

Obteniendo como resultado que cada jugador ganará dos unidades.

No obstante si la cantidad de jugadores es amplia, las posibilidades de que cada uno elija una opción equivocada, y decida parar en su turno, aumenta. Si suponemos que la probabilidad de que cada jugador cometa un error con probabilidad $\epsilon > 0$, entonces la probabilidad de elegir correctamente será $p = 1 - \epsilon$, al llegar al i-ésimo jugador tendríamos que esta es p^i. Lo que hace que aumente la probabilidad de error en cada jugada siguiente.

La otra crítica que cabe es la referida a la cantidad de información que debe manejar cada jugador, si bien se supone que todo es del conocimiento público, pueden requerirse largas cadenas de conocimientos y queda abierta una posibilidad de distorsiones en la racionalidad, a partir de un mal manejo de la información.

El siguiente ejemplo muestra la posibilidad de que los jugadores, jueguen al menos hasta cierto momento, de manera *irracional*, es decir, fuera del equilirio perfecto en subjuegos:

Ejemplo 29 ***(El juego del cienpies 2)*** *Dos jugadores están realcionados en un proceso, en el que actúan alternativamente, con las siguientes características:*

- *Cada uno de ellos puede decidir parar en cualquier momento en que le toque jugar.*
- *Cada jugador dispone de dos estrategias puras:* C continuar o S parar.
- *Si decide continuar, entonces juega el otro.*
- *Cada jugador prefiere parar en la etapa t antes de que el otro pare en la etapa $t+1$.*
- *El juego finaliza luego de T períodos, si ninguno decidió parar antes.*

Formalmente las historias posibles para este juego son:

- *Secuencias del tipo $C(t) = (C, ..., C)$ en las que se juega C hasta la etapa $1 \leq t \leq T$*
- *Secuencias del tipo $S(t) = (C, ..., C, S)$ consistentes en $t-1$ repeticiones de C y en la etapa $t < T$ se juega S.*

- *Comienza jugando 1, y juega en cada etapa impar, mientras que el jugador* 2 *jugará en las etapas pares.*

- *Para cada jugador resulta la historia* $S(t+2)$ *preferida a la historia* $S(t)$ *y prefiere* $S(t)$ *a* $S(t+1)$ *para todo* $1 \leq t \leq T-2$.

- *El jugador que debe elegir en la útima etapa* T, *prefiiere* $S(T)$ *a* $C(T)$.

El juego tiene un único equilibrio de Nash el que es perfecto en subjuegos, onsiste en jugar siempre S. Para obtener este rsultado basta resolver el juego mediante el mecanismo de inducción hacia atrás.

Este equilibrio se fundamenta en que cada jugador cree que el oponente parará en el siguiente período, en cuyo cas prefiere parar él. No obstante en general este juego, se repite un cierto número de veces, hasta un momento en que alguno decide parar. Este resultado experimental muestra una contrdicción con la racinalidad asumida en los juegos perfectos en subjuegos. Cómo los jugadores se forman las creencias sobre la acción del oponente en el siguiente período es un asunto que no está para nada claro lo que atormenta a los especialstas.

13.5. El principio de optimalidad y equilibrios perfectos en subjuegos

Para verificar, cuando una combinación estratégica s, es un equilibrio perfecto en subjuegos, basta verificar la existencia de alguna historia h^t, para la que una desviación en una etapa t, de s_i por parte de algún jugador i, permita a dicho jugador obtener beneficios adicionales respecto de s_i.

Este principio llamado *principio de desviación en una etapa* es la base del conocido principio de optimalidad de la programación dinámica, que se basa en la inducción retroactiva, y muestra como la idea de perfección en subjuegos, extiende el referido mecanismo.

Veremos dos teoremas de aplicación del referido principio, uno válido para un juego con horizonte finito, y otro aplicable a juegos con horizontes infinitos.

Teorema 17 ***(Principio desviación en una etapa con horizonte finito)*** *En un juego multietapas, finito, la combinación estratégica* s *es un equilibrio perfecto en subjuegos, si y sólo* *si, satisface el principio de desviación en una etapa, esto es no existe ninguna estrategia $\bar{s}_i$ para algún jugador i, tal que coincida con s_i excepto en una sola etapa t, dada h^t, tal que $\bar{s}_i$ es mejor respuesta a s_{-i} que s_i condicionado a la historia h^t.*

Demostración La condición necesaria, (sólo si) se sigue de la propia definición de subjuego perfecto. [1]

Vamos ver que la condición es suficiente, esto lo haremos por el absurdo.Supongamos que la condición es satisfecha para s, pero que existe una estrategia $\bar{s}$, tal que dada la historia, $h^t, \bar{s}_i$, mejora a s_i como respuesta contra s_i para al menos un i en algún subjuego que comienza en h^t.

Sea $\bar{t}$ el mayor t' tal que para algún $h^{t'}, \bar{s}_i(h^t) \neq s_i(h^t)$, siendo el juego finito, $\bar{t}$ es finito. Además por el principio de desviación debe verificarse que: $\bar{t} > t$.

Introduzcamos la estrategia auxiliar s'_i con la particularidad de que: $s'_i(t) = \bar{s}_i(t),\ \forall t > \bar{t}$. Como s' y $\bar{s}$ por el principio de optimalidad s' y $\bar{s}$ ambas son equivalentes para el subjuego con inicio en t. Si $\bar{t} = t + 1$ s' y s, por el principio de desviación son equivalentes. Si $\bar{t} > t + 1$, construimos otra estrategia que coincide con $\bar{s}$ hasta $\bar{t} - 2$ y seguimos el razonamiento análogamente.[]

En el caso de horizonte infinito, el método no es suficiente, pues queda la posibilidad de mejorar, desviándose en una sucesión infinita . Probaremos que esto no ocurre cuando los retornos son continuos en el infinito. Denotaremos por h una historia con horizonte infinito, siendo h^t su restricción a las primeras t etapas.

Definición 46 *Un juego se dice continuo en el infinito, si para cada jugador i la función de utilidad u_i satisface:*

$$\sup_{h,\bar{h};s.t.h^t=\bar{h}^t} |u_i(h) - u_i(\bar{h})| \to 0,\ \textit{con } t \to \infty.$$

Esto dice que eventos en un futuro distante son relativamente poco importantes.

Teorema 18 ***(Principio de desviación en una etapa con horizonte infinito)*** *En un juego multietapas con horizonte infinito y utilidades continuas en el infinito, el vector estratégico s, es un equilibrio perfecto en subjuegos, si respeta el principio de desviación en una etapa, esto*

[1] Observe que la observancia del principio de desviación en una etapa no es prerrequisito para los equilibrios de Nash, pues como fue observado estos pueden no ser equilibrios perfectos de subjuegos, cosecuentemente pueden preescribir soluciones no maximizadoras en nodos inalcanzables para la estrategia en cuestión.

es no existe jugador i, para el que una estrategia $\bar{s}_i$ sea mejor respuesta que s_i para s_{-i}, dado h^t coincidente con s_i, excepto en t, y que condicionado a h^t sea mejor respuesta que s_i para s_{-i}.

Demostración: La prueba anterior establece la necesidad, y también prueba que, si s satisface el mencionado principio, entonces no existe estrategia que la mejore, desviándose en una cantidad finita de pasos en algún subjuego.

Supongamos que s no fuera un equilibrio perfecto en subjuegos. Entonces debe existir una etapa t, una historia h^t, un jugador i y una estrategia $\bar{s}_i \neq s_i$ tal que en el subjuego que comienza en h^t, $\bar{s}_i$ permita a i obtener un retorno mayor. Sea $\epsilon > 0$ el total de esta mejora. Por la continuidad en el infinito de las utilidades, existe una estrategia s'_i en el subjuego comenzado en h^t que coincide con $\bar{s}_i$ para todo estado anterior a t', y de aquí en adelante con la estrategia s_i debiendo mejorar a i, respecto de s_i en por lo menos $\epsilon/2$. Esto contradice al hecho de la no existencia de sucesiones que mejoren a i mediante una cantidad finita de desviaciones.[]

Capítulo 14

Juegos repetidos

En esta sección discutiremos la forma en que la repetición de un juego introduce nuevos equilibrios, permitiendo a cada jugador conocer como sus oponentes jugaron en etapas anteriores, es posible introducir castigos y recompensas, que permitan a los jugadores lleagar a equilibrios diferentes a los considerados hasta ahora. En particular, esta posibilidad puede dar lugar a la aparición de equilbrios cooperativos en un marco no cooperativo.

Los jugadores juegan en forma reiterada un mismo juego, siendo su retorno final un promedio ponderado de lo obtenido en cada etapa en que el juego se realiza. El modelo de juegos repetidos permite que las acciones anteriores influyan sobre las decisiones presentes, lo que abre las puertas al modelado de fenómenos de aprendizaje, de inversión en ciencia y tecnología, o de relación con el medio ambiente. El modelo de juegos repetidos es una buena aproximación teórica al análisis de relaciones de larga duración en ciencias políticas o sociales, contratos que se celebran en forma reiterada como los laborales o de alquiler de una vivineda, o juegos de reputación.

Es importante distinguir dos casos, cuando la repetición del juego es finita, y se conoce cuándo será la última repetición y cuando la repetición es infinita, o bien, cuando no se conoce cuál será la última etapa. En el primer caso no siempre es posible obtner como resultado el equilibrio cooperativo. Tal lo que sucede con el juego de los prisioneros cuando se repite una cantidad finita de veces. En la última etapa, ambos jugadores tendrán incentivos a traicionar, luego razonando por iducción hacia atrás concluimos que el único equilbrioperfecto en subjuegos es traicionar en cada etapa. Este resultado puede modificarse cuando no se conoce cuándo será la última etapa, en este caso los jugadores pueden pensar que siempre hay otro juego y que puede ser bueno colaborar con el otro durante una etapa más. Analizaresmo con detalle este cas más adelante.

14.1. El modelo

El juego que se repite es llamado el **juego estado**. Asumiremos que hay una cantidad n, finita de jugadores que mueven simultaneamente, siendo Φ_i el un conjunto finito de estrategias puras. En cada juego estado, el retorno del jugador i es representado por una función $R_i : S \to R$, siendo $S = \times_{i=1}^{I} S_i$. Como habitualmente S_i es el conjunto de estrategias mixtas correspondientes al juego estado $\Gamma = \{\Phi_1, ..., \Phi_n, R_1, ..., R_n\}$.

Dado que consideramos un juego que se repite, y que en cada momneto t cada jugador debe elegir que estrategia seguir, coniciendo las combianciones etratégicas previamente utilizdas, podemos definir un subjuego a partir de cada momento t de la misma manera qeu el subjuego que se inicia a partir de un nodo en un juego en forma extensiva. Por S^t representamos el producto cartesiano de las estrategias seguidas hasta el momento $t-1$. Por comodidad represntamos a $S^0 = \{0\}$. Un elemento de S^t se denomia histotia hasta e momento t y es represntatada por

$$h^t = (h^t(0), ..., h^t(t-1))$$

Con $,h^t(\tau)) \in S$ para todo $\tau < t$.

Para un juego, que cosnsiste en la repetición infnitaq de un juego estado, consideraremos la función objetivo para cada jugador como la suma ponderada

$$R_i^\delta(s) = (1-\delta) \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t R_i(s^t(h^t),$$

donde δ es un factor de descuento intertemporal. El factor $1-\delta$ es un factor de normalización, de forma tal que en el juego infinitamente al $i-$ésimo jugador si $R_i = 1$, le corresponda $u\delta_i = 1$. Representaremos a este juego por $\Gamma(\delta)$.

Como en cada período comienza un subjuego propio, para cada combinación estratégica s, e historia h^t podemos computar el retorno esperado por cada jugador a partir de t. El retorno a partir de t y hasta el final será: $(1-\delta)\sum_{\tau=t}^{\infty} \delta^{\tau-t} g_i(s^\tau(h^\tau))$.

Definición 47 *El retorno minmax de un jugador i está dado por:*

$$\underline{v_i} = \min_{s_{-i}\in S_{-i}} \max_{s_i\in S_i} g_i(s_i, s_{-i},),$$

representa, el nivel de retorno menor, al que los oponentes pueden hacer caer a i.

Usaremos m^i_{-i} para denotar una combinación estratégica, que es el castigo óptimo para i en el juego, es decir:

$$R_i(m_i, m^i_{-i}) = \max_{s_i\in S_i} R_i(s_i, m^i_{-i}) = \min_{s_{-i}\in S_{-i}} \max_{s_i\in S_i} R_i(s_i, s_{-i}) = \underline{\mathrm{v}}_i.$$

Observación: Si $\alpha^* \in S$ es un equilibrio de Nash para el juego de estado, (equilibrio estático), la estrategia en la que cada jugador, juega α^*_i permanentemente, es un equilibrio perfecto en subjuegos.

Veremos que no obstante lo dicho en la observación anterior, que, en juegos repetidos infinitamente, aparecen equilibrios de Nash diferentes a los preexistentes.

14.2. Equilibrios en juegos repetidos

Comenzaremos con el conocido juego llamado "dilema del prisionero".

Ejemplo 30 *La siguiente matriz, representa los retornos en el juego estado, correspondientes a las estrategias puras de cada uno de los dos jugadores, como siempre I elige filas y II columnas.*

	coop.	*no coop.*
coop.	$(1,1)$	$(-1,2)$
nocoop.	$(2,-1)$	$(0,0)$

Ambos jugadores son prisioneros acusados de un delito que cometieron. Si cooperan entre ellos y no confiesan el crimen ambos recibirán un retorno de $(1,1)$, si uno confiesa y el otro no, quien lo haga, es decir quien deje de cooperar con el otro recibirá un retorno equivalente a dos unidades de bienestar, mientras que, quien optó por la vía de no confesar recibirá un retorno negativo. Finalmente si ambos confiesan, el retorno para ambos será igual a cero.

Evidentemente el único equilibrio de Nash en el juego estado, corresponde a la estrategia $(no\ coop., no\ coop.)$. Observe el lector que la cominación estratégica

$$s^t = \{(no\ coop., no\ coop), ..., (no\ coop., no\ coop)\}\ \forall 0 < t < T$$

es la única que corresponde a un equilibrio den Nash si el juego se repite una cantidad finita de veces igual a T.

Veamos que pasa si el juego se repite infinitamente:

Para un factor de descuento $\delta > \frac{1}{2}$, la siguiente estrategia es un equilibrio de Nash. "Cooperar en el primer período y continuar así hasta que el otro deje de hacerlo, en ese caso y hasta el final dejar de cooperar".

Se presentan dos opciones, o bien ambos juegan $(coop, coop)$ y reciben un retorno igual a 1. O bien uno deja de cooperar en el período t, y recibirá un retorno igual a: $(1-\delta)(1+\delta+...+\delta^{t-1}+2\delta^t+0+... = 1-\delta^t(2\delta-1)$. Dicho retorno será menor que 1, si $\delta > \frac{1}{2}$.

Obsérvese que si el otro jugador deja de usar la estrategia planteada, recibirá un retorno igual a -1, a partir de t, mientras que si se guía por ella el retorno a partir de este momento será igual a cero.

Por otra parte, como ya fue dicho, jugar cada vez una estrategia que representa un equilibrio de Nash, es un equilibrio perfecto en subjuegos. Por lo tanto en este caso la estrategia siempre *nocoop* es un equilibrio perfecto en subjuegos, y será el único que su implementación no depende de lo que haya sucedido antes.

Denotaremos por $S = \times_{i=1}^{n}$ el producto cartesiano de las estrategias mixtas posibles de definir sobre el juego $\Gamma = [A_1, ...A_n, R_1, ..., R_n\}$.

Un elemento de $S^t = \times_{t=0}^{t-1} S$ es llamado historia hasta el tiempo t y es denotado por

$$s^t = (s^t(0), ..., s^t(t-1))$$

con $s^t(\tau) \in S$ y para todo $\tau < t$ siendo $S^0 = \{0\}$ (no hay historia antes de $t = 1$).

Definición 48 *Un camino es una sucesión de estratetegias* $\{s^t\}_{t=0}^{\infty}$ *con* $s^t \in S$ *para cada* t *que completa una historia.*

Podemos dar la siguiente caracterización de **camino de equilibrio de Nash** para juegos repetidos infinitamente.

Teorema 19 *Sea* $s^{\infty} = \left\{s^t\right\}_{t=0}^{\infty}$ *un camino.* s^{∞} *es un equilibrio de Nash si y solo si la amenaza de jugar la estrategia minmax es sufiente para detener cualquier desviación.*

Demostración: El camino π^{∞} es un camino de equilibrio si y sólo si la combinación estratégica $s^{\infty}(h)$ descrita por:

$$
\begin{aligned}
&s(h^0) = 0 \\
&s(h^t) = \begin{cases} m_{-i}^i & \text{si } h_i^t(t-1) = m^i \text{ o bien si } h_i^t(t-1) = s_i \text{ con } s_i \neq \pi_i^{t-1} \\ \pi^t & \text{en otro caso.} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

ofrece un retorno

$$u_i(s(h)) = (1-\delta)\left[\sum_{t=0}^{T-1} \delta^t R_i(\pi_i, \pi_{-i}) + \delta^T \max_{s_i \in S_i} R_i(s_i, \pi_{-i}) + \sum_{t=T+1}^{\infty} R_i(m^i, m_{-i}^i)\right] \leq u_i(\pi^{\infty}).$$

Se supone que el jugador i se desvía en la etapa T buscando un resultado mejor.

Resulta entonces, que π^{∞} es un camino de equilibrio si y solo si la amenanza de castigar lo máximo posible, al jugador que se desvía, en todo juego posterior a las desviación es suficiente para detenerlo.

Terminaremos esta sección probando la teoremas conocidos como "teoremas del folclore" (Folk Theorems). Se denominan así porque eran muy conocidos y utilizados, pero no estń atribuidos a nadie en particular.

Ellos aseguran que en juegos repetidos infinitamente, si los jugadores son suficientemente pacientes, existe una estrategia de equilibrio que les permite alcanzar cualquier equilibrio factible e individualmente racional.

El siguiente ejemplo servirá para aclarar el concepto de conjunto factible e individualmente racional.

Ejemplo 31 ***(Cálculo de valores minmax)*** *La matriz de retornos para un juego con dos* *jugadores es la siguiente:*

	L	R
U	$(-2,2)$	$(1,-2)$
M	$(1,-2)$	$(-2,2)$
D	$(0,1)$	$(0,1)$

Vamos a obtener el valor minmax para el jugador I.

Para esto consideremos los retornos posibles de I, en función de q, siendo q la probabilidad que el jugador II asignará a L, así: $P(L) = q;\ P(R) = 1 - q$.

$$\begin{aligned} v_U(q) = &\quad -2q + 1(1-q) = \quad -3q + 1 \\ v_M(q) = &\qquad\quad 3q - 2; \\ v_D(q) = 0. \end{aligned}$$

Independientemente de lo que haga II, el jugador I puede obtener un retorno igual a cero, este es el valor minmax, o valor de reserva para I.

Obsérvese que $max\{v_M(q), v_U(q)\} \leq 0$, para todo $q \in [1/3, 2/3]$. El máximo castigo se alcanza cuando $q = \frac{1}{2} = m_{-1}^1$ para lo que se obtiene

$$v_U(\frac{1}{2}) = v_M(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

De obtener lo cual puede resguardarse jugando D por lo tanto: $R_1(D; m_{-1}^1) = 0$. Resulta $D = m_1$.

Análogamente el valor de reserva para el jugador II será: De acuerdo a las probabilidades con que I juegue, II puede obtener los siguientes resultados.

$$\begin{aligned} v_L &= \quad 2(p_U - p_M) + (1 - (p_U + p_M) \\ v_R &= \ -2(p_U - p_M) + (1 - (p_U + p_M) \end{aligned}$$

$v_2 = \text{mín}_{p_U, p_M} \left[max\{v_L, v_R)\} \right].$

Por lo tanto: $\underline{v_2} = 0$, o sea que $m_{-2}^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, obtenemos $R_2(m_2, m_{-2}^2) = 0$ siendo m_2 indistantamente L o R.

Observación: El retorno esperado para el i-ésimo jugador, en un juego repetido nunca será inferior a $\underline{v}_i$, independientemente del factor de descuento, pues:

$$R_i(mi_{-i}) = \frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta}\sum_{t=0}^{T}\delta^t v_i.$$

Entenderemos por **retornos factibles** a aquellos retornos $r = (r_1, \ldots, r_n)$, que pueden ser alcanzados por combinaciones convexas de estrategias puras. Denotaremos con $\mathcal{V}$, al conjunto de tales vectores, así,

$$\mathcal{V} = \text{ cápsula convexa } \{r \in R^n : \text{ existe } a \in A; g(a) = r\}.$$

El subconjunto de vectores factibles, que dejan a todos los jugadores en un nivel superior de bienestar que el que corresponde a sus valores minmax, $v_i > \underline{v}_i$, es llamado conjunto de **retornos individualmente racionales.**

Para el ejemplo tratado recientemente la figura siguiente muestra el conjunto factible, siendo el área sombreada el correspondiente a los retornos individualmente racionales.

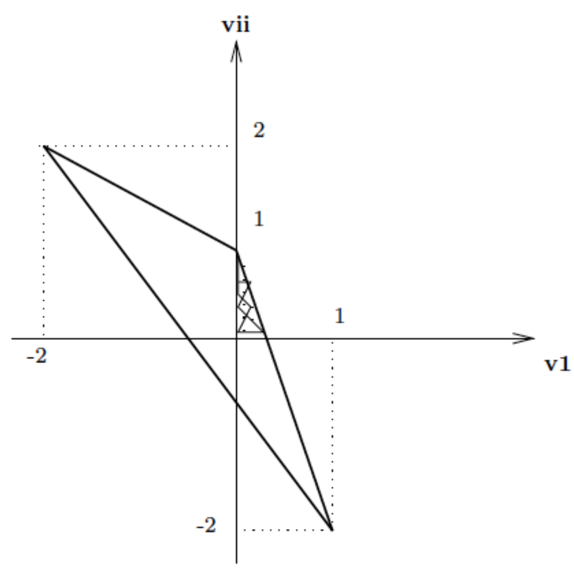


Fig. 29. Area Factible. En rayado, el area Individual mente Racional.

Demostraremos a continuación dos importantes teoremas, que por mucho tiempo fueron de trasmisión oral en teoría de juegos, habiendo pasado mucho tiempo antes de que fueran impresos. A falta de otra traducción para "Folk Theorems", usamos la de "teoremas del folclore".

Teorema 20 ***(Folk Theorem)*** *Para todo vector* v, *individualmente racional, existe* $\underline{\delta} < 1$ *tal que para todo* $\delta \in (\underline{\delta}, 1)$ *existe un equilibrio de Nash de* $G(\delta)$ *con retornos* v.

Observación: Un jugador es más paciente cuanto más próximo a uno se encuentra su factor de descuento δ. El factor de descuento da una idea de la importancia relativa que tiene el futuro, para el jugador, el expresar mayor o menor peso respecto para utilidades futuras. La intuición del teorema es clara. Para un jugador suficientemente paciente, cualquier ganancia finita en un período es sobrepasada por pérdida futuras, aunque sean pequeñas, en cada uno de los subsecuentes períodos. Para la prueba del teorema construiremos una estrategia implacable, *todo jugador que se desvíe será minimaximizado en todo período futuro.*

Demostración: Sea $v > \underline{v}$ un vector factible de retornos. Consideremos primeramente el caso en que existe una combinación estratégica $a \in \Phi$, tal que $v = R(a)$. Consideremos la siguiente estrategia para cada jugador i :

"Jugar a_i en $t = 0$, y continuar así si nadie se desvía. En caso contrario, esto es si por ejemplo se desvía i los otros jugadores elegirán m_i^{-1} desde entonces hasta el final del juego". Puede algún jugador mejorar desviándose de esta estrategia?

Si el jugador i se desvía en t obtendrá a lo sumo el retorno:

$$F(\delta) = (1-\delta)\sum_{h=0}^{t-1} \delta^t v_i + \delta^t (1-\delta) \max_{a_i \in \Phi_i} R_i(a_i, a_{-i}) + \delta^{t+1} \underline{v}_i.$$

Siendo $\max_{a_i \in \phi_i} R_i(a_i, a_{-i}) = K$, el máximo retorno que i puede obtener.

Puede verse fácilmente que tan pronto cuanto δ exceda un cierto valor crítico, $\underline{\delta_i}$, entonces $F(\delta) \leq v_i$. Para obtener el δ crítico basta hallar δ tal que: $F(\delta) = \delta^t v_i$, equivalentemente $(1-\delta)\max_{a \in \Phi_i} R_i(a_i, a_{-i}) + \delta \underline{\mathrm{v}}_i = v_i$. Como $\underline{v_i} < v_i$, se sigue que $\underline{\delta_i} \leq 1$. Tomando $\delta = \max_i \underline{\delta_i}$ completamos el argumento.[]

En caso de que v no pueda alcanzarse con estrategias puras, siendo v factible, podrá hacerse una elección aleatoria de estrategias puras $a(w)$ tales que $E_a g(a(w)) = v$.

En tanto que v es un valor esperado, un jugador puede sentir mayor tentación a cambiar la estrategia, en aquellos estados de la naturaleza en que el valor de la variable aleatoria $R(a(w))$ sea relativamente bajo.

En este caso basta elegir el δ crítico, $\underline{\delta_i}$ tal que verifique la siguiente igualdad:

$$(1-\delta)\max_{a_i\in\Phi_i} R_i(a_i,a_{-i})+\delta\underline{v_i}=(1-\delta)\min R_i(a(w))+\delta v_i.[]$$

Observación: En la estrategia considerada, un único desvío por parte de un jugador, provoca una inmediata respuesta de castigo por parte de todos los otros jugadores. Esto es posible si el costo de tal punición es bajo. En determinados casos, como el de los oligopolios de Cournot, penalizar a quien se desvía supone aumentar la producción para bajar los precios en forma tal que pueden ser inferiores a los costos.

A esta situación se llega porque las estrategias de equilibrio que permiten obtener un retorno individualmente racional, no componen necesariamente un equilibrio perfecto en subjuegos.

El siguiente teorema, garantiza que a partir de un cierto δ mínimo, esto es, a partir de un grado mínimo de paciencia por parte de los jugadores, puede obtenerse para cualquier retorno individualmente racional, una estrategia que será un equilibrio perfecto en subjuegos y permitirá alcanzarlo.

Teorema 21 ***(Folk Theorem)****[J. Fridman (1971)]Sea α^* un equilibrio estático (un equilibrio del juego estado) con retorno e. Entonces para cualquier $v\in V$, con $v_i>e_i$ para todos los jugadores i, existe un $\underline{\delta}$ tal que si $\delta>\underline{\delta}$ existe un equilibrio perfecto en subjuegos para $G(\delta)$ con retornos v.*

Demostración: Asumiremos que existe $a\in\Phi=\times_{i=1}^n\Phi_i$ para la que $R(a)=v$. Si no existe tal estrategia pura una aleatorización en el conjunto de las estrategias puras ϕ, nos permitirá acceder a v. Consideremos la siguiente estrategia:

- “En $t=0$ cada jugador juega acorde con a, y se sigue así en tanto no haya desvíos. Si los hubiera se juega α^* hasta el final.

Esta estrategia es un equilibrio de Nash para $\Gamma(\delta)$ con δ suficientemente grande, pues en este caso: $(1-\delta)+\delta e_i<v_i$, la desigualdad estricta sigue del hecho de que la misma se obtiene

en el límite para $\delta \to 1$. Es además un equilibrio perfecto una vez que se jugará α^* en todo camino que no sea el del equilibrio.[]

Observación El resultado del teorema de Fridman es más débil que el anterior, excepto para juegos donde el valor minmax sea un equilibrio.

Los dos últimos teoremas, caracterizan el comportamiento de los equilibrios cuando δ es suficientemnete grande. Es de interés también determinar las características del conjunto de equilibrios para δ relativamente pequeños.

Los teoremas anteriores parecen advertirnos sobre la posibilidad de que existan muchos equilibrios (quizás más que los deseados). El lector interesado podrá encontrar un tratamiento cuidadoso del tema en [D. Fudemberg and J. Tirole (1991)].

Capítulo 15

Juegos con información incompleta

Cuando alguno de los jugadores no conoce alguna de ls características que determinan un juego, como ser las funciones de retorno de alguno de los otros jugadores, sus estrategias posibles o preferencias, decimos que estamos ante un **juego con información incompleta.** La inceretidumbre de los jugadores sobre las características de los demás se modelan introduciendo un conjunto Ω de posibles *"estados de la naturaleza"*. Asumiremos que este conjunto de estados es finito y que cada jugador tiene ciertas "creencias a priori" sobre estos estados de la naturaleza, definidas por una probabilidad p_i sobre Ω

Asumimos que los jugadores antes de elgir su estrategia, observan una sñal, τ_i que es función del estado de la naturaleza. Es decir $\tau_i(w)$ es una señal que observa el jugador cuando el estado es W. Supongamos que T_i es el conjunto de valores posibles que la funación $\tau : \Omega \to T_i$ puede asumir. mientras que $\tau^{-1} : T_i \to 2^{\Omega}$ es decir que para cada valor t_i que asume la señal $\tau_i^{-1}(t_i) \in 2^{\Omega}$. Siendo $p_i(\tau^{-1}(t_i)) > 0$ el jugador i reconoce, una vez que es el estado se realizó y observó la señal t_i. que se encuentra en algún estado $w \in \tau^{-1}(t_i)$. En el caso en que $\tau_i(w) = w, \forall\, w \in \Omega$ el jugador tiene información completa.

En general a partir de la observación de la señal, podrá definir una probabilidad posterior:

$$p_i(w/t_i) = \frac{p_i(w)}{p_i(\tau_i^{-1}(t_i))}.$$

Definición 49 *Un juego bayesiano consiste en*

- *Un conjunto finito de jugadores, indexados por* $i \in \{1, ...n\}$

- *Un conjunto finito de estados de la naturaleza* Ω
- *y para cada jugador:*
    - *Un conjunto* A_i *de acciones.*
    - *Un conjunto de señales,y una función* $\tau_i : \Omega \to T_i$.
    - *Una función de probabilidad* a- priori *sobre los estados de la naturaleza, tal que* $p_i(\tau^{-1}(t_i)) > 0 \; \forall \; t_i \in T_i$.
    - *una relación de preferencias sobre* $A \times \Omega$ *siendo* $A = \times_{i=1}^{n} A_i$.

Dado que cada jugador elegirá su estrategia teniendo en cuenta la señal observada,nos referiremos a cada jugador mediante (i, t_i) y diremos que el jugador i es del tipo $t : i$.

Definición 50 ***(equilibrio bayesiano)*** *Un equilibrio de Nash de un juego bayesiano (o equilibrio bayesiano) es un equilibrio de Nash que se define como sigue:*

1. *El conjunto de jugadores está definido por los pares* $(i, t_i), \; t_i \in T_i, i \in \{1, ..., n\}$.
2. *El conjunto de acciones de cada* (i, t_i) *es* A_i
3. *Las preferencias* $\succeq_{(i,t_i)}$ *sonbre* A_i *donde*

$$a \succeq_{(i,t_i)} b \Leftrightarrow L_i(a, t_i) \succeq_i L_(b, t_i)$$

4. $L_i(a, t_i)$ *es la lotería definida sobre* $A \times \Omega$ *que asigna probabilidad* $p_i(w)/P_i(\tau^{-1}(t_i))$ *al perfil estratégico* $(a_1(\tau_1(w)), ..., a_n(\tau^n(w)))$ *para cada* $w \in \tau_i^{-1}(t_i)$ *y cero en otro caso.*

En [E. Van Damme (1991)] define a los tipos de cada jugador $\{\theta_i\}_{i=1}^{n}$ como una variable aleatoria para la que existe una distribución de probabilidad objetiva, $p(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ para θ_i perteneciente a un cierto espacio Θ_i que tiene una cantidad de elementos $\#\Theta_i$ finita, θ_i es observado unicamente por el jugador i. $p(\theta_{-i}|\theta_i)$ denota la probabilidad condicional de que sus oponentes sean del tipo $\theta_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1} \ldots, \theta_n)$ dado que el es del tipo θ_i. Asumimos que $p(\theta_i) > 0$, $\forall \theta_i \in \Theta_i$.

Para completar la descripción de *Juegos Bayesianos* nos falta especificar un espacio de estrategias puras S_i y las funciones de retorno $R_i(s_1, \ldots, s_n, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ con $s_i \in S_i$, para todo $i = (1, 2, \ldots, n)$.

Podemos ahora dar la siguiente definición de **equilibrio bayesiano.**

15.1. Equilibrio bayesiano

Definición 51 *Un **equilibrio bayesiano** en un juego con información incompleta, un número finito de tipos θ_i, para cada jugador i, una distribución a priori p, y un conjunto de estrategias puras S_i, es un equilibrio de Nash en el espacio de estrategias puras definido por los los mapas $\Psi : \Theta_i \to S_i$.*

Una estrategia $s(\cdot)$ es un equilibrio bayesiano si para cada jugador i,

$$s(\cdot) \ \in arg \max_{s_i'(\cdot) \in S_i^{\Theta_i}} \sum_{\theta_i} \sum_{\theta_{-i}} p(\theta_i, \theta_{-i}) u_i(s_i'(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), (\theta_i, \theta_{-i})).$$

Como cada tipo tiene probabilidad positiva, *ex ante* formulación es equivalente a que el jugador i maximice su utilidad condicional a θ_i para cada θ_i :

$$s(\theta_i) \ \in arg \max_{s_i' \in S_i} \sum_{\theta_{-i}} p(\theta_i | \theta_{-i}) u_i(s_i', s_{-i}(\theta_{-i}), (\theta_i, \theta_{-i})).$$

La existencia del equilibrio bayesiano, es una consecuencia inmediata del teorema de existencia del equilibrio de Nash.

Ejemplos de juegps bayesianos.

Ejemplo 32 *Como un caso particularmente simple de juego con información incompleta consideremos una industria con dos firmas. Una establecida, jugador I, y la otra potencial entrante, jugador II. I decide cuando construir una nueva planta, simultaneamente, II decide si entra o no. Suponga que II duda sobre si el costo de I para construir la nueva planta es 3 o 0, mientras que I conoce su propio costo. Las siguientes matrices representan los retornos.*

·	Entra	No Entra
Constr.	$0, -1$	$2, 0$
no Constr.	2.1	$3, 0$

Retornos si los costos de construcción son altos.

·	Entra	No Entra
Constr.	$3, -1$	$5, 0$
no Constr.	$2, 1$	$3, 0$

Retornos si los costos de construcción son bajos.

En este caso los retornos de II dependen de si I construye o no, pero no están directamente influenciados por los costos de I. Nótese también que I tiene "construir" como estrategia dominante si su costo es bajo, y "no construir" si el costo es alto.

La estrategia de II queda supeditada, en este caso, exclusivamente a la probabilidad apriori p_1, que le asigne a que I sea de costo alto. Si $p_1 < \frac{1}{2}$ entra y no entra si $p_1 > \frac{1}{2}$.

El análisis se complica si el jugador II tiene 1.5 como bajo costo, en lugar de 0, como anteriormente. En este juego no construir sigue siendo una estrategia dominante cuando I tiene alto costo. No obstante si su costo es bajo, la estrategia óptima de I, dependerá de la probabilidad y apriori que asigne a II de entrar. Construir es mejor que no construir si:

$1.5y + 3.5(1-y) > 2y + 3(1-y)$, o, $y < \frac{1}{2}$.

El jugador I debe tratar de predecir el comportamiento de II, al elegir su propia acción, y el jugador II no puede inferir el comportamiento de I solamente por lo que sabe de I.

Harsanyi propone tratar este caso, introduciendo una movida anterior de la naturaleza, que determina el tipo de I (su costo), y el juego de información incompleta para II sobre los costos de I, se transforma en un juego de información imperfecta sobre las movidas de la naturaleza, que puede analizarse con técnicas habituales.

Ejemplo 33 *Concurrencia de Cournot, con Información Incompleta.*

Consideremos un duopolio, donde las firmas tienen las siguientes funciones de utilidad: $u_i = q_i(\theta_i - q_i - q_j)$, *donde* θ_i. *Es de conocimiento público que* $\theta_1 = 1$ *pero la firma 2, tiene* *información privada sobre θ_2. La firma 1 cree que $\theta_2 = \frac{3}{4}$, con probabilidad $\frac{1}{2}$ $\theta_2 = \frac{5}{4}$, con probabilidad $\frac{1}{2}$. Las dos firmas eligen su producción simultaneamente.*

Denotamos por q_1 al producto de la firma 1. q_2^L representa el producto de 2, si $\theta_2 = \frac{3}{4}$, q_2^L en el otro caso. La elección $q_2(\theta_2)$ de la firma 2, debe satisfacer:

$q_2(\theta_2) \in arg\,\text{máx}_{q_2}\{q_2(\theta_2 - q_1 - q_2)\} \Rightarrow q_2(\theta_2) = (\theta_2 - q_1)/2.$

La firma 1 no conoce el tipo de la firma 2, su retorno será entonces un retorno esperado sobre el tipo de la firma 2:

$q_1 \in arg\,\text{máx}_{q_1}\{\frac{1}{2}q_1(1 - q_1 - q_2^H) + \frac{1}{2}q_1(1 - q_1 - q_2^L)\} \Rightarrow q_1 = \frac{2-q_2^L-q_2^H}{4}.$

Sustituyendo adecuadamente obtenemos que: $(q_1 = 1/3, q_2^L = 11/24, q_2^H = 5/24)$ es un equilibrio bayesiano.

Bibliografía

[Accinelli et al, (2015)] "Nash Equilibrium in Evolutionary Competitive Models of firms and workers". E. Accinelli, B, Bazzano, F. Robledo and P. Romero Vol. 2, no. 1 pp 1-32. Journal of Dynamics and Games.

[Accinelli y Vaz, (2013)] "Introducción a la teoría de juegos". E. Accinelli y D. Vaz. Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de la República. Nota Docente No. 03.

[R. J. Auman, (1989)] "Lectures in Game Theory". *Westview Press, Inc, Serie Underground Classics in Economics* Cap.1.

[C. Berge, (1963)] "Topological Spaces".*New York: Macmillan.*

[D. Bernuolli,(1730)] "Exposition of a New Theory on Measurement of Risk".

[J. Bertrand (1883)] " Théorie Mathématique de la Richesse Sociale". *Journal des Savants,* 499 - 508.

[E. Borel, (1921)] "La Théorie du Jeu et lae Equations Integrals a Noyau Symétrique" *Comptes Rendues Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences* **173** 1304-1308.

[E. Borel, (1938)] "Applications aux Jeux de Hasard". *Traité du Calcul des Probabiltiés et ses Applications,* Gauthier-Villar, París.

[A. Cournot, (1897)] "Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth".*Macmillan: New York.*

[G. Debreu (1970)] "Economies with a Finite Set of Equilibria".*Econometrica,* **38**.

[J. Fridman (1971)] "A Noncooperative Equilibrium for supergames" *Review of Economics Studies* **38** 1-12.

[D. Fudemberg and J. Tirole (1991)] "Game Theory". *Mit Press.*

[J.C. Harsanyi (1973)] "Odness of the number of Equilibrium Points: a New Proof". *International Journal of Game Theory* **2.** 1-23

[C. Huang and R. H. Litzemberger (1988)] "Foundations for Financial Economics". *Prentice - Hall, Inc.*

[D. M., Kreps and R. Wilson (1982)] "Sequential Equilibria." *Econométrica* **50**. 863-894.

[H. Kuhn. (1953)] "Extensive Games and the Problem of Information".*Annals of Mathematics Studies* **28**. Princeton Universty Press.

[R. D. Luce and H. Raifa (1989)] "Games and Decisions. Introduction and Critical Survey", *Dover Publications, Inc., N.Y.*.

[A. Mas-Colell (1985)] "The Theory of General Equilibrium: A Differentiable Approach". Cambridge University Press.

[R. B Myerson (1978)] "Refinements of the Nash Equilibrium Concept". *Internationa Journal of Game Theory;* **7** 73-80.

[O. Morgenstern, J. von Neumann(47)] "Theory of Games and Economyc Behavior". *The Review of Economics Statstics,* **39**

[J. Nash, (1959)] "Non-Cooperative Games". *Annals of Mathematics,* **54, 2.**

[J. Osborne, Rubinstein A.] A Course in Game Theory. Mit Press 1994.

[J.B., Rosen (1965)] "Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave n-Person Games".*Econometrica.* **33,** 520-534.

[L. Shapley (1953)] "A Value for N-Person Games" *Contributions 10 the Theory of Games ll.* H. W. Karlin. A. W. Tucker. editores, Princeton, Princeton University Press.

[R. Selten (1975)] "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games" . *International Journal of Game Theory"* **4** 25-55.

[J. Von Neumann (1928)] "Zur Theorie der Gesselschaftsspiele". *Mathematische Annalen,* **100,** 295 - 320.

[E. Van Damme (1991)] "Stability and Perfection of Nash Equilibria". *Springer Verlag.*

[R. Wilson (1971)] "Computing equilibria of n person games". *SIAM Journal of Applied Mathematics,* **21** 80-87.

[E. Zermelo (1913)] Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf der Theorie des Schachspiels. In *proceeding of the Fifth International Congress on Mathematics.*