UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSI
FACULTAD DE ECONOMÍA

CUADERNO DE TRABAJO

No. 17

¿Hay una mejor teoría para tomar decisiones bajo incertidumbre?

Febrero 2013

LEOBARDO PLATA PEREZ

¿Hay una mejor teoría para tomar decisiones bajo incertidumbre?

Leobardo Plata Pérez*

UASLP, México

Resumen

En este trabajo nos cuestionamos ¿hay una mejor teoría para modelar decisiones bajo incertidumbre? ¿Cuál el estatus de la racionalidad limitada de Simon, teoría alternativa o complementaria a la teoría tradicional de Von Neumann y Morgenstern,?.¿Cuál ha sido el papel de la teoría de prospectos?. Analizamos algunas paradojas para explicar extensiones y alternativas a la teoría VNM. Sostenemos que la racionalidad limitada de Simon es una alternativa que complementa a VNM, no es una teoría antagónica. La teoría de prospectos de Kanheman y Tversky ha generado la economía del comportamiento. Presentamos resultados experimentales tipo Paradoja de Allais. Introducimos las bases de una nueva línea de investigación para estudiar decisiones bajo incertidumbre de modo cualitativa y poco basado en calculos numéricos.

Palabras clave: teoría de la decisión, teoría VNM, racionalidad acotada, paradoja de Allais, teoría de prospectos, paradoja de Ellsberg, axioma de independencia.

JEL. D81, D01, D20, B29, B41

¿Is there a best theory for take decisions under uncertainty?

Abstract

In this work we ask ¿is there a best model for uncertainty decisions? ¿Which is the status of Simon bounded rationality: an alternative or complentary to traditional VNM theory?.¿What has been the place of Prospect Theory?. We analize some paradoxes in order to explain some extentions and alternatives to VNM Theory. We sustain that Simon´s bounded rationality complements VNM theory, it is not an antagonic theory. The Prospect Theory of Kanheman y Tversky has been generated modern behavioral economics. We present experimental results of Allais type. We introduce the bases for a new manner to explain uncertainty decisions in a cualitative framework, with few base of numerical calculus.

Key Words: Decision theory, VNM Theory, bounded rationality, Allais Paradox, Prospect Theory, Ellsberg Paradox, indendence axiom.

*Facultad de Economía, UASLP. Av. Pintores s/n. Colonia Burócratas del Estado. San Luis Potosí, SLP. Correo electrónico lplata@uaslp.mx El autor agradece el financiamiento parcial a través del Proyecto CONACYT de Ciencia Básica 82610.

Introducción.

Iniciemos explicando el contexto de las decisiones bajo incertidumbre. El agente que enfrenta una decisión en donde interviene el azar enfrenta dos momentos temporales relevantes: el momento del *acto* de la decisión (t=0) y el momento en que lo aleatorio se realiza, aparecen los resultados y las *consecuencias* de la decisión (t=1). En el primer momento el agente debe tomar una decisión, dentro de las alternativas a su disposición ya sean acciones posibles o estrategias de comportamiento, para ello serán muy relevantes la información de que dispone, las reglas del entorno y su propia valoración sobre los resultados posibles, lo cual tiene que ver con su preferencia sobre las consecuencias posibles de sus actos. Es también importante resaltar un segundo aspecto relacionado con el contexto de la incertidumbre. Casi todos los modelos que han aparecido hasta ahora hacen la distinción entre decisiones *bajo riesgo* y decisiones *bajo incertidumbre*. En el primer caso, el agente que decide conoce la distribución de probabilidad que gobierna los resultados posibles del componente aleatorio involucrado en su decisión. En el segundo caso, decisiones bajo incertidumbre, el agente no conoce la distribución de probabilidad que enfrenta. En ambos casos, suponemos que hay una *distribución de probabilidad fija*, que gobierna el componente aleatorio involucrado en la decisión, sea bajo riesgo o bajo incertidumbre pura. Es bastante natural pensar también en un contexto de interacción donde la *distribución de probabilidad no es fija*, es más bien dinámica en el sentido de que se va modificando y retroalimentando con las acciones de los propios agentes que toma decisiones observando esta distribución dinámica. Esta es una posibilidad muy interesante que no será explorada en este trabajo.

En este trabajo hacemos un breve recorrido no exhaustivo sobre los principales modelos que intentan responder una de las preguntas fundamentales de la teoría económica: ¿cómo se explica la manera en que los individuos toman decisiones cuando enfrentan entornos de incertidumbre?. La pregunta es muy general y no podemos decir que actualmente se tenga una única explicación ampliamente consensuada. El tema es importante, la respuesta a la pregunta planteada modifica de modo fundamental la construcción y conclusiones de la mayoría de modelos que se construyen para explicar los fenómenos económicos. Hemos decidido realizar el trabajo siguiendo una metodología con raíces en el filósofo del falsacionismo: Karl Popper. De este modo, intentamos dar seguimiento al avance y desarrollo de la teoría a lo largo del tiempo, vemos las explicaciones propuestas para la pregunta básica y a las críticas a las mismas. Siguiendo este enfoque hemos visto desfilar una gama de nuevas y mejores explicaciones. Hemos decidido tomar como ancla a las distintas paradojas y ejemplos, que han permitido el desarrollo de posibles explicaciones a la pregunta de cómo es que los agentes toman decisiones bajo incertidumbre. Nos restringimos al caso más sencillo de decisiones bajo riesgo. Hay que reconocer que los otros dos casos citados arriba requieren de mayor elaboración para su elucidación.

Iniciamos con la Paradoja de San Petsburgo, la cual pone de relieve la importancia que tiene, para cualquier modelo de conducta económica individual, la modelación de las preferencias sobre las consecuencias monetarias de las acciones. Ello permitió entender y modelar matemáticamente las actitudes de los individuos hacia dinero, la utilidad que genera cada cantidad monetaria difiere de individuo a individuo. Con ello se puede explicar porqué un individuo compran billete de lotería y otros no cuando ambos tienen la misma cantidad de dinero y viven situaciones económicas similares. Después de una breve explicación de la teoría clásica de von Neumann y Morgenstern de 1947 pasamos a la paradoja de Allais que ha sido una de las principales críticas desde los inicios de la teoría VNM. Esta teoría explica el proceso de decisión bajo incertidumbre como la maximización de la esperanza matemática de las utilidades de las consecuencias de las acciones disponibles en la decisión. Este enfoque proviene de la idea general, tradicional en la teoría económica, de que los procesos de decisión se pueden representar como maximizaciones de funciones de utilidad, las cuales son representaciones numéricas de preferencias sobre las que se imponen condiciones de conducta para que sean consistentes internamente con la maximización de la función numérica. De este modo la maximización de la utilidad representa una maximización de preferencias consistentes con los requisitos impuestos. La paradoja de Allais nos muestra casos experimentales donde la decisión de la mayoría de los agentes es inconsistente con lo postulado por la teoría VNM. En particular, el axioma más atacado por los críticos ha sido el axioma de independencia, el cual es fundamental para obtener la valoración de las loterías como la esperanza matemática de las utilidades de cada resultado ponderada por sus respectiva probabilidad.

A partir de la Paradoja de Allais se han venido desarrollando una serie de interesantes modificaciones al esquema inicial de la teoría VNM. Se puede consultar Machina (1987) quien expone una serie de modificaciones del axioma de independencia y las consecuencias de ello. Recientemente han aparecido también dos interesantes trabajos panorámicos. El de Sudgen (2004) hace un muy buen análisis de los fundamentos de la problemática desde una perspectiva metodológica muy amplia. Por otro lado, Schmidt (2004) presenta un recuento de los principales desarrollos formales. En este trabajo hemos decidido abordar tres líneas de avance. La primera es la teoría de prospectos que nace a partir del trabajo Kanheman y Tversky (1979). Estos autores han sido fundamentales para el desarrollo de la economía experimental, el primero de ellos recibió el premio nobel de economía en 2002. A partir de este trabajo se pone de manifiesto la relevancia de aspectos como el contexto y las actitudes emocionales en las decisiones bajo incertidumbre. A través de su teoría de prospectos proponen una posible solución a la Paradoja de Allais, ésta consiste en una modificación de la forma de valorar la utilidad esperada, basada en la modificación de las probabilidades extremas y en el hecho de que las pérdidas bajan más rápido la utilidad que lo que las ganancias la incrementan. Esto abre una veta de nueva investigación donde la teoría económica de las decisiones incorpora importantes aspectos provenientes de la psicología que habían sido ignorados por los economistas neoclásicos tradicionales.

La segunda línea que abordamos está asociada con el concepto de racionalidad limitada propuesto por Simon (1955). Este autor lanza aparentemente una crítica devastadora a la teoría VNM al intentar proponer un nuevo paradigma de decisión que se basa en la crítica a la racionalidad basada en la maximización de funciones de utilidad. Simon dice que los agentes no son tan sofisticados, su limitada capacidad de cálculo y su conocimiento limitado e imperfecto los lleva a tomar decisiones basadas más en la satisfacción momentánea y fuertemente dependientes del procedimiento adoptado como medio para llegar a la elección. En este sentido, es posible que no elijan la alternativa ideal pues se conforman con la primera que los satisface dadas sus propias limitaciones. Analizamos un poco el intento de Rubinstein (1998) para formalizar las ideas de racionalidad acotada. Rubinstein considera importante el procedimiento por medio del cual se toma una decisión, el qué y el cómo son importantes en el proceso de la decisión. Este hecho resalta la importancia de la explicación del proceso o procedimiento de una decisión, el cual es minimizado, al igual que la relación entre medios y fines, en los modelos tradicionales de la economía. Desafortunadamente, los trabajos de Simon son ampliamente citados en la literatura, sobre todo en trabajos de ciencias administrativas y por los estudiosos de las organizaciones, sin embargo la mayoría de estos trabajo son, desde nuestro punto de vista, muy pobres en cuanto a su profundidad y rigor formal. Es por ello que hemos hecho la incursión en los trabajos de Rubinstein que nos presentan maneras de empezar a formalizar las importantes ideas surgidas a partir de Simon.

Finalmente, en la tercera línea presentamos algunos avances hacia lo que podría ser una nueva alternativa para explicar decisiones bajo incertidumbre. Esta alternativa tiene un carácter más "finitista", se trata de explorar como influye la estructura de información que posee el decisor en su acto de decisión. Para ello, en su elección deberá tomar en cuenta la manera en que su orden de preferencias sobre resultados se puede extender a la ordenación inducida en el conjunto potencia de los resultados. Cuando el orden sobre los resultados monetarios posibles se extienda de forma única al conjunto potencia de los mismos, la estructura de información será la clave para la elección óptima: bastará elegir en el orden extendido el conjunto que sea más compatible con la información proveniente de la estructura de información. De este modo, la elección tradicional sobre un continuo de loterías se convierte en una elección que se logra a partir de comparaciones finitas. Esta metodología puede servir para introducir ideas de racionalidad limitada y para relajar la fuerza de la continuidad, el axioma de independencia y demás supuestos que se usan en la teoría VNM. En el fondo, en el caso de un número finito de consecuencias, la elección sobre el conjunto simplex se reduce a la elección sobre una partición finita del mismo, con tantos elementos como el conjunto potencia del conjunto finito de consecuencias

Hay otros enfoques, para estudiar el proceso de toma de decisiones, que no se basan necesariamente en la idea de maximización de una utilidad consistente con supuestos sobre preferencias. Aunque tenga raíces en la teoría de prospectos de Kahneman y Tversky

(1979), la relativamente reciente *economía del comportamiento,* proveniente de la Psicología, adopta el enfoque de explorar con mayor profundidad tanto el proceso mental como la influencia del contexto en que se encuentra el decisor. De este modo, cobran relevancia importantes aspectos poco tratados en la economía tradicional: la actitud sentimental, el grado de involucramiento, el papel de la intuición, el pensamiento y la preferencia, los procesos mentales previos, la satisfacción, el procedimiento de evaluación, la influencia del contexto, los atributos de las alternativas mejor percibidas, etc. El acto final de decisión es el resultado de la aplicación de diversos procesos mentales heurísticos (*rules of thumb*), cada caso particular de decisión depende del los factores del contexto de la decisión y el tipo de respuesta esperada en el proceso mismo, ya sea elección o valuación. El artículo panorámico de Kanheman (2002) discute sobre mapas de racionalidad acotada y nos brinda una muy buena introducción y ejemplos para entender estos importantes aspectos involucrados en un acto de decisión. Recomendamos consultar también Kahneman (2003a, 2003b). Hay quien va más allá proponiendo que las preferencias se construyen, no son datos fijos y existentes que solamente se revelan como respuesta al proceso de decisión.

Otra área de investigación, muy prolífica e importante en la actualidad, proveniente ahora de la biología, es la economía evolutiva (*evolutionary economics*). Se han construido modelos económicos dinámicos basados en ideas de la teoría evolucionista. En estos casos los agentes responden a conductas determinadas genéticamente. La imitación o la adaptación son algunos ejemplos. La obra Maynard Smith (1982) nos proporciona una buena aproximación a este enfoque. Este enfoque es muy importante pero tiene una gran diferencia con los temas que comentamos en el trabajo. Hemos preferido ocuparnos de agentes que deliberadamente toman decisiones, que están preocupados por el qué decidir y su valoración, a veces se interesan por el procedimiento, por el cómo de la decisión. En contraste, los agentes de la economía evolutiva no toman decisiones deliberadamente, funcionan más bien como autómatas que responden a los cambios en el entorno de forma automática.

Las siguientes tres secciones explican la teoría clásica VNM y la crítica de Allais. La sección 5 se dedica a la teoría de prospectos de Kanhemann y Tversky, la sección 6 introduce la problemática de la incertidumbre a través de la paradoja de Ellsberg. La sección 7 se dedica a Simon y la racionalidad acotada, la sección 8 introduce una posible formalización de un caso de decisión con racionalidad acotada. Finalmente la sección 9 presenta una nueva y posible formalización alternativa para tomar decisiones bajo incertidumbre.

2. La paradoja de San Petesburgo y la importancia de la valoración de la preferencia sobre el dinero

Los primeros intentos por desarrollar una teoría sistemática para explicar decisiones bajo riesgo se remontan a Cramer (1728) y Bernoulli(1738). La paradoja de San Petesburgo nos ayuda a entender la problemática. Se invita a un individuo a participar en el siguiente juego. Se lanza una moneda justa las veces que sean necesarias hasta que aparezca por primera vez una cara. Si la cara aparece en el primer lanzamiento el individuo recibe 2 pesos, si la cara aparece por primera vez hasta el segundo lanzamiento se pagan al individuo 4 pesos, si la cara aparece por primera vez hasta el tercer lanzamiento se pagan al individuo 8 pesos,…, si la cara aparece por primera vez hasta el n-ésimo lanzamiento se pagan al individuo 2^n pesos,… y así sucesivamente. Notemos que es posible que nunca se obtenga una cara en ninguno de los lanzamientos, un evento posible aunque tenga probabilidad cero de ocurrir. A cualquier agente le gustaría participar en este juego. En los primeros lanzamientos tiene alta probabilidad de llevarse un buen premio, en el peor de los casos se lleva como mínimo dos pesos de ganancia. Una empresa que ofreciera este juego estaría irremediablemente siempre en números rojos. Para que la empresa no quiebre debería cobrar una cuota de participación en el juego, para garantizar que en promedio obtiene beneficio cero, esta cuota debería ser el valor esperado de lo pagado por la empresa al jugador promedio. Notamos que este valor esperado se obtiene promediando el valor del premio recibido por la probabilidad del mismo. Este valor esperado es resulta infinito,

$$\textit{Pago esperado} = (½)2+(1/2^2)2^2+(1/2^3)2^3+\ldots.+(1/2^n)2^n +\ldots=1+1+1+\ldots.$$

Cuando una casa de juego cobra el valor esperado por participar en sus máquinas de juego, la casa no pierde, el cobro del valor esperado hace que en promedio quede “tablas” y termine pagando por premios lo que recibe, en promedio, por cuotas de participación en sus juegos. En este caso, está claro que cualquier individuo racional estaría dispuesto a participar en el juego, incluso estaría dispuesto a pagar alguna cuota por su participación, pues de entrada sabe que gana como mínimo dos pesos. Sin embargo, seguramente no estaría dispuesto a pagar infinitos pesos por su participación. ¿Qué es entonces lo que está tomando en cuenta el individuo para decidir participar en el juego? y ¿cuánto está dispuesto a pagar por participar en el mismo?. La decisión no depende solamente de los indicadores estadísticos como el valor esperado del juego o su varianza. Hay algo nuevo que es la clave de la decisión: su valoración personal del dinero por pagar o por ganar. Bernoulli (1738, pags. 199-201) propone reemplazar el valor monetario esperado por la *utilidad monetaria esperada*. Esto es muy importante para la teoría económica porque nos hace ver la importancia de la preferencia individual sobre el dinero al tomar una decisión con consecuencias monetarias. En general, estas preferencias se representan con una función $u(x)$ que representa la utilidad monetaria de obtener como premio la cantidad x de dinero, la participación en el juego para un individuo con valoración monetaria u representaría la ganancia esperada siguiente,

$$\textit{Utilidad monetaria esperada} = (½)u(2) +(1/2^2)\, u(2^2)+(1/2^3)\, u(2^3)+\ldots.+(1/2^n)\, u(2^n) +\ldots$$

Diferentes individuos poseen diferentes funciones *u* para su valoración. Bernoulli propone medir la utilidad monetaria suponiendo que *u* es una función logarítmica. El uso de preferencias con utilidad logarítmica sería el criterio relevante para tomar la decisión de participación en el juego. La disposición a pagar por la participación en el juego se calcula resolviendo la siguiente ecuación. Se iguala la utilidad monetaria generada con los logaritmos para la lotería propuesta, con la cantidad de dinero que nos haría indiferentes entre aceptar o no el juego. En este caso de utilidad logarítmica, la disposición a pagar por participar sería aproximadamente de x=2.9 pesos.

$$\ln(x) = (½)\ln 2+(1/2^2)\ln 2^2+(1/2^3)\ln 2^3+\ldots+(1/2^n)\ln 2^n+\ldots=2\ln 2$$

Al individuo con valoración monetaria logarítmica le da lo mismo participar en el juego y obtener alguno de los premios 2^n que tener x unidades monetarias de forma segura. Este x se conoce como el *equivalente cierto* del juego propuesto. Podríamos cambiar los pagos de forma que la suma no tenga límite. Cramer (1728) propone una solución similar pero usa la raíz cuadrada como función de utilidad monetaria. Hoy sabemos que ambas son igual de arbitrarias pero las une la característica de representar preferencias de agentes con aversión al riesgo. La fundamentación de una decisión bajo riesgo a partir de un proceso de maximización de preferencias se debe al trabajo de John von Neumann y Oskar Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior* aparecida en 1944. Ellos proponen explícitamente unos supuestos de comportamiento de las preferencias, ha sido la base de la construcción de infinidad de modelos explicativos de los fenómenos económicos. En lo que sigue explicamos brevemente esta teoría. Un buen tratamiento de la misma aparece en el capítulo 6 de Mas-Colell et al (1995).

3. La teoría de la utilidad esperada VNM

Los modelos tradicionales de la teoría económica para tomar una decisión generalmente consideran tres elementos: (1) agente decisor, (2) alternativas y restricciones disponibles provenientes del ambiente de la decisión y (3) la forma de valoración de las alternativas disponibles. En el caso de las decisiones bajo riesgo el conjunto de alternativas es conocido como conjunto de *loterías* que no son otra cosa que las distribuciones de probabilidad sobre los resultados posibles de un suceso aleatorio. Para ejemplificar consideremos un inversionista al que le presentan dos proyectos alternativos. En el proyecto (A) debe invertir 800 000 pesos, si todo va bien puede obtener ganancias de 1 600 000 pesos, si las cosas no salen bien puede recuperar solamente 200 000 pesos del total de su inversión. La probabilidad de que el proyecto resulte exitoso es de 0.6. En el proyecto (B) debe invertir 500 000 pesos, en caso de éxito tendrá ganancias de 900 000 pesos con probabilidad 0.5 y en caso de fracaso recuperará solamente 300 000 de su inversión. El inversionista tiene una riqueza inicial de un millón de pesos. Las dos alternativas se pueden representar como sigue en el lenguaje de las loterías:

Alternativa L_A: (0.6)(200 000 +1 600 000) + (0.4)(200 000 + 200 000)

Alternativa L_B: (0.5)(500 000+900 000) +(0.5)(500 000 +300 000)

En cada caso hay dos posibles resultados, éxito o fracaso, es por ello que cada lotería contiene dos sumandos principales. El agente que decida sobre L_A o L_B deberá contar con un criterio o forma de comparación entre ambas para poder decidir cual elige. En cada lotería, la probabilidad aparece a la izquierda de la consecuencia monetaria. En general, cuando los posibles resultados numéricos finales de un suceso aleatorio son $x_1,x_2,\dots x_n$ y ocurren con probabilidades $p_1,p_2,\dots p_n$ respectivamente, la lotería correspondiente se representa como $p_1x_1+p_2x_2+\dots.+p_nx_n$ y se interpreta como

"con probabilidad p_1 la ganancia es x_1, con probabilidad p_2 la ganancia es $x_2,\dots.$"

El modelo base que formaliza la teoría de la utilidad esperada VNM y sus alternativas o extensiones parte de un conjunto de números reales para representar las consecuencias monetarias de los eventos aleatorios. Conviene considerar un intervalo compacto para ello. A pesar de que enfrentemos un número finito de consecuencias posibles, habrá que trabajar con valoraciones en un conjunto convexo para poder incluir el lenguaje de probabilidades que está ligado directamente con la convexidad. Sea pues S un intervalo compacto que representa el conjunto de consecuencias. Los elementos de S se interpretan generalmente como cantidades monetarias. Las loterías serán representadas como todas las medidas de probabilidad que se puedan definir sobre los conjuntos medibles de S. Podemos considerar el algebra de Borel construida con subconjuntos de S. Se introduce este lenguaje para poder incluir la posibilidad de loterías o distribuciones continuas. Sabemos que las medidas de probabilidad son funciones reales que mapean subconjuntos de S en el intervalo [0,1], representan la probabilidad del evento representado por el conjunto medido. Sabemos también que esta medida satisface que la medida de S es uno y que la medida de una unión de conjuntos disjuntos es la suma de las medidas. El conjunto de todas las posibles medidas de probabilidad es el conjunto de loterías que denotaremos por $\boldsymbol{L}$. Este lenguaje es general y unificador de tratamientos discretos y continuos. El caso de un número finito de consecuencias, como los ejemplos manejados en este trabajo, está incluido en esta formalización. Ocurre cuando un subconjunto finito, S_0 de S, es tal que la medida de S_0 es uno. En este caso hablamos de una medida de *soporte finito*. De ese modo si

$$S_0=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$$

La probabilidad de cada x_i es no negativa y la suma de todas las probabilidades es uno. Esta medida o distribución de probabilidades representa una lotería o prospecto que se acostumbra denotar por

$$p_1x_1+p_2x_2+\dots.+p_nx_n$$

Las loterías de $\boldsymbol{L}$ suelen representarse usando letras L con o sin subíndices. El conjunto de medidas de soporte finito sobre S se denota por $\Delta(S)$. Es importante notar que este tipo de formalización supone implícitamente que las loterías se pueden mezclar para formar nuevas loterías. Esto se debe a que el espacio de medidas, $\boldsymbol{L}$, es cerrado bajo mezclas convexas. Esta reducción o simplificación de la formalización matemática puede ser criticada, Carlin (1992) y Camerer (2004) proporcionan evidencia empírica al respecto.

Las preferencias del decisor se definen como relaciones binarias sobre **L**. Como es bastante conocido, partiendo de la relación "L_1 es débilmente preferido a L_2" como primitiva se pueden construir la relación de preferencia estricta y la relación de indiferencia. L_1 es estrictamente preferido a L_2 si L_1 es débilmente preferido a L_2 pero no es cierto que L_2 sea débilmente preferido a L_1. Del mismo modo, decimos que L_1 es indiferente a L_2 si ocurre que L_1 es débilmente preferido a L_2 y L_2 es débilmente preferido a L_1. Denotamos por R a la preferencia débil, por P a la preferencia estricta y por I a la relación de indiferencia. Cuando escribimos L_1RL_2, interpretamos que L_1 es débilmente preferido a L_2. Los axiomas o supuestos de la teoría de la utilidad esperada clásica son los siguientes.

Ordenación: R es una relación completa y transitiva sobre $\boldsymbol{L}$, es decir, (i) para cualquier L_1,L_2 en $\boldsymbol{L}$ se tiene L_1RL_2 ó L_2RL_1 y (ii) para cualquier L_1,L_2,L_3 en $\boldsymbol{L}$ se tiene que si L_1RL_2 y L_2RL_3 entonces L_1RL_3.

Continuidad: Para cualquier L_1,L_2,L_3 en $\boldsymbol{L}$, los conjuntos

$$\{\lambda \,/\, (\lambda L_1+(1-\lambda) L_2)\, R\, L_3\} \text{ y } \{\lambda \,/\, L_3\, R\, (\lambda L_1+(1-\lambda) L_2)\}$$

son conjuntos cerrados en [0,1].

Independencia: Para todo L_1,L_2,L_3 en $\boldsymbol{L}$ y para todo λ en (0,1):

$$L_1RL_2 \quad \text{sí y solo sí} \quad (\lambda L_1+(1-\lambda) L_3)\, R\, (\lambda L_2+(1-\lambda) L_3)$$

El supuesto de ordenación permite clasificar y jerarquizar el conjunto de loterías en clases que van desde la o las más preferidas a la o las menos preferidas. La completitud permite comparar cualquier par y la transitividad evita ciclos. El supuesto de continuidad garantiza que no haya saltos bruscos de preferencia y evita representaciones numéricas de las preferencias que resultasen no acotadas. El supuesto de independencia nos dice que la preferencia entre un par de loterías es independiente de cualquier mezcla que se haga de ellas con una tercera lotería. Si ya sé que L_1RL_2, cuando mezcle cada lado con una tercera la preferencia se debe mantener. Los dos primeros supuestos garantizan la existencia de una utilidad numérica que represente las preferencias, es decir, una función u de $\boldsymbol{L}$ en los reales tal que para cualquier L_1,L_2 en $\boldsymbol{L}$:

$$L_1RL_2 \quad \text{sí y solo sí} \quad u(L_1) \geq u(L_2)$$

Es el supuesto de independencia quien obliga a que la función de utilidad *u* tenga la característica distintiva de la utilidad esperada, es decir, el hecho de que la *u* sea lineal en las probabilidades. De modo que si

$$L= p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n,$$

el axioma de independencia provoca que

$$u(L)= p_1\,u(x_1)+p_2\,u(x_2)+\ldots+p_n\,u(x_n)$$

Es bien conocido también que esta función de utilidad *u* representa una medición cardinal, en el sentido de que es única salvo transformaciones afines positivas. El resultado principal se resume como sigue.

<u>Teorema de la utilidad esperada</u>. *Si las preferencias R sobre el espacio de loterías* **L** *satisfacen los axiomas de ordenación, continuidad e independencia, entonces existe una función u con dominio* **L** *y valores en los reales tal que,*

(1) *Para cualquier* L_1,L_2 *en* **L**: L_1RL_2 *sí y solo sí* $u(L_1) \geq u(L_2)$
(2) *Si* $L= p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$ *entonces* $u(L)= p_1\,u(x_1)+p_2\,u(x_2)+\ldots+p_n\,u(x_n)$
(3) *Una función v representa la misma preferencia R si y solo sí existen reales a y b>0 tales que v(L)=a+bu(L)*

La consecuencia (1) nos dice que la preferencia *R* es representada numéricamente por la función de utilidad *u*. Las comparaciones entre loterías se convierten en comparaciones numéricas a través de la función de utilidad *u*. La propiedad (2) se conoce como propiedad VNM o propiedad de la utilidad esperada. Se refiere a la linealidad de *u* en las probabilidades. Una aplicación de esta propiedad es

$$u(p_1\,L_1+p_2\,L_2+\ldots+p_n\,L_n)= p_1\,u(L_1)+p_2\,u(L_2)+\ldots+p_n\,u(L_n)$$

siendo $L_1,L_2,\ldots,L_n$ elementos de **L** y p_1 , p_2, ..., p_n una distribución de probabilidades. Para que la propiedad anterior tenga sentido habría que suponer que tiene sentido hablar de loterías compuestas (loterías de loterías) y definir la manera de operarlas para que sean equivalentes a una lotería simple, distribución de probabilidad sobre el número finito estados posibles. Habría que garantizar la "convexidad" del espacio de loterías. Cuando se supone que el espacio de loterías es un simplex del espacio euclideano, la convexidad está garantizada por construcción. Este hecho ha sido criticado por algunos trabajos empíricos. La valoración de una lotería compuesta como la valoración de su reducción a la lotería simple correspondiente es una hipótesis *consecuencialista*. Finalmente, la propiedad (3) nos dice que la utilidad VNM es única salvo transformaciones afines crecientes. Es por ello que se conoce como una medición *cardinal*. Con ello se pueden hacer juicios de comparación de diferencias, que resultan invariantes ante cualquiera de las mediciones cardinalmente equivalentes para la misma preferencia.

El individuo enfrentado a una elección bajo riesgo elige su alternativa óptima a partir de la maximización de una utilidad con las características enunciadas en el teorema anterior. No es aquí el lugar adecuado para comentar todas las aplicaciones de este resultado, baste decir que ha sido fundamental en el desarrollo de áreas como las finanzas, la teoría de juegos, la teoría de contratos, la economía política contemporánea, etc. Sin embargo, desde los años cincuenta del siglo pasado, han aparecido situaciones empíricas de elecciones que contradicen el comportamiento propuesto por la teoría VNM.

4. La paradoja de Allais y la inconsistencia con la teoría VNM

El trabajo de Allais (1953) es pionero en el campo de lo que hoy se conoce como *economía experimental*, fue la base para el premio Nobel del francés Maurice Allais, la famosa paradoja que lleva su nombre se puede presentar como sigue. Se presentan dos pares de loterías, cada sujeto participante en el experimento realiza dos actos de decisión. En el primer caso debe optar por elegir entre L_A o L_B, la primera le da 2400 con probabilidad uno mientras que la lotería *B* ofrece: 2500, con probabilidad de 0.33; o 2400 con probabilidad de 0.66; o un premio de 0 con probabilidad 0.01. La representación de la primera decisión queda como

$$L_A\text{: } (1.0)2400 \quad \text{contra} \quad L_B\text{: } (0.33)2500+(0.66)2400+(0.01)0$$

En el segundo acto de decisión el sujeto debe optar por L_C o L_D. El juego L_C ofrece 2400 con probabilidad 0.34 o un premio de 0 con probabilidad 0.66. Mientras que el juego L_D ofrece 2500 con probabilidad 0.34 o un premio de 0 con probabilidad 0.67

$$L_C\text{: } (0.34)2400+(0.66)0 \quad \text{contra} \quad L_D\text{: } (0.33)2500+(0.67)0$$

Cuando se realizó el experimento ocurrió que la mayoría de sujetos declararon preferir L_A a L_B y también L_D sobre L_C. La primera decisión puede motivarse por el deseo de contar con certidumbre. En el segundo caso las probabilidades son muy similares y el deseo de ganar más influye para que sea elegida la lotería L_D sobre la L_C. Sin embargo, la consistencia con la teoría VNM implicaría que cualquiera que prefiera L_A a L_B debería preferir necesariamente L_C a L_D. La razón de ello es como sigue. Si $L_A P L_B$, se tiene que $u(L_A) > u(L_B)$. En términos del teorema VNM esto significa que

$$(1)u(2400) > (0.33)u(2500)+(0.66)u(2400)+(0.01)u(0)$$

Lo cual es equivalente, matemáticamente por propiedades de las desigualdades, a

$$(0.34)u(2400) > (0.33)u(2500)+(0.01)u(0)$$

Lo cual es, por la misma razón matemática, equivalente a

$$(0.34)u(2400)+(0.66)u(0) > (0.33)u(2500)+(0.67)u(0)$$

Usando nuevamente la propiedad de la representación del teorema vemos que lo anterior equivale a

$$u\ (\ (0.34)(2400)+(0.66)(0)\ ) > u\ (\ (0.33)(2500)+(0.67)(0)\ )$$

es decir, $L_C\ P\ L_D$.

Sin embargo, empíricamente se observó que la mayoría de individuos que manifestaron $L_A P L_B$, manifestaron en la segunda decisión que $L_D P L_C$. De los 72 sujetos a quienes se aplicó el experimento, el 82% manifestaron $L_A P L_B$ y solo 17% manifestaron $L_C P L_D$.

En otro experimento llevado a cabo en mayo de 2012, en la Facultad de Economía de la UASLP, se aplicó la versión de la paradoja de Allais de Mas-Colell et al (1995) a un grupo de 62 estudiantes. Los dos pares de loterías empleadas fueron las siguientes, aparecen en el capítulo 6 del texto de Mas-Colell (1995)

$$L_A\text{: (1.0)500 000} \quad \text{contra} \quad L_B\text{: (0.10)2 500 000+(0.89)500 000+(0.01)0}$$

$$L_C\text{: (0.11)500 000+(0.89)0} \quad \text{contra} \quad L_D\text{: (0.10)2 500 000+(0.90)0}$$

Las respuestas de los estudiantes se muestran en el siguiente cuadro:

L_B preferido a L_A y	L_D preferido a L_C	…….. 28	(caso 1)
L_A preferido a L_B y	L_C preferido a L_D	…….. 06	(caso 2)
L_A preferido a L_B y	L_D preferido a L_C	…….. 04	(caso 3)
L_B preferido a L_A y	L_C preferido a L_D	…….. 24	(caso 4)

Notemos que los casos (1) y (2) representan elecciones consistentes con la teoría VNM. En este caso, 55% de los individuos revelaron preferencias consistentes con la teoría VNM mientras que el 45% restante tiene preferencias, suponiendo la existencia de las mismas, no explicadas con los axiomas de dicha teoría. Esto contrasta con el resultado tradicional de la propia paradoja, aunque hay que tener en cuenta que la potencia de la prueba puede no ser suficiente. Es muy interesante notar la manifestación de la preferencia por riesgo, tanto L_B como L_D son preferidos a sus contrincantes respectivos, L_A y L_C por su mayor valor esperado en el premio recibido, a pesar del riesgo que conllevan. L_C representa poco premio esperado comparado con L_D. A pesar de que L_D representa mayor riesgo, las probabilidades son vistas como muy semejantes y la persona prefiere la lotería que promete más con las casi las "mismas" probabilidades. Creemos que 28 de los 34 individuos que muestran consistencia con la teoría VNM razonaron de manera similar al argumento que estamos presentando. El resto de individuos consistentes con VNM, son representados en el caso 2; donde 6 de los 34, el 17%, manifiestan preferencia de L_A sobre L_B y L_C sobre L_D. Ello manifiesta alta aversión al riesgo, son agentes que prefieren asegurar un premio esperado, aunque sea bajo, a la alternativa de enfrentar riesgos mayores. Abusando de la interpretación podríamos aventurar que en países con mayor grado de incertidumbre en el día a dia, como México, no se da que la mayoría sea inconsistente con VNM. Más bien, hay consistencia y se manifiesta con preferencias relativamente sencillas que señalan la convivencia con la incertidumbre en la gran mayoría de los casos. Bajo la hipótesis tradicional de utilidad cuadrática sobre la riqueza monetaria, podríamos incluso proponer que el 83% de los individuos consistentes con VNM tienen preferencias $v(\mu,\sigma)=\mu$ mientras que el 17% restante tienen preferencias $v(\mu,\sigma)=-\sigma$. Muchos amantes al riesgo, como los primeros, con pocos aversos al riesgo, como los segundos. Tenemos entonces, abusando un poco, una propuesta de racionalización de la conducta de los agentes incluidos en los casos 1 y 2. El cuadro siguiente presenta los valores de riesgo y rendimiento de las cuatro loterías.

	μ	σ
L_A	500 000	0
L_B	695 000	254 000
L_C	55 000	156 444
L_D	250 000	1 033 924

Entre los agentes inconsistentes con la teoría VNM, casos 3 y 4, encontramos curiosamente que solo 4 de los 62, el 14% de los inconsistentes con VNM, expresan las preferencias del caso 3, las que normalmente se reportan como mayoría al presentar la violación del axioma de independencia. En nuestro caso, la violación de la teoría VNM se representa más por el caso 4, que representa el 86% de los inconsistentes. Una posible racionalización de esta conducta es la siguiente. La preferencia de L_B sobre L_A puede deberse, como antes, al alto valor esperado del premio esperado que proporcionaría al menos lo mismo que L_A, suponiendo que el centésimo de probabilidad de obtener premio secero es eliminado deliberadamente. Note que esto también puede explicar a los consistentes que realizaron esta elección. Finalmente, la preferencia de L_C sobre L_D puede provenir del hecho de que como en ambas loterías hay una alta probabilidad de no obtener premio, el individuo se inclina por elegir la que le incrementa la probabilidad de obtener algún premio, aunque no sea el más alto. Esta sería una conducta parecida a la del individuo prudente que usa estrategias maxmin en la teoría de juegos. A pesar de que encontremos este tipo de racionalidad, la conducta es inconsistente con los supuestos de la teoría VNM. El paralelismo de las curvas de indiferencia, heredado del axioma de independencia, resultaría violado. En la sección siguiente presentamos uno de los intentos más exitosos para formalizar algunas de las ideas anteriores. Disponemos de una teoría complementaria a VNM, concretamente es más bien una extensión de la teoría VNM que permite racionalizar multitud de elecciones que contradicen el axioma de independencia.

5.- La teoría de Prospectos de Kanheman y Tversky

Lo hemos ya señalado, y es un hecho bastante conocido, el axioma de independencia provoca que las curvas de nivel de las preferencias consistentes con la teoría VNM sean segmentos de recta paralelos entre sí, más bien secciones de hiperplanos paralelos entre sí. Ello proviene del axioma de independencia. No es difícil probar que una consecuencia del axioma de independencia es que para todo L_1,L_2,L_3 en $\boldsymbol{L}$ y para todo λ en (0,1):

$$L_1 I L_2 \quad \text{sí y solo sí} \quad (\lambda\, L_1+(1-\lambda)\, L_3)\; I\; (\lambda\, L_2+(1-\lambda)\, L_3)$$

La relación de indiferencia podría ser cambiada por la preferencia estricta y la consecuencia sería la misma. Con esta propiedad, cuando el número de resultados es finito, las loterías que tienen el mismo nivel de utilidad forman partes planas paralelas entre sí.

Hay una forma de debilitar el axioma de independencia que nos permite racionalizar las elecciones propuestas en la Paradoja de Allais. El siguiente axioma, conocido como *betweeneess axiom*, propone: para todo L_1,L_2,L_3 en $\boldsymbol{L}$ y para todo λ en (0,1):

$$\text{Si } L_1 I L_2 \quad \text{entonces} \quad (\lambda\, L_1+(1-\lambda)\, L_3)\; I\; (\lambda\, L_2+(1-\lambda)\, L_3)$$

Con esta versión se puede probar que las curvas de indiferencia continúan siendo rectas o hiperplanos pero no necesariamente paralelos entre sí. De hecho el axioma de independencia implica al anterior. La continuidad de las preferencias y el axioma *betweeness* implican que las curvas de indiferencia son rectas o hiperplanos. Inversamente, si las curvas de indiferencia son rectas o hiperplanos, se satisface el axioma *betweeness.* Lo importante de este debilitamiento de la independencia es que se admite el no paralelismo de las curvas de indiferencia conservando la linealidad de las mismas. Con ello se pueden racionalizar las elecciones de la Paradoja de Allais. Se recomienda consultar el trabajo de Dekel (1986). Invitamos al lector a construir un ejemplo preciso de representación numérica de este tipo.

Se puede ir aún más allá. No habría porqué restringirse a la linealidad de las curvas de indiferencia si recordamos que la diversificación ha sido una herramienta poderosa en las decisiones financieras. Es común que un inversionista haga portafolios diversificando la cantidad de su inversión. Del mismo modo, alguien que compra billetes de lotería puede gastar una cierta cantidad apostándole a varios números. Lo mismo el niño que gasta su presupuesto jugando en varias maquinitas en la casa de juegos mecánicos. Estas conductas son consistentes con la convexidad de preferencias. En la teoría VNM la lotería compuesta $1/2L_1+1/2L_2$ es siempre indiferente a L_1 y a L_2 si estas son indiferentes entre sí. Las conductas que comentamos no son consistentes con esto. Si las maquinitas L_1 y L_2 le son indiferentes al jugador, la mezcla $1/2L_1+1/2L_2$ le proporciona un mayor placer, lo mismo que al inversionista diversificador. Es por ello que se puede trabajar en un esquema con preferencias transitivas, completas, continuas y que verifican la propiedad de convexidad o mezcla:

$$\text{Si } L_1 I L_2 \text{ entonces } L_1 I\ (\lambda L_1+(1-\lambda)\ L_2) R\ L_2 \ \text{ para } 0\leq\lambda\leq 1$$

Asumir convexidad da más generalidad a la teoría que asumir *betweennes* y es más consistente con muchos los experimentos, además de que la hipótesis de convexidad ha sido bastante natural en economía.

Hay varias alternativas desarrolladas por varios autores. Destacamos Loomes y Sudgen (1986), Chew (1983,1989) o Fishburn (1989) quienes han propuesto modificaciones y pesos diferentes para valorar la utilidad. Fishburn propone una utilidad bilineal debilitando la transitividad y admitiendo una forma débil de independencia conocida como sustitución débil. No está dentro de los alcances de este trabajo abordar estos tratamientos pero recomendamos al lector interesado a consultar los trabajos de Sudgden (2004) y Schmidt (2004) y las referencias ahí citadas.

Para no desviarnos más del tema de que titula la sección comentamos un poco sobre la propuesta conocida como teoría de prospectos. En Kahneman y Tversky (1979) se reporta el siguiente experimento. Un grupo de individuos enfrenta los siguientes problemas.

$$L_E\text{: } (1.0)3000 \quad \text{contra} \quad L_F\text{: } (0.8)4000+(0.2)0$$

$$L_G\text{: } (0.25)3000+(0.75)(0) \quad \text{contra} \quad L_H\text{: } (0.20)4000+(0.8)0$$

La evidencia empírica de 95 sujetos manifestó que el 80% de los mismos dijo $L_E P L_F$ y el 65% manifestó que $L_H P L_G$. Esto también va en contra del axioma de independencia pues es fácil ver que si $L_E P L_F$, considerando λ=0.25 y la lotería L_I: (1.0)(0) como tercera opción, la mezcla de λ de las loterías anteriores con 1-λ de la lotería L_I genera que $L_G P L_H$.

La teoría de prospectos de Kahneman y Tversky explica estas preferencias ofreciendo una interesante generalización de la teoría VNM. El argumento central parte de que los individuos sobrevaloran los resultados o consecuencias extremas. Los resultados más deseables y los menos deseables son valorados desproporcionalmente. Lo muy deseable se sobrevalora con mayores efectos positivos y lo menos deseable tiende a sobrevalorarse con mayores efectos negativos. En el caso del primer par de problemas, puestos para explicar la paradoja de Allais, la consecuencia de obtener $0 es la peor de todas, se sobrevalora más negativamente en L_B que en L_D, provocando con ello que L_B sea poco atractivo y aumentando el grado de atracción hacia L_D. En contraste con esto, la mejor consecuencia en la situación mencionada es la de obtener el premio de 2500 pesos. Esta consecuencia se sobrevalora más positivamente en L_D que en L_B, incrementando la atracción por L_D y disminuyendo la de L_B. Esto explicaría la preferencia de L_A sobre L_B y la de L_D sobre L_C. Los efectos de sobrevalorar los extremos influyen más que la consistencia con la teoría

VNM. En el segundo par de problemas ocurre algo similar. En el extremo de la peor consecuencia, obtener $0, resulta más extremoso L_F que L_H, provocando poca atracción por L_F y aumentando la de L_H. Con la consecuencia más alta, que es la de obtener $4000, se sobrevalora más positivamente L_H que L_F.

En el contexto de la teoría VNM se formalizan las actitudes hacia el riesgo en función del tipo de curvatura que tiene la función de utilidad monetaria. Los aversos al riesgo tienden a asegurarse y se caracterizan por funciones cóncavas en el nivel de riqueza. Por el contrario, los amantes al riesgo se representan con funciones convexas de la riqueza monetaria. La evidencia ha señalado comportamientos mixtos. A partir de un nivel de riqueza normal, cuando se tienen pérdidas se tienen comportamientos de aversión al riesgo, mientras que cuando se tienen ganancias se generan comportamientos de amantes al riesgo. Los amantes del riesgo eligen loterías con alta probabilidad a las pérdidas pequeñas y baja probabilidad de ganancias altas. Los aversos al riesgo, toman seguros para prevenir los daños grandes que ocurren con probabilidades bajas. Revelan así su aversión a las loterías con consecuencias extremas malas. Los amantes al riesgo revelan su preferencia por loterías con buenas consecuencias. Estas situaciones son las que han llevado a buscar alternativas de formalización, donde las consecuencias monetarias se sobrevaloran o se deprecian, dependiendo del contenido y contexto de la decisión. Kahneman yTversky proponen una modificación de la teoría de VNM que les genera una representación del tipo:

$$V(L)=\pi(p_1)\,u(v(x_1))+\pi(p_2)\,u(v(x_2))+\ldots+\pi(p_n)\,u(v(x_n))$$

La función π es creciente, se encargaría de modificar las probabilidades aumentando la probabilidad cuando es cercana a cero y disminuyéndola cuando se acerca a uno. La función de valoración v es también creciente, se comportaría negativa, convexa y con alta pendiente en las pérdidas y se comportaría cóncava con menores pendientes en las ganancias.

6. La Paradoja de Ellsberg y las decisiones bajo incertidumbre

Con los supuestos de la teoría VNM estamos obligados implícitamente a adoptar que las preferencias sobre las loterías son fuertemente separables. La propiedad de las utilidades VNM, de sumar las ponderaciones con las probabilidades respectivas de las utilidades de los premios, está asociada precisamente con la definición de separabilidad fuerte de la utilidad. Esta propiedad de separabilidad fuerte en la utilidad, está asociada con el supuesto de independencia fuerte de las preferencias. En la teoría del consumidor, esta separabilidad se refiere a la separabilidad de las canastas de bienes en grupos de bienes. Cuando el individuo enfrenta una decisión bajo incertidumbre, no conoce completamente la distribución de probabilidades que enfrenta. Parece natural que en este caso, su conducta refleje la no validez del supuesto de independencia. Si no se conocen con precisión todas las probabilidades de cada uno de los resultados posibles, el agente decisor tendrá problemas para respetar la regla VNM. Otra manera de decir esto es que la estructura de información del individuo influye fuertemente en la característica de su decisión. La paradoja de Ellsberg ilustra este hecho. Usamos la versión de Luenberger (1995, pag. 382) para nuestra exposición.

Una urna contiene 90 bolas, 30 de las cuales son rojas (R) mientras que las otras 60 están mezcladas entre negras (N) y blancas (B) pero no conocemos la proporción de cada color. Es este detalle el que ilustra que el decisor no conoce completamente la distribución de probabilidad enfrentada. En un experimento similar al de Allais se hacen dos preguntas a cada individuo para tratar de inferir su preferencia sobre el par L_1, L_2 y sobre el par L_3, L_4. Primero se pregunta por cuál de los siguientes juegos o alternativas es preferida.

L_1 : paga un millón si sale bola roja, paga cero si sale negra o blanca.

L_2 : paga un millón si sale bola negra, paga cero si sale roja o blanca.

Notemos que el desconocimiento de las probabilidades para obtener cada uno de los tres tipos de bola impide que podamos representar las alternativas involucradas como loterías en la notación estándar. Podríamos forzar un poco la notación y representar L_1=(1/3)1+(2/3)(0) pero no lo podemos hacer para representar L_2 por desconocer la probabilidad de obtener el pago 1. La mayoría de los individuos manifiesta que prefiere L_1 a L_2. Ello se debe posiblemente a que la probabilidad de obtener los premios cero o uno es objetivamente conocida en L_1 mientras que en L_2 no lo es. La segunda pregunta que se hace a los agentes participantes es sobre la preferencia entre las alternativas,

L_3 : paga un millón si sale bola roja o blanca, paga cero si sale negra.

L_4 : paga un millón si sale bola negra o blanca, paga cero si sale roja.

En este caso la mayoría de los individuos se pronuncia por la preferencia de L_4 a L_3. La razón puede ser la misma que en el caso anterior, las probabilidades de los pagos en L_4 son objetivas mientras que en L_3 no. De hecho podríamos abusar nuevamente y representar L_4=(2/3)1+(1/3)(0).

Un individuo cuyas preferencias manifiestan que L_1 es preferido a L_2 y que L_4 es preferido a L_3 es un individuo cuyas preferencias no son fuertemente independientes y por tanto separables. Para justificar esto supongamos que tenemos una preferencia representada por una utilidad definida sobre los pagos de tres posibles estados contingentes: x_R, x_N, x_B donde, bajo el supuesto de separabilidad, la utilidad podría escribirse como

$$U(x_R,x_N,x_B) = U_R(x_R)+U_N(x_N)+U_B(x_B)$$

donde x_R es el pago si la bola obtenida de la urna es roja y análogamente para x_N y x_B. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $U_R(0)=U_N(0)=U_B(0)=0$. De este modo, la preferencia de L_1 sobre L_2 se podría representar como

$$U_R(1)>U_N(1)$$

Mientras que la preferencia de L_4 sobre L_3 se podría representar como

$$U_N(1) + U_B(1) > U_R(1)+ U_B(1)$$

La cancelación de $U_B(1)$ de esta última desigualdad genera una contradicción con la primera desigualdad.

Lo anterior nos enseña dos hechos importantes. La teoría VNM nos induce un tipo muy especial de separabilidad sobre las preferencias sobre estados contingentes. Las típicas loterías pueden pensarse de esta manera. Por otro lado, la paradoja de Ellsberg motivó el desarrollo de la teoría de la utilidad subjetiva de Savage (1954). La idea consiste en poner las bases de una teoría de la decisión en la se intente explicar la formación de las probabilidades asignadas por el individuo que decide. En el caso de un desconocimiento completo de la distribución enfrentada, únicamente la estructura de información y la preferencia sobre consecuencias son las herramientas del agente decisor. En la última parte de este trabajo abordamos este tema.

7. Herbert Simon y la Racionalidad Limitada

Uno de los desarrollos más relevantes que aparece inicialmente como una importante alternativa a la racionalidad estándar, imperante en la teoría económica, es la racionalidad limitada (*bounded rationality*) que aparece a partir del trabajo de Simon (1955). En sus inicios el trabajo de Simon fue un tanto relegado por varios años pero cobró importancia a partir de los años ochenta del siglo pasado, después de haber recibido Simon el premio nobel de economía en 1978 por sus trabajos en el área de economía organizacional. A partir de ahí toman gran auge también los trabajos experimentales y aparece con gran fuerza la actual Economía Experimental. Es a partir de la observación del comportamiento en experimentos y del comportamiento de las decisiones en ciertas organizaciones, particularmente las empresas, que Simon cuestiona la racionalidad sustantiva o estándar en economía. En el mundo de los negocios y la política pública hay muchas restricciones de por medio y diversos caminos alternativos que pueden limitar la búsqueda del óptimo ideal. En muchos casos el decisor se conforma con la búsqueda de alguna solución factible que cumpla ciertos requerimientos como para considerarla satisfactoria, aunque no necesariamente sea el óptimo ideal, posiblemente no alcanzable, por las limitaciones del problema y la capacidad y costo asociados a su búsqueda.

La propuesta de Simon (1955) sobre un *modelo conductual de elección racional* es más o menos como sigue. Para Simon, los modelos de comportamiento racional, tanto los globales usualmente construidos como los limitados, generalmente requieren algunos o todos los elementos siguientes:

(a) Un conjunto de *alternativas* de comportamiento (alternativas de elección o decisión) que puede ser representado por un conjunto no vacío *A*.
(b) Un subconjunto de *alternativas percibidas* de comportamiento que el organismo considera o percibe. Dicho subconjunto puede formalizarse como un conjunto A*, considerando que A* está incluido en A.
(c) Los posibles *estados futuros* de las cosas o *resultados* de elección representados por un conjunto *S*.
(d) Una *función de pagos*, *V*(*s*) para todos los elementos *s* de *S*. Esta función representando el valor o utilidad para cada uno de los resultados posibles de elección. Se asume que es una utilidad cardinal.
(e) La *información sobre qué resultados* en *S* realmente ocurrirán si una alternativa particular *a* en A (o en A*) es elegida. Esta información puede ser incompleta; esto es, puede haber más de un posible resultado *s* para cada alternativa conductual *a*. Por tanto, la información se representa como un mapeo que a cada alternativa *a* en A asocia un subconjunto S_a contenido en *S*.
(f) La *información sobre la probabilidad* de que un resultado particular se derivará si un comportamiento alternativo particular es elegido. Esta es una información más precisa que la referida en el punto anterior, ya que se asocia a cada elemento *s* en el conjunto S_a una probabilidad P_a (*s*), la probabilidad de que *s* ocurra si *a* es elegida. La suma de las probabilidades P_a (*s*) es uno cuando se suma sobre los estados *s* del conjunto S_a.

De acuerdo con Simon, partiendo del esquema anterior se pueden definir procesos de elección racional que corresponden a modelos ordinarios de probabilidad y de juegos. La tripleta (*A*,*S*,*V*) es relacionada por Simon con los juegos. El conjunto de alternativas, *A*, es identificado con el conjunto de estrategias, el conjunto *S* con los resultados del juego y *V* con la función de pagos. De hecho Simon describe la matriz de pagos del juego asociado. Con el lenguaje definido propone tres reglas clásicas de comportamiento. El comportamiento prudente o *maximin*: para cada alternativa nos fijamos en el conjunto de resultados posibles asociados con la misma, seleccionamos el que nos de la peor utilidad; de todos estos "peores" elegimos ahora la alternativa que no de máxima utilidad. Este comportamiento "lo mejor de lo peor" se conoce también como comportamiento prudente y es la estrategia de equilibrio en los juegos de suma cero. Más aún, en esta clase de juego coincide con el equilibrio Nash, es un caso especial del mismo. Una generalización de este comportamiento aparece cuando se conoce la distribución de probabilidades sobre los estados S_a asociados con cada alternativa *a*. En este caso se elige la alternativa que haga máxima la utilidad esperada en los estados de S_a. Esta regla es llamada *regla probabilística* por Simon. En el caso especial en que cada estado *a* tenga asociado un único elemento en

S_a, habría que elegir simplemente la alternativa que maximice la utilidad evaluada en el elemento correspondiente de S_a. En este caso se tiene la *regla de certeza* o regla de seguridad. Como se observa, estas reglas son estrictas y conllevan una carga de precisión que un agente u organización pudiera no cumplir. De ahí que Simon plantee una serie de simplificaciones esenciales para hacer que los modelos reflejen las conductas reales de los organismos, cuando menos a nivel aproximado. Entre las modificaciones centrales que Simon propone están: usar funciones de pago sencillas, mapeo refinado de la información y ordenamiento parcial de pagos. Con ello, los procedimientos de decisión no garantizan la existencia o unicidad de las soluciones. En los modelos de racionalidad global o sustantiva se analizan todas las alternativas antes de tomar la decisión. En la vida real los seres humanos examinan las alternativas de manera *secuenciada*; cuando esto es así es posible considerar la primera alternativa satisfactoria que es evaluada como aquella que se seleccionada. Hay comportamientos económicos que no dependen de la racionalidad sustantiva. Por ejemplo los salarios de los ejecutivos y el tamaño de la empresa. Resulta importante encontrar las motivaciones humanas que subyacen a la toma de decisiones económicas y las circunstancias o contexto que motivan conductas tan específicas como el altruismo. En el funcionamiento de las empresas hay decisiones sobre bases de información y capacidades limitadas de la gente para el cálculo de las consecuencias. En cuanto a los métodos de investigación de la teoría del comportamiento económico, cuyo énfasis está en lo empírico, Simon destaca tres de ellos: la observación directa de la toma de decisiones en la empresa, la simulación computacional y el desarrollo de experimentos, especialmente los estudios de laboratorio de los mercados.

Comentemos un poco más sobre distinción entre la racionalidad procesual y la racionalidad sustantiva. La primera pone atención en los procesos de elección y la calidad de los mismos, la segunda hace énfasis en la calidad del resultado, no interesa por el mecanismo o proceso de elección, solo valora el resultado final. Sostiene que para entender la racionalidad del procedimiento hay que acudir a la teoría psicológica. La base de la racionalidad acotada que propone Simon descansa en dos hechos: la información deficiente y la limitada capacidad computacional del decisor. Partiendo de esto, debemos distinguir entre el mundo real y la percepción que tenga el decisor sobre la realidad, el razonamiento que el actor tenga sobre la misma. Esto lleva directamente a que debemos construir una teoría, y comprobarla empíricamente, sobre los procesos de decisión. La teoría tendría que incluir no solamente los procesos de razonamiento sino también los procesos que generan la representación subjetiva del actor del problema de decisión.

En lo que sigue intentamos hacer una comparación entre la racionalidad estándar y la racionalidad limitada. La intensión es averiguar que tantas diferencias y similitudes existen entre ambas. Con ello queremos averiguar si hay suficientes elementos para considerar a la racionalidad acotada como un verdadera alternativa a la racionalidad estándar o bien si conforma como un perfeccionamiento de esta última. Iniciamos con lo que hay de común.

Tanto la racionalidad estándar (RE) como la racionalidad acotada (RA) adoptan el punto de vista del individualismo metodológico, término acuñado por Schumpeter, como marco base de los modelos y métodos más usados en economía (Crespo, 2009). Su punto de partida para el estudio del comportamiento humano es la acción individual. Los fenómenos y hechos observados son producto de decisiones individuales.

En ambas se explican los hechos en función de lo que se desea alcanzar, cobra importancia el nivel de satisfacción en el caso de racionalidad limitada. El mecanismo de elección en ambas racionalidades es intencional y la explicación también lo es. Esto quiere decir que el tipo de conducta está orientado a un fin concreto, utilizando una serie de medios para alcanzarlo. En ese sentido se habla de que la explicación es *teleológica*, es decir explica los hechos en función del objetivo que se desea alcanzar**.** Las dos racionalidades se pueden considerar *subjetivas* en la medida en que se basa en el punto de vista del decisor, de la satisfacción o utilidad que obtiene al lograr el objetivo propuesto. En el caso de las empresas o del consumidor, ambos buscan una utilidad que en los términos de la RE es máxima, en tanto que en la RA es satisfaciente. En resumen las principales semejanzas entre la RE y la RA consisten en que ambas parten del individualismo metodológico, sin considerar el contexto histórico y social que define la toma de decisiones individuales, hay una tendencia marcada a la modelación matemática y juegan un papel determinante las preferencias y expectativas del agente en la elección.

Pasamos ahora a analizar las principales diferencias entre RE y RA. Para facilitar la exposición consideremos los siguientes cuadros. En ellos se sintetizan las discusiones realizadas en los párrafos anteriores de este trabajo.

Característica o criterio	Racionalidad Estándar	Racionalidad Limitada
Percepción del mundo	único	dependiente del sujeto
Modelo de hombre	optimizador total	administrativo
Información	completo	incompleto
Capacidad cálculo	ilimitada	limitada
Racionalidad	sustantiva	procedimental
Criterio de decisión	maximización	satisfacción
Supuestos	fuertes e irreales	realistas

Es importante recordar la diferenciación que hace Simon del mundo real y percibido, en tanto que para la RE es lo mismo; esto hace que se conciba un mundo simple, a diferencia del mundo real que es complejo y en el que la adaptación del individuo a ese medio también lo es. Esta diferencia impacta directamente en las preferencias que tiene el agente y permite conocer mejor el proceso de decisión: en la RE se parte de que las preferencias ya existen, es decir son dadas; no así en la RA donde se construyen según lo percibido.

8. Rubinstein y la formalización de la racionalidad acotada

El trabajo de Rubinstein (1998) constituye un intento de formalización y elaboración de modelos económicos de racionalidad acotada. El autor se preocupa por plantear los instrumentos y bases técnicas que sirvan para modelar la racionalidad acotada. En la racionalidad sustantiva no se explican los procedimientos mediante los cuales se adoptan las decisiones que adoptan las unidades económicas. Las conocidas condiciones de optimización caracterizan óptimos matemáticamente, pero no hablan de procesos de cálculo. En una situación de decisión concreta posiblemente ni se conocen bien las funciones matemáticas involucradas, por ejemplo las funciones de costo, funciones de producción o función de beneficios). La información con la que se cuenta es limitada y hay que tomar una decisión en un tiempo limitado. Partiendo de esto, Rubinstein construye modelos que se preocupan por incorporar aspectos de *procedimiento* en la toma de decisión. La preocupación deja de ser la búsqueda de la alternativa óptimo. La deliberación de los agentes se centra en los procedimientos que guían su razonamiento sobre "qué" hacer y probablemente "cómo" decidir. No se trata de buscar o lograr teorías o procedimientos generales. Cada clase de problemas tendrá su propia clase de posibles soluciones. Rubinstein señala una distinción entre la racionalidad acotada y los juegos evolutivos. En racionalidad acotada se tienen agentes deliberativos, razonan su elección dadas sus limitaciones de información y capacidad cognocitiva de cálculo. En los modelos de juegos evolutivos los agentes son tratados como autómatas que responden a cambios pero que no deliberan sobre sus decisiones (Rubinstein (1998), página 2).

Lo primero que hay entender para modelar la percepción limitada de los agentes es su manera de representar preferencias sobre las alternativas que observan. El concepto de *relaciones de similaridad* es muy útil para este fin. Supongamos para simplificar que el conjunto de alternativas es el intervalo I=[0,1]. Una relación ~ sobre I es de *similaridad* si

(a) ~ es reflexiva y simétrica.

(b) ~ es continua (el gráfico de ~ es un conjunto cerrado en I^2)

(c) Si $a \le b \le c \le d$ y $a \sim d$ entonces $b \sim c$ (en medio)

(d) no(0 ~ 1) y para cualquier a entre 0 y 1 existen b y c tales que $b<a<c$ con $a \sim b$ y $a \sim c$. Además, para a=1 hay $b<a$ tal que $a \sim b$ (no degeneración)

(e) Hay a^* y a_*, el mayor y el menor a a que son similares con a. Tanto a^* como a_* son funciones estrictamente crecientes de a en cualquier punto que no sea ni 0 ni 1. (responsividad)

Una familia de relaciones que satisface todos estos requisitos es la relación de similaridad λ-*cociente*: $a \sim b$ si $1/\lambda \leq a/b \leq \lambda$ con $\lambda>1$. Mas general aún. Consideremos una función H estrictamente creciente en I . La relación: $a \sim b$ si $1/\lambda \leq H(a) / H(b) \leq \lambda$ es una relación de similaridad. En este caso decimos que (H, λ) representa la relación ~. Para ilustrar un posible proceso de decisión consideremos un agente que debe elegir loterías sencillas del tipo (x,p) que significan "se obtiene el premio x con probabilidad p y se obtiene el premio 0 con probabilidad $1-p$". Vamos a modelar un proceso de decisión sencillo tomando como primitivos a dos relaciones de similaridad: $\sim_x$ y $\sim_p$. Supongamos que queremos elegir entre dos loterías $L_1=(x_1,p_1)$ y $L_2=(x_2,p_2)$. El proceso sería el siguiente:

Paso 1: Si L_i da mayor premio con mayor probabilidad elegir L_i

Paso 2: Si $p_i \sim_p p_j$ y no $(x_i \sim_x x_j)$ y $x_i>x_j$ entonces elegir L_i

Si $x_i \sim_x x_j$ y no $(p_i \sim_p p_j)$ y $p_i>p_j$ entonces elegir L_i

Cuando el paso 2 no es decisivo habría que proponer algún Paso 3 aún no especificado.

Este ejemplo presenta una posible manera sencilla de tomar decisiones mediante la comparación parcial de loterías sencillas. El trabajo de Rubinstein (1998) nos brinda un mayor análisis de este ejemplo. Nuestro propósito es introducir al lector en la temática. Trabajo posterior propio permitirá ahondar sobre la modelación de la racionalidad acotada.

9. Hacia un nuevo modelo: elección en función de la estructura de información disponible

Estructura de información

Es muy claro que cualquier decisión adoptada depende de la información disponible por el decisor. La decisión reportará mejores consecuencias dependiendo de la mejor información disponible del decisor. Cuando se cuenta con mayor información, posiblemente el agente encontrará mejores opciones, haciendo mayor su valoración final de las consecuencias de la decisión bajo incertidumbre. Esto se puede modelar más o menos fácilmente. Para ello, requerimos introducir el concepto de *estructura de información*.

DEFINICIÓN. Supongamos que $\Omega=\{1,2,..n\}$ es un conjunto finito de resultados posibles de un evento aleatorio. Decimos que $\boldsymbol{E} = \{A_1, \ldots. A_k\}$ es una estructura de información sobre Ω si $\boldsymbol{E}$ es una partición de Ω.

Una partición de Ω refleja en cierta forma qué tanto sabemos del conjunto de resultados posibles. Veamos los casos extremos. Cuando un agente tine la estructura de información es representada por la partición $\{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\}$, ello significa que el agente posee *información perfecta*, tiene la capacidad de distinguir entre todos los estados y sabe perfectamente cual estado, i, ocurrirá cuando toma su decisión. En el caso extremo opuesto, cuando la estructura de información se representa con $\{\{1,2,\ldots,n\}\}$, interpretamos el caso de incertidumbre total donde el agente solo sabe que ocurrirá alguno de los estados pero no sabe cuál. Cuando la estructura de información es representada por la partición $\{H_1,\ldots,H_k\}$, el agente solo sabe en cual H_i ocurrirá el estado incierto pero no es capaz de distinguir entre los miembros de H_i.

Extensión de órdenes sobre resultados al conjunto potencia de resultados

Supongamos que resultados posibles de la decisión bajo riesgo, enfrentando $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, tienen como consecuencias monetarias $x_1,\ldots,x_n$ respectivamente. Adicionalmente, supongamos que el agente decisor tiene preferencias monetarias representadas por la función de utilidad, por ahora ordinal, $u(x)$, sobre el espacio de consecuencias monetarias del evento aleatorio. De este modo, u representa una preferencia completa y transitiva sobre los elementos de Ω. Aquí aparece la idea fundamental de la cuestión. Supongamos que cada preferencia completa y transitiva sobre las consecuencias monetarias se puede extender de manera única a su conjunto potencia. Si esto fuese posible, cualquier problema de decisión bajo incertidumbre; se trasladaría de modo natural, a un problema de decisión bajo el orden extendido a la potencia, de las consecuencias monetarias. Bastaría optimizar en el conjunto potencia para seleccionar el subconjunto maximal donde se encuentre la alternativa preferida. Esta "alternativa preferida" sería en realidad un subconjunto de consecuencias monetarias posibles según la preferencia de partida. Debemos justificar que esta manera *finitista* de ver el problema de decisión bajo incertidumbre representa realmente una simplificación discreta, finitista y racional del mismo. En la teoría VNM el agente es obligado a declarar preferencias sobre las loterías, el conjunto de loterías se convierte en un continuo debido a la introducción del concepto mismo de loterías, distribuciones de probabilidad sobre las consecuencias monetarias de los actos.

En el enfoque que proponemos no requerimos de supuestos de continuidad de preferencias ni de axioma de independencia para la preferencia definida en el espacio continuo de loterías. Apelamos más bien a la capacidad de *cálculo finitista* del agente que es consciente de tres elementos cruciales: su preferencia sobre las consecuencias monetarias de lo aleatorio, su extensión a la potencia y la estructura de información disponible. Supongamos que $U(A)$ es una función de utilidad para la extensión del orden sobre consecuencias monetarias posibles. El problema central del agente es el siguiente:

Max $U(A)$

A (A en la potencia del conjunto de consecuencias monetarias)

s.a. A el más parecido al mejor de la

estructura de información $\{\boldsymbol{H_1,\ldots,H_k}\}$

Desde el punto de vista de la teoría VNM, lo anterior significa que tanto las preferencias sobre consecuencias monetarias como la estructura de información disponible por el agente, inducen una partición finita del espacio de loterías. De este modo la elección sobre un conjunto continuo se reduce a una elección sobre un conjunto finito. Esto permite recuperar las ideas sobre los procedimientos detrás de una elección, acercándonos un tanto a las ideas de la racionalidad limitada.

Conclusiones

Hemos hecho una revisión del desarrollo de la teoría de decisiones individuales bajo riesgo y bajo incertidumbre tomando como hilo conductor una serie de conocidas paradojas. Se ha destacado el papel de los debilitamientos y extensiones complementarias propuestas por dos desarrollos que juzgamos muy relevantes: la racionalidad acotada de Herbert Simon y la teoría de prospectos y su evolución hacia la nueva economía del comportamiento, basada en Kanhemann y Tversky. Creemos que habrá que incursionar mayormente en los trabajos de Rubinstein para proponer nuevos modelos que formalicen procesos de decisión basados en las ideas de racionalidad acotada. En el futuro podríamos ver desarrollos que combinen ideas tanto de economía del comportamiento como de racionalidad acotada. Siguiendo esta línea esperamos presentar nuevos avances sobre el modelo introducido en la sección anterio.

Bibliografía

ALLAIS, M. (1953). “Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulats et axioma de l'ecole Americaine”. *Econometrica* 21: 503-46.

BARBERÁ, S., P. HAMMOND y Ch. SEIDL (eds), (2004) *Handbook of Utility Theory Vol. 2 Extensions*. Kluwer Academic Publishers.

BERNOULLI, D. (1738) Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 5:175-192. (traducido en Econometrica 22: 23-36 (1954))

CAMERER, Colin *et al* (2004). *Advances in Behavioral Economics.* Princeton University Press.

CARLIN P.S. (1992) “Violations of the Reduction and Independence Axioms in Allais Type and common –Ration Effect experiments”. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 19:213-235

CHEW,S.H. (1983) “A Generalization of the Quasilinear Mean with Applications to the Measurement of Income Inequality and Decision Theory Resolving the Allais Paradox”, *Econometrica* 51:1065-92

CHEW,S.H. (1989) “Axiomatic Utility Theories with the Betweenness Property”, *Annals of Operations Research*, 19:273-298.

CRAMER, G (1728) Letter to N. Bernoulli. In Bernoulli(1738) pags. 211-213.

CRESPO, Ricardo (2009). “Individualismo metodológico” en García-Bermejo, Juan C. (Editor), *Sobre la Economía y sus Métodos,* Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Editorial Trotta, España.

DEKEL, E., (1986) “An axiomatic characterization of preferences under uncertainty: Weakening the Independence axiom”, *Journal of Economic Theory* 40, 304-18.

FISHBURN,P.C.(1989) “Non-Transitive Measurable Utility for Decision Under Uncertainty”. *Journal of Mathemathical Economics* 18:187-207

KAHNEMAN, D. (2002) “Maps of bounded rationality: A perspective on intuitive judgment and choice”, In T. Frangsmyr [Nobel Foundation] (Ed.), Lex Prix Nobel: *The Nobel Prizes* 2002, pp 449-489.

KAHNEMAN, D. (2003a) “Maps of Bounded Rationality: Psychology for Behavioral Economics”, *Amercian Economic Review*, 93(5), pp. 1449-1475.

KAHNEMAN, D. (2003b) “A Psychological perspective on economics”, *Amercian Economic Review,* 93, pp 162-168.

KAHNEMAN, D. and A.TVERSKY (1979) “Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk”, *Econometrica* 47:263-291

LOOMES y SUDGEN (1986) “Dissappointment and Dynamic Consistency in Choice Under Uncertainty”, *Review of Economic Studies* 53:271-282

LUENBERGER, David G. (1995) *Microeconomic Theory*. McGraw-Hill International Editions.

MACHINA, M. (1987). “Choise under uncertainty. Problems solved and unsolved”. *The Journal of Perspectives* 1: 121-54.

MAS-COLELL, Andrés *et al* (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York, USA.

MAYNARD SMITH, J. (1982) Evolution and the theory of games, Cambridge, Cambridge University Press.

RUBINSTEIN, A. (1998) *Modeling bounded rationality,* MIT.

SAVAGE, L.J. (1954) *The Foundations of Statics*, John Wiley, New York. (Hay una segunda edición en Dover, New York, 1972)

SCHMIDT, U.(2004) “Alternatives to Expected Utility: Formal Theories”, en Barberá, Hammond y Seidl (eds), *Handbook of Utility Theory Vol. 2 Extensions*. Kluwer Academic Publishers.

SIMON, Herbert (1955). “A Behavioral Model of Rational Choice”. *The Quarterly Journal of Economics,* Vol. 69, No. 1 (Feb., 1995), pp. 99-118.

SIMON, Herbert (1978). “Rational Decision-Making in Business Organizations”. Nobel Memorial Lecture, Carnegie-Mellon University, Pittsburg, Pennsylvania, USA.

SIMON, Herbert (1994). “Behavioral Economics”. Carnegie-Mellon University, USA.

SUGDEN, R. (2004) “Alternatives to Expected Utility: Foundations”, en en Barberá, Hammond y Seidl (eds), *Handbook of Utility Thoory Vol. 2 Extensions*. Kluwer Academic Publishers.

von NEUMANN, J. and MORGENSTERN, O. (1947) *Theory of Games and Economics Behavior*. Princeton University Press. Segunda edición.