UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSI
FACULTAD DE ECONOMÍA

CUADERNO DE TRABAJO

No. 14

Caracterización del valor de Solidaridad para juegos con externalidades

Junio 2012

JOSS SÁNCHEZ PÉREZ
JULIO CÉSAR RODRÍGUEZ SEGURA

Caracterización del valor de Solidaridad para juegos con externalidades

Julio César Rodríguez Segura
Facultad de Economía, UASLP
San Luis Potosí, México
julio_98_12@hotmail.com

Joss Sánchez-Pérez
Facultad de Economía, UASLP
San Luis Potosí, México
joss.sanchez@uaslp.mx

Resumen

En este trabajo se exponen un par de propuestas de extensión del valor de Solidaridad para el caso de juegos en forma de función de partición. Para ambos casos se define un axioma que se suma a las propiedades habituales para axiomatizar valores (linealidad, simetría y eficiencia) con la finalidad de caracterizar las nuevas soluciones. Hecho ello, se procede a efectuar las demostraciones típicas de unicidad y existencia.

A lo largo del documento se exponen algunos ejemplos (sobre todo contextualizados al ámbito de la economía) que buscan aterrizar ideas e ilustrar el alcance práctico de lo aquí expuesto.

Palabras clave: Juegos cooperativos, soluciones axiomáticas, valor de Shapley, valor de Solidaridad, juegos con externalidades.

Clasificación *JEL :* C72, D30, D39

1. Introducción

Los temas de justicia distributiva son centrales en los ámbitos económicos, políticos y sociales. Se trata de proponer mecanismos de asignación de beneficios o distribución de costos comunes generados por un grupo de agentes que han decidido cooperar. Una de las herramientas teóricas que ha sido implementada con éxito para abordar esta clase problemas es la teoría de valores para juegos cooperativos.

La modelización clásica utilizada en la temática son los juegos de utilidad transferible en forma de función característica, en la cual se supone que un juego está caracterizado por las valías de cada coalición S del conjunto de jugadores N y describe la valía de la coalición S en términos de una función característica, la cual está definida sobre el conjunto de todos los subconjuntos de N. El primero en definir una solución como aquel valor que esta determinado de manera univoca por un conjunto de propiedades fue Shapley, quien en 1953 desarrollo el valor que lleva su nombre. Bajo esta misma modelización Nowark y Radzik (1994) propusieron un valor, al que llamaron valor de Solidaridad y que es presentado como otra solución para juegos cooperativos con utilidad transferible y la cual, a diferencia del valor de Shapley, no necesariamente deja sin pago a los miembros que no tienen contribuciones marginales dentro de las alianzas en las que pueden formar parte.

Para juegos simples, donde las valías conseguidas por alguna coalición oscilan entre cero y uno, resulta útil establecer un parámetro del grado de poder que tiene un jugador para incidir en el resultado final de un juego. Es decir, una medida de distribución de poder entre los jugadores. Este reparto de poder deberá estar en función de la importancia estratégica de cada jugador en el juego. En 1954, Shapley y Shubik propusieron utilizar el valor de Shapley como una medida de poder.

En general, soluciones para juegos cooperativos en forma de función característica han sido implementados eficientemente en numerosas situaciones. Sin embargo, hay cuestiones que a menudo son difíciles de resolver usando modelos de juegos en forma de función característica, especialmente en entornos con externalidades, donde el excedente generado por un grupo de agentes depende de la organización de los agentes fuera del grupo.

Atendiendo a las limitantes de los juegos en forma de función característica, en 1963 Lucas y Thrall introdujeron una nueva formulación para la teoría de juegos cooperativos en términos de funciones de partición. Estos autores consideraron que los jugadores se dividen en coaliciones, formando así una partición del conjunto de todos los jugadores. De esta forma, lo que obtiene cada coalición está en función de la organización de los jugadores del complemento.

El primer artículo que propuso un concepto de valor para juegos con externalidades fue el de Myerson (1977) quien hizo una caracterización (o extensión) del valor de Shapley para estos juegos.

En este trabajo se exponen un par de propuestas de extensión del valor de Solidaridad para el caso de juegos en forma de función de partición[1]. Para ambos casos se define un axioma que se suma a las propiedades habituales para axiomatizar valores (linealidad, simetría y eficiencia) con la finalidad de caracterizar las nuevas soluciones. Hecho ello, se procede a efectuar las demostraciones típicas de unicidad y existencia.

A lo largo del documento se exponen algunos ejemplos (sobre todo contextualizados al ámbito de la economía) que buscan aterrizar ideas e ilustrar el alcance práctico de lo aquí expuesto.

2. Juegos en forma de función característica

Definición 1 *Un juego coalicional de n jugadores en forma de función característica es una pareja (N, v) donde $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ es un conjunto finito de n jugadores y v es una función:*

$$v : 2^N \to \mathbb{R}$$

tal que: $v(\emptyset) = 0$.

Cualquier subconjunto $S \subseteq N$ se entenderá como una coalición y es un grupo de jugadores que actúan de forma conjunta. Se denotará con sus respectivas letras minúsculas la cardinalidad de los conjuntos en cuestión. Por ejemplo, $|T| = t$, $|S| = s$, $|N| = n$, etcétera.

En este trabajo se considerará un conjunto de jugadores N fijo, por lo que de aquí en adelante cuando se haga referencia a un juego, sólo se hará con respecto a su función característica v. La función característica está definida de tal manera que al conjunto potencia se le asigna un real, es decir al conjunto de subconjuntos $2^N = \{S \mid S \subseteq N, S \neq \emptyset\}$ le corresponde un número real. El valor $v(S)$ representa la ganancia conjunta de la coalición S (aunque, dependiendo del contexto, también se puede interpretar como un costo común o un valor booleano en el caso que se trate de juegos simples).

Hay diversas clases de juegos en forma de función característica, como por ejemplo los superaditivos y los de suma constante.

Definición 2 *Se dirá que un juego es superadito si y sólo si:*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

para todo $S, T \subseteq N$ tal que $S \cap T \neq \emptyset$.

Lo que dice esta definición es que lo que logran dos coaliciones dadas juntas cuando deciden unirse, debe ser al menos lo que podrían lograr sumando la valía de las dos en forma separada.

Definición 3 *Un juego v se dice de suma constante si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$v(S) + v(N \backslash S) = k$$

[1] Como también se les llama a los juegos con externalidades.

De la definición de superaditividad se desprende la siguiente proposición:

Proposición 4 *Si v es superadivo, entonces $v(N) \geq \sum_{i=1}^{k} v(S_i)$ para toda partición*

$$P = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$$

de N, con $S_i \cap S_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_k = N$.

En esta proposición se muestra que no hay manera alguna en la cual los jugadores puedan juntarse para lograr un pago mayor al que recibirían si formaran la gran colación. Es decir, se trabaja bajo el supuesto de que la cooperación genera beneficios.

Ejemplo 5 (Subsidios al campo) *El gobierno de cierto país, a través de un programa social de apoyo al campo, busca otorgar un subsidio a un grupo de ejidatarios de cierta comunidad agrícola. Este subsidio asciende a una cantidad de* $1,000 *por cada miembro que pertenezca al grupo beneficiado (aunque, como la asignación se hace al grupo como un conjunto; esto no significa que, necesariamente, cada ejidatario del grupo obtenga* $1,000*).*

La asamblea ejidal (que es el órgano supremo de los ejidatarios) debe decidir si se aprueba el reparto del recurso y en caso de ser así; se debe decidir de qué manera distribuir el recurso entre los miembros. Suponga que un miembro de la asamblea legislativa tiene mucho poder e influencia política (jugador 1) y para que el reparto del subsidio gubernamental se lleve a cabo entre todos, o parte de los ejidatarios, este miembro debe estar de acuerdo con la asignación, de lo contrario la repartición simplemente no se realiza.

Para este juego se define la función v característica como sigue:

$$v(S) = \begin{cases} 1000\,|S| & si\ 1\ \in S \\ 0 & si\ 1 \notin S \end{cases}$$

Ejemplo 6 (Unanimidad de los grandes) *Un padre de familia deja una herencia de 1 millón de dólares a sus tres hijos. En su testamento especifica que el reparto de estos bienes se hará sólo si los dos hermanos mayores (a los que denotaremos como jugador 1 y jugador 2) están de acuerdo con la repartición, de lo contario la repartición no se realiza. La función característica viene dada por:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & si\ \{1,2\} \subseteq S \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Ahora bien, se denotará por G al conjunto de juegos en forma de función característica.

$$G = \left\{v : 2^N \to \mathbb{R} \mid v(\emptyset) = 0\right\}$$

Proposición 7 *El conjunto de juegos G con operaciones de suma y multiplicación por una escalar definidas así:*

a) $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ *para todo* $v_1, v_2 \in G$

b) $(kv)(S) = kv(S)$ *para todo* $v \in G$ *y* $k \in \mathbb{R}$

forman un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Definición 8 *Se dice que un juego cooperativo v es simple si $v(S)$ toma sólo los valores 0 ó 1 para todo $S \subseteq N$.*

Se dirá que una coalición $S \subseteq N$ es una coalición ganadora si $v(S) = 1$.

3. Valor de Shapley

En esta sección se expone el valor de Shapley, el cual representa una propuesta de solución única definida bajo un conjunto de axiomas, para juegos cooperativos con utilidad transferible.

Los pagos que reciben los jugadores al participar en un juego cooperativo se representan como un vector de pagos contenido en $\mathbb{R}^n$.

Definición 9 *Una solución para un juego v es una función:*

$$\phi : G \to \mathbb{R}^n$$

donde $\phi(v) \in \mathbb{R}^n$ es un vector de pagos para el juego $v \in G$ y las coordenadas $(1, 2, \ldots, n)$ de $\phi(v)$ corresponden a los pagos de cada jugador $i \in N$.

Considérese los siguientes axiomas para una solución $\phi : G \to \mathbb{R}^n$:

Axioma 10 (Aditividad) *Se dice que ϕ es aditivo si:*

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$$

para todo $v_1, v_2 \in G$.

Lo que obtiene cada jugador en la suma de dos juegos es exactamente lo mismo que la suma de lo que obtiene en cada uno de los juegos originales.

Denótese por $S_n = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}$ al conjunto de todas las permutaciones (o grupo simétrico). Si $\theta \in S_n$ y $S \subseteq N$, entonces $\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}$. Cada $\theta \in S_n$ se interpretará como un intercambio de papeles entre los jugadores del juego v.

Axioma 11 (Simetría) *Se dice que ϕ es simétrico si $\phi(\theta \cdot v) = \theta \cdot \phi(v)$, o equivalentemente $\phi_i(v) = \phi_{\theta(i)}(\theta \cdot v)$ para todo $v \in G$ y para todo $\theta \in S_n$. Donde*

$$(\theta \cdot v)(S) = v(\theta^{-1}(S))$$

Lo que nos dice la propiedad de simetría es que el valor que obtenga cada jugador en el juego permutado es lo que obtenía el jugador al cual suplanta. Esto significa que el pago que reciben los jugadores no depende de sus atributos.

Axioma 12 (Eficiencia) *Se dice que ϕ es eficiente si para todo $v \in G$ se cumple:*

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$$

Un valor eficiente ϕ también se conoce como Pareto-eficiente.

Axioma 13 (Nulidad) *Si $i \in N$ es un jugador nulo en $v \in G$, esto es $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para toda $S \subseteq N$, entonces*

$$\phi_i(v) = 0$$

para todo $v \in G$.

Si un jugador participa como observador en un juego, entonces ese jugador no debe recibir pago.

Teorema 14 (Shapley, 1953) *Existe un único valor $Sh : G \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de aditividad, eficiencia, simetría y nulidad. Además está dado por:*

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \notin S}} \frac{s!(n - s - 1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right] \tag{1}$$

El valor de Shapley es una media ponderada de las contribuciones marginales de los jugadores i en N. Donde las ponderaciones se eligen de tal manera que sea igualmente probable elegir el cardinal de una coalición y cualquier coalición de este cardinal.

Obsérvese que las ponderaciones: $\frac{1}{n\binom{n-1}{s}}$, forman una distribución uniforme de probabilidad. Esto es porque, dado que el número de coaliciones de tamaño s a las que cada jugador i se adhiere es $\binom{n-1}{s}$, entonces:

$$\sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\notin i}} \frac{1}{n\binom{n-1}{s}} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{s}}{n\binom{n-1}{s}} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1.$$

Para juegos simples, sea z la cardinalidad de una coalición a la que un jugador i hace ganadora, y s la cardinalidad de una colación que no contiene a i. Nótese que, como $Z = S \cup \{i\}$ entonces, $z = s + 1$. Además las contribuciones marginales son siempre 1 o 0. Por lo tanto valor de Shapey para juegos simples (o índice de poder de Shapley-Shubik) está dado por la siguiente expresión:

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{Z ganando\\ Z\setminus\{i\} perdiendo}} \frac{(z-1)!(n-z)!}{n!}$$

La expresión anterior es una medida de poder (asigna a cada jugador un porcentaje del total del poder repartido), entonces resulta que:

$$\sum_{i\in N} Sh_i(v) = 1$$

para todo $v \in G$ tal que v es un juego simple.

Ejemplo 15 (Partidos políticos en San Luis Potosí, México (2010).) *A continuación se presenta una aplicación especial de los juegos simples.*

En el congreso del estado de San Luis Potosí, existen 7 representaciones parlamentarias conformadas de la siguiente manera[2]*:*

Partido	*PAN*	*PRI*	*N.A*	*PRD*	*PT*	*PVEM*	*C.P*
Número de diputados	10	9	4	1	1	1	1

Se desea saber cuál es el índice de poder de cado uno de los partidos si:

a) *Para obtener una mayoría simple se requiere de 14 votos.*

b) *Para obtener una mayoría calificada (reforma constitucional) se requiere de 18 votos.*

Para calcular el índice de poder del inciso a) basado en el valor de Shapley-Shubik, hay que ver en cuáles coaliciones ganadoras cada partido actúa como pivote (es decir, en donde un partido político es necesario para que la coalición gane).

Se denota como "resto" a aquellos partidos que tienen sólo un diputado en la cámara, es decir, PRD, PT, PVEM y CP.

[2] Fuente: Consejo Estatal Electoral y de Participación Ciudadana de San Luis Potosí. www.ceepacslp.org.mx

Se tiene que el índice de poder para cada partido político, bajo las condiciones de este primer inciso son:

$$\begin{aligned}
Sh_{PAN}(v) &= 2\left(\frac{1!5!}{7!}\right) + \left(\binom{1}{1} + 2\binom{4}{1}\right)\frac{2!4!}{7!} + 2\binom{4}{2}\frac{3!3!}{7!} \\
&\quad + \left(\binom{4}{4} + 2\binom{4}{3}\right)\frac{4!2!}{7!} + 2\binom{4}{4}\frac{5!1!}{7!} \\
&= \frac{37}{105} \approx 35.23\,\% \\
Sh_{PRI}(v) &= \binom{1}{1}\left(\frac{1!5!}{7!}\right) + 2\binom{4}{1}\frac{2!4!}{7!} + 2\binom{4}{2}\frac{3!3!}{7!} \\
&\quad +2\binom{4}{3}\frac{4!2!}{7!} + \binom{4}{4}\frac{5!1!}{7!} \\
&= \frac{2}{7} \approx 28.57\,\% \\
Sh_{PRI}(v) &= Sh_{N.A}(v) = \frac{2}{7} \approx 28.57\,\% \\
Sh_{RESTO}(v) &= \frac{2!4!}{7!} + \binom{3}{3}\frac{2!4!}{7!} \\
&= \frac{2}{105} \approx 1.904\,\%
\end{aligned}$$

Por otro lado, el índice de poder de Shapley-Shubik para cada partido político, en el caso de votación para una reforma constitucional, viene dado por:

$$\begin{aligned}
Sh_{PAN}(v) &= \frac{1!5!}{7!} + \left(\binom{1}{1} + \binom{4}{1}\right)\frac{2!4!}{7!} + \left(\binom{4}{1} + \binom{4}{2}\right)\frac{3!3!}{7!} \\
&\quad + \left(\binom{4}{2} + \binom{4}{3}\right)\frac{4!2!}{7!} + \left(2 + \binom{4}{3}\right)\frac{5!1!}{7!} + \frac{6!1!}{7!} \\
&= \frac{11}{21} \approx 52.38\,\% \\
Sh_{PRI}(v) &= \frac{1!5!}{7!} + \left(\binom{1}{1} + \binom{4}{1}\right)\frac{2!4!}{7!} + \left(\binom{4}{1} + \binom{4}{2}\right)\frac{3!3!}{7!} \\
&\quad + \left(\binom{4}{2} + \binom{4}{3}\right)\frac{4!2!}{7!} + \left(1 + \binom{4}{3}\right)\frac{5!1!}{7!} \\
&= \frac{5}{14} \approx 35.71\,\% \\
Sh_{N.A}(v) &= \binom{4}{4}\frac{5!1!}{7!} = \frac{1}{42} \approx 2.38\,\% \\
Sh_{RESTO}(v) &= \binom{3}{3}\frac{5!1!}{7!} = \frac{1}{42} \approx 2.38\,\%.
\end{aligned}$$

Obsérvese como en el caso de votación para la aprobación de una reforma constitucional, el índice de poder del PAN aumenta considerablemente con respecto al caso de mayoría simple (hasta $52.38\,\%$*) convirtiéndose incluso en un jugador vetador (es decir, un jugador indispensable para que cualquier coalición* $S \subseteq N$ *resulte ganadora). Para el caso de mayoría simple la alianza PAN-NA se vuelve de importancia estratégica; mientras que, para el caso de mayoría calificada, esta coalición pierde poder y el PAN por si sólo adquiere mayor fuerza. Nótese también en el primer inciso, que aunque que el PRI tenga más representantes en la cámara que el partido NA, ambos tienen el mismo índice de poder. Lo cual deja en entrevisto que el poder de cada partido no depende, necesariamente, de la cantidad de miembros integrantes, sino de las alianzas en las que actúa como pivote.*

4. Valor de Solidaridad

En ésta sección se abordará otro concepto de solución para juegos coalicionales de utilidad transferible llamado valor de Solidaridad, introducido por Nowark y Radzik (1994). A diferencia del valor de Shapley, este nuevo valor podría asignar un pago distinto de cero a un jugador aun cuando sus contribuciones marginales sean cero (jugadores nulos desde la perspectiva del valor de Shapley). Un jugador no recibirá pago sólo cuando las contribuciones marginales medias de todas las coaliciones que lo contienen sean cero.

Definición 16 *Sea $v \in G$ y $S \subseteq N$, se define la cantidad:*

$$A(S) = \sum_{k \in S} \frac{1}{s}(v(S) - v(S \setminus \{k\}))$$

como la contribución marginal promedio de los miembros de la coalición $S \subseteq N$.

Ahora bien, sea $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ una solución sobre G. Considérese los axiomas de aditividad, eficiencia y simetría definidos anteriormente y considérese, además, el siguiente axioma:

Axioma 17 (A-nulidad) *Si $i \in N$ es un jugador A-nulo en el juego $v \in G$, esto es, $A(S) = 0$ para toda coalición S que contiene a i, entonces:*

$$\psi_i(v) = 0$$

Para la caracterización del valor, este nuevo axioma remplaza al de nulidad propuesto por Shapley. En este caso, si en todas las coaliciones en las cuales un jugador i se encuentra los miembros aportan en promedio cero, entonces el pago que recibirá este jugador i es cero.

Teorema 18 (Nowark y Radzik (1994)) *Existe un único valor $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ que cumple con los axiomas de aditividad, eficiencia, simetría y A-nulidad; y está dado por:*

$$\psi_i(v) = \sum_{S \ni i} \frac{(n-s)!(n-1)!}{n!} A(S) \tag{2}$$

A la expresión (2) se le conoce como valor de Solidaridad.

Como se puede apreciar $\psi_i(v)$ asigna ponderaciones idénticas a las del valor de Shapley; sin embargo, éstas son con respecto a las contribuciones medias marginales y no con respecto a las individuales. De esta manera cada jugador recibe un pago en función de las aportaciones promedio que hacen todos los miembros de las coaliciones que incluyen a éste jugador. Así, si la contribución marginal individual de un jugador es mayor a la contribución marginal promedio, se puede decir que éste miembro ofrece una parte de su aportación adicional al resto del grupo. En el caso contrario el jugador se estaría beneficiando de las aportaciones marginales de los demás miembros de una coalición.

Ejemplo 19 (Unanimidad de los grandes) *El valor de Shapley asociado a v es:*

$$Sh(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

El valor de Solidaridad para este juego es:

$$\psi(v) = \left(\frac{7}{18}, \frac{7}{18}, \frac{2}{9}\right)$$

Bajo el criterio del valor de Solidaridad el hermano menor ha recibido un pago distinto de cero, mientras que el pago recibido por los hermanos mayores ha sido menor que el asignado por el valor de Shapley. Así, se puede decir que los hermanos mayores sacrifican una parte de su pago para que el hermano menor no se quede sin parte en la asignación. Notándose cierta "solidaridad" por parte de los hermanos mayores hacia su hermano menor.

Ejemplo 20 (Subsidios al campo) *Se puede probar que si se quiere repartir un monto M por cada miembro perteneciente a un grupo beneficiario de n miembros, el pago asignado por la solución de Shapley es:*

$$Sh_i(v) = \begin{cases} M\left(\frac{n+1}{2}\right) & si\ i = 1 \\ \frac{M}{2} & si\ i \neq 1 \end{cases}$$

En particular, para el ejemplo dado el valor de Shapley resulta:

$$Sh(v) = (2000, 5000, 5000)$$

Supóngase que los ejidatarios 2 y 3 viven en condiciones precarias, por lo que se decide que el valor de Solidaridad es buen mecanismo de asignación dado que no se desea afectar en demasía a estos ejidatarios. Entonces, el vector de pagos Solidaridad asociado a este juego es:

$$\psi(v) = (1388.89,\ 805.56, 805.56)$$

El operador Solidaridad beneficia a los ejidatarios menos influyentes y con menos poder político, "absorbiendo" una parte del pago que asigna Shapley al ejidatario con más poder político (jugador 1).

5. Juegos con externalidades

La realidad refleja que existen muchos escenarios en los cuales lo que pueden obtener los jugadores de una coalición ya no depende tan solo de ellos, si no también de la forma en que se organizan y juegan aquellos miembros que no se encuentran en la coalición. En estas aplicaciones la molelización tradicional de juegos en función característica resulta inadecuada.

En esta sección se aborda la formulación propuesta por Lucas y Thrall (1963) para la teoría de juegos cooperativos en términos de funciones de partición. Estos autores consideraron que los jugadores se dividen en coaliciones, formando así una partición del conjunto de todos los jugadores. De esta forma, lo que obtiene cada coalición está en función de la organización de los jugadores del complemento. Además se presenta la adaptación del valor de Shapley para juegos en forma de función de partición hecha por Myerson R. en 1977.

6. Juegos en forma de función de partición

El concepto de partición de un conjunto será importante en esta sección, el cual simplemente es una colección de coaliciones disjuntas que unidas forman a tal conjunto. Por convención, se considera que el vacío se encuentra en toda coalición del conjunto N. Formalmente,

Definición 21 *Si PT es el conjunto de las particiones de N entonces éste conjunto está dado por:*

$$PT = \left\{\{S_1, S_2, ..., S_r\ \} |\ \bigcup_{i=1}^{r} S_i = N,\ S_i \neq \emptyset,\ S_i \cap S_j = \emptyset\ si\ j \neq k\right\}$$

para un r fijo.

Definición 22 *El conjunto dado por la siguiente expresión:*

$$EPT = \{(S, Q\ ) | S \in Q \in PT\}$$

Se le denomina el conjunto de coaliciones incrustadas en las particiones de PT.

Utilizando este par de conceptos podemos definir los juegos en forma de función de partición como sigue (aquí también se considera el conjunto de jugadores como un conjunto fijo):

Definición 23 *Un juego en forma de función de partición es una función:*

$$v : EPT \to \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset, Q) = 0$ *para todo* $Q \in PT$.

Si v es un juego en forma de función de partición y $(S, Q) \in EPT$, el número $v(S, Q) \in \mathbb{R}$ representa la ganancia conjunta que logra la coalición S cuando la estructura coalicional es Q.

Notación 24 *El conjunto de juegos en forma de función de partición se denotará por* G^P*, es decir:*

$$G^P = \{v : EPT \to \mathbb{R} \mid v(\emptyset, Q) = 0 \text{ para todo } Q \in PT\}$$

Proposición 25 *El conjunto de juegos* G^P*, con operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas así:*

a) $(v_1 + v_2)(S, Q) = v_1(S, Q) + v_2(S, Q)$ *para todo* $v_1, v_2 \in G^P$ *y para todo* $(S, Q) \in EPT$.

b) $(kv)(S, Q) = kv(S, Q)$ *para todo* $v \in G^P$, $(S, Q) \in EPT$ *y* $k \in \mathbb{R}$.

forma un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

6.1. Valor de Shapley extendido.

Para una solución $\phi : G^P \to \mathbb{R}^n$ tómese en cuenta los siguientes axiomas:

Axioma 26 (Aditividad) ϕ *es aditivo si para todo* $v_1, v_2 \in G^P$*:*

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$$

Igual que en el caso de juegos en función característica, S_n actúa sobre el conjunto PT y EPT de la siguiente manera:

a) Para $\theta \in S_n$ y $\{S_1, S_2, ..., S_r\} \in PT$:

$$\theta \{S_1, ..., S_n\} = \{\theta(S_1), \theta(S_2), ..., \theta(S_n)\}$$

b) Para $\theta \in S_n$ y $(S_1, \{S_1, S_2, ..., S_n\}) \in EPT$:

$$\theta(S_1, \{S_1, ..., S_r\}) = (\theta(S_1), \{\theta(S_1), \theta(S_2), ..., \theta(S_r)\})$$

Axioma 27 (Simetría) ϕ *es simétrico si* $\phi(\theta \cdot v) = \theta \cdot \phi(v)$ *o bien* $\phi_i(v) = \phi_{\theta(i)}(v)$ *para todo* $v \in G^P$ *y para toda permutación* $\theta \in S_n$*. Donde:*

$$(\theta \cdot v)(S, Q) = v(\theta^{-1}(S, Q))$$

Notación 28 *Para cualquiera* $Q \in PT$*,* $Q_1 \in PT$*, se define* $Q \wedge Q_1$ *como:*

$$Q \wedge Q_1 = \{S \cap S_1 \mid S_1 \in Q_1,\ S \in Q,\ S \cap S_1 \neq \emptyset\}$$

Definición 29 *Se dice que una coalición* $S_C \subseteq N$ *es carrier de un juego* $v \in G^P$ *si:*

$$v(S, Q) = v(S \cap S_C, Q \wedge \{S_C, N \backslash S_C\})$$

para todo $(S, Q) \in EPT$.

Axioma 30 (Eficiencia) *ϕ es eficiente si*

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N, \{N\})$$

para todo $v \in G^P$.

Las propiedades de eficiencia y nulidad se engloban en el siguiente axioma:

Axioma 31 (Carrier) *Para todo $v \in G^P$ y para todo $S \in P$, si S es una carrier de v entonces:*

$$\sum_{i \in S} \phi_i(v) = v(N, \{N\})$$

Este axioma sugiere que el monto total de beneficios se asigne entre los miembros de un carrier, dejando al resto de los integrantes (jugadores nulos) sin pago alguno.

Teorema 32 (Myerson R.(1977)) *Existe un único operador $\phi : G^P \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de aditividad, simetría y carrier para juegos en función de partición y este valor esta dado por la siguiente expresión:*

$$\phi_i(v) = \sum_{(S,Q) \in EPT} (-1)^{q-1}(q-1)! \sum_{\substack{T \in Q \\ \ni T \neq S \\ i \notin S}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(q-1)(n-t)} \right) v(S, Q) \tag{3}$$

para todo $i \in N$ y $v \in G^P$.

Definición 33 *Sea $\phi^e : G^P \to \mathbb{R}^n$ y $\phi : G \to \mathbb{R}^n$, decimos que ϕ^e es una extensión del operador ϕ si $\phi^e(w) = \phi(v)$ siempre que $w(S, Q) = w(S, T) = v(S)$ para todo $Q \neq T \in PT$, $v \in G$, $w \in G^P$.*

Nótese que la expresión (3) es una extensión del valor de Shapley.
En lo sucesivo se nombrará valor de Myerson a la solución dada por la expresión (3).

7. Extensión del valor de valor de Solidaridad

En este último apartado es donde se encuentra la contribución del presente trabajo: la extensión del valor de Solidaridad para el caso de juegos con externalidades. Al respecto se formulan un par de propuestas; la primera de ellas sólo considera la influencia que tiene cierta partición en particular en el resultado final del juego, mientras que la segunda toma en cuenta todas las posibles maneras en las cuales pueden jugar los miembros que no pertenecen a una coalición S, ponderando así la influencia que tienen todas las particiones en el pago final que reciben los jugadores. Para ambos casos se define un axioma que se suma a las propiedades habituales ya referidas en secciones anteriores (linealidad, simetría y eficiencia) con la finalidad de caracterizar el nuevo valor. Hecho ello, se procede a efectuar las demostraciones típicas de unicidad y existencia.

7.1. Valor de Solidaridad extendido (propuesta 1)

Considérese los axiomas de aditividad, simetría y eficiencia definidos en la sección anterior para una solución $\psi^e : G^P \to \mathbb{R}^n$. Se añadirá un nuevo axioma éstas propiedades: un axioma de A-nulidad extendida.

Definición 34 *Sea $v \in G^P$ y $(S,Q) \in EPT$ definimos la cantidad:*

$$A_I^v(S,Q) = \sum_{k \in S} \frac{1}{s} \left[v(S,Q) - v(S \setminus \{k\}, \{\{k\}, S \setminus \{k\}\} \cup \{Q \setminus \{S\}\}\right]$$

como la contribución marginal media de un jugador k en la coalición incrustada (S,Q).

Definición 35 *Se dice que $i \in N$ es A_I-nulo en $v \in G^P$, si $A_I^v(S,Q) = 0$ para toda $(S,Q) \in EPT$ tal que $S \ni i$.*

Para $v \in G^P$y $(S,Q) \in EPT$ la cantidad $A_I^v(S,Q)$ mide las contribuciones promedio de todos los jugadores que están en una coalición S. Para $k \in S$ únicamente se toma en cuenta la partición que deja solo al jugador k formando una coalición, a $S \setminus \{k\}$ formando otra y el resto de las coaliciones originales formando el complemento de dicha partición.

Axioma 36 (A_I-nulidad) *Sean $v \in G^P$, $\psi_i^e : G^P \to \mathbb{R}$ e $i \in N$ es A_I-nulo en el juego en v, entonces: $\psi_i^e(v) = 0$.*

Teorema 37 *Existe un único valor $\psi^e : G^P \to \mathbb{R}$ que satisface los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y A_I-nulidad. Más aún está dado por:*

$$\psi_i^e(v) = \sum_{\substack{(S,Q) \in EPT \\ S \ni i}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} A_I^v(S,Q) \tag{4}$$

La expresión (4) es una extensión del valor de Solidaridad para el caso de juegos en forma de función de partición.

Considérese el siguiente conjunto de juegos:

$$e_{(T,K)}(S,Q) = \begin{cases} \binom{s}{t}^{-1} \text{ si } T \subseteq S \text{ y } \left(\text{para todo } T' \in Q \setminus \{S\}\right) (\exists\, T'' \in K) \mid\ T' \subseteq T'') \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Los juegos $\left\{e_{(T,K)}\right\}_{(T,K) \in EPT}$ son una base para G^P.

Lema 38 *Todo $i \in N \backslash T$ es A_I-nulo en los juegos base $\left\{e_{(T,K)}\right\}_{(T,K) \in EPT}$.*

Demostración. Tómese en consideración los siguientes escenarios posibles:

1) $i \in N \backslash T$ y $e_{(T,K)}(S,Q) = 0$

1.1) Si $T \nsubseteq S$ entonces $T \nsubseteq S \setminus \{i\}$ para todo $S \ni i$. Luego:

$$e_{(T,K)}(S,Q) = e_{(T,K)}(S \setminus \{i\}, \bar{Q}) = 0$$

para toda $\bar{Q} \ni S \setminus \{i\}$. Así

$$A_I^{e_{(T,K)}}(S,Q) = 0$$

para toda $S \ni i$ y $Q \in PT$.

1.2) Si:

$$\left(\exists\, T' \in Q \setminus \{S\}\right) \quad \mid \quad (\nexists T'' \in K; T' \subseteq T'') \Longrightarrow$$
$$\left(\exists\, T' \in Q \backslash \{S \setminus \{i\}\}\right) \quad \mid \quad (\nexists T'' \in K; T' \subseteq T'')$$

siempre que $S \backslash \{i\} \in \bar{Q} = \{S \setminus \{i\}, \{\{i\}, S \setminus \{i\}\} \cup \{Q \backslash \{S\}\}\}$.

Entonces:

$$e_{(T,K)}(S,Q) = e_{(T,K)}(S\backslash \{i\}, \{\{\{i\}, S\backslash \{i\}\} \cup \{Q\backslash\{S\}\}\})$$

para toda $S \ni i$.

2) $i \in N\backslash T$ y $e_{(T,K)}(S,Q) = \binom{s}{t}^{-1}$

2.1) Si:

$$\left(\forall\, T^{'} \in Q\backslash \{S\}\right) (\exists\, T^{''} \in K) \mid T^{'} \subseteq T^{''}) \Longrightarrow$$
$$(\forall T^{'} \in Q\backslash\{S\backslash \{i\}\})(\exists T^{''} \in K) \mid T^{'} \subseteq T^{''})$$

siempre que:
$S\backslash\{i\} \in \bar{Q} = \{S\backslash \{i\}, \{\{i\}, S\backslash \{i\}\} \cup \{Q\backslash\{S\}\}\}$

2.2) Para el caso en que $T \subset S$ se procederá de manera análoga a la demostración hecha por Nowark and Radzik (1994) para el valor de Solidaridad en juegos en función característica.

Como $T \subset S$ entonces S se puede expresar $S = T \cup D$ y $T \cap D = \emptyset$, $D \neq \emptyset$. Para probar que i es A_I-nulo en $e_{(T,K)}$ deberá demostrase que:

$$e_{(T,K)}(S,Q) = \frac{1}{s}\sum_{i \in S} e_{(T,K)}(S\backslash \{i\}, \{\{\{i\}, S\backslash \{i\}\} \cup \{Q\backslash\{S\}\}\})$$

Para todo $(S,Q) \in EPT$ tal que $S \ni i$.
Para probarlo nótese que:

i)

$$\sum_{\substack{i \in S \\ \bar{Q} \ni S\backslash\{i\}}} e_{(T,K)}(S\backslash \{i\}, \bar{Q}) = \sum_{\substack{i \in D \\ \bar{Q} \ni S\backslash\{i\}}} e_{(T,K)}(S\backslash \{i\}, \bar{Q})$$

ii)

$$e_{(T,K)}(S,Q) = \left(\frac{s!}{(s-t)!t!}\right)^{-1} = \frac{(|T \cup D| - |T|)!t!}{|T \cup D|!}$$

Como T y D son disjuntos, entonces:

$$e_{(T,K)}(S,Q) = \frac{d!t!}{(t+d)!}$$

iii) Por **2.1)**:

$$e_{(T,K)}(S\backslash i, \bar{Q}) = \left(\frac{(s-1)!}{(s-1-t)!t!}\right)^{-1} = \frac{(d-1)!t!}{(t+d-1)!}$$

Utilizando los resultados **i)** a **iii)** se tiene que:

$$\begin{aligned} e_{(T,K)}(S,Q) - \frac{1}{s}\sum_{i \in S} e_{(T,K)}(\{S\backslash \{i\}\}, \{\{\{i\}, S\backslash \{i\}\} \cup \{Q\backslash\{S\}\}\}) &= \\ \frac{d!t!}{(t+d)!} - \frac{d}{(t+d)}\frac{(d-1)!t!}{(t+d-1)!} &= 0 \end{aligned}$$

.

Por lo tanto:

$$e_{(T,K)}(S,Q)=\frac{1}{s}\sum_{i\in S}e_{(T,K)}(S\backslash\{i\},\{\{\{i\},S\backslash\{i\}\}\cup\{Q\backslash\{S\}\}\})$$

Para todo $(S,Q)\in EPT$ tal que $S\ni i$, e $i\in N\backslash T$ es A_I-nulo en los juegos $e_{(T,K)}$. ■

Ahora ya se puede proceder a la demostración del Teorema:

Demostración del Teorema.

a) Unicidad. Sea $\psi_i^e : G^P \to \mathbb{R}$ una solución que satisface los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y A_I-nulidad, e $i\in N\backslash T$. Para $i,j\in T$ se define $\theta\in S_n$ tal que $\theta(i)=j$ y $\theta(T,K)=(T,K)$ para todo $(T,K)\in EPT$.

Por simetría:

$$\psi_i^e(\theta\cdot(e_{(T,K)}))=\theta\cdot(\psi_i^e e_{(T,K)})=\psi_{\theta(i)}^e(e_{(T,K)})$$

De donde,

$$\psi_i^e(\theta\cdot e_{(T,K)})=\psi_j^e(e_{(T,K)})$$

Usando la función que describe a los juegos base $e_{(T,K)}$ y tomando en cuenta que

$$\theta\cdot e_{(T,K)}(S,Q)=e_{(T,K)}(\theta^{-1}(S,Q))$$

se concluye que $\theta\cdot e_{(T,K)}=e_{(T,K)}$. Por lo tanto

$$\psi_i^e(e_{(T,K)})=\psi_j^e(e_{(T,K)})$$

para todo $i,j\in T$.

Por el axioma de eficiencia:

$$\sum_{i\in N}\psi_i^e(e_{(T,K)})=e_{(T,K)}(N,\{N\})=\binom{n}{t}^{-1}$$

Por A_I-nulidad y simetría:

$$\sum_{i\in N}\psi_i^e(e_{(T,K)})=\sum_{i\in T}\psi_i^e(e_{(T,K)})=t(\psi_i^e(e_{(T,K)}))=\binom{n}{t}^{-1}$$

De donde:

$$\psi_i^e(e_{(T,K)})=\binom{n}{t}^{-1}/t$$

para todo $i\in T$.

Luego, el único valor posible $\psi_i^e(e_{(T,K)})$ es:

$$\psi_i^e(e_{(T,K)})=\begin{cases}\binom{n}{t}^{-1}/t & \text{si } i\in T\\ 0 & \text{si } i\notin T\end{cases}$$

para todo $i\in N$.

Finalmente, por linealidad:

$$\begin{aligned}\psi_i^e(v) &= \sum_{\substack{(T,K)\in EPT\\ T\ni i}}k_{(T,K)}\psi_i^e(e_{(T,K)})\\ \psi_i^e(v) &= \sum_{\substack{(T,K)\in EPT\\ T\ni i}}\frac{k_{(T,K)}\binom{n}{t}^{-1}}{t}\end{aligned}$$

para todo $i\in N$, $k_{(T,K)}\in\mathbb{R}$ y $v\in G^P$.

b) Existencia. Para probar existencia basta ver que (4) satisface los cuatro axiomas planteados. Aquí sólo se prueba que cumple con eficiencia.

Dado que el conjunto $\{e_{(T,K)}\}_{(T,K)\in EPT}$ es una base para G^P, para cualquier $v \in G^P$ existen escalares únicos $c_{(T,K)} \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \sum_{(T,K)\in EPT} c_{(T,K)}(e_{(T,K)})$$

Por linealidad:

$$\begin{aligned}\psi_i^e(v) &= \sum_{(T,K)\in EPT} c_{(T,K)}\psi_i^e(e_{(T,K)}) \\ \sum_{i\in N}\psi_i^e(v) &= \sum_{(T,K)\in EPT} c_{(T,K)}\sum_{i\in N}\psi_i^e(e_{(T,K)})\end{aligned}$$

además

$$\sum_{i\in N}\psi_i^e(e_{(T,K)}) = e_T(N,\{N\})$$

y de esta manera

$$\sum_{i\in N}\psi_i^e(v) = \sum_{(T,K)\in EPT} c_{(T,K)}e_T(N,\{N\})$$

como $v = \sum_{(T,K)\in EPT} c_{(T,K)}(e_{(T,K)})$, entonces

$$v(N,\{N\}) = \sum_{(T,K)\in EPT} c_{(T,K)}e_{(T,K)}(N,\{N\})$$

y por lo tanto

$$\sum_{i\in N}\psi_i^e(v) = v(N,\{N\})$$

■

7.2. Valor de Solidaridad extendido (propuesta 2)

En esta sección se presenta una adaptación más del valor de Solidaridad propuesto por Nowark y Radzik (1994) para el caso de juegos en función de partición. A diferencia del caso anterior, esta nueva alternativa de extensión toma en cuenta los efectos que tienen todas las particiones que contienen a una coalición $S \subseteq N$. Al considerar todas las maneras posibles en las que se pueden agrupar los jugadores que no se encuentran en una coalición $S \ni i$, éste segundo valor brinda una perspectiva más amplia que el propuesto en el apartado anterior, en el sentido de que aquel sólo tomaba en cuenta una posible configuración para el complemento de S.

Notación 39 *Para toda $S \subseteq N$ se denotará $\|Q_S\|$ como el número de particiones que contienen a S.*

Sea $v \in G^P$ y $(S,Q) \in EPT$ se define la cantidad:

$$A_{II}^v(S,Q) = \frac{1}{s\left\|Q_{S\setminus\{k\}}\right\|}\sum_{k\in S}\left[v(S,Q) - v(S\setminus\{k\},\bar{Q})\right]$$

como la contribución marginal media de un jugador k en la coalición incrustada (S,Q).

La expresión $A_{II}^{v}(S,Q)$ brinda una visión holística de medir las contribuciones marginales de un jugador k en la coalición incrustada (S,Q), ya que toma en cuenta todas las posibles estructuras coalicionales $\bar{Q}$ que pueden ser formadas por los jugadores fuera de S, una vez que k la abandonó. Por ejemplo, la coalición S simplemente se pudó romper y los jugadores complementarios mantuvieron las mismas alianzas que tenían antes de la desunión (situación medida en la primera propuesta para medir contribuciones marginales medias), pero también k pudó haberse unido a una de las coaliciones del complemento de S, o en general las alianzas originales pudieron haber reaccionado de maneras distintas a la separación del jugador k de S. Todos estos escenarios posibles son tomados en cuenta por $A_{II}^{v}(S,Q)$.

Considérese los axiomas de aditividad, simetría y eficiencia definidos anteriormente para una solución $\Psi^{e}: G^{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n}$. A estas propiedades, se incorporará un nuevo axioma de A-nulidad ($A_{II}-$nulidad) para esta segunda propuesta.

Definición 40 *Se dice que $i \in N$ es A_{II}-nulo en $v \in G^{P}$, si $A_{II}^{v}(S,Q)=0$ para toda $(S,Q) \in EPT$ tal que $S \ni i$.*

Axioma 41 ($\mathbf{A}_{II}$-nulidad) *Sean $v \in G^{P}$, $\psi_{i}^{e}: G^{P} \rightarrow \mathbb{R}$ e $i \in N$ es A_{II}-nulo en el juego en v, entonces: $\Psi_{i}^{e}(v)=0$.*

Teorema 42 *Existe un único valor $\Psi^{e}: G^{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n}$ que satisface los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y A_{II}-nulidad. Además este valor está dado por:*

$$\Psi_{i}^{e}(v)=\sum_{\substack{(S,Q)\in EPT \\ S\ni i}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!\,\|Q_{S}\|} A_{II}^{v}(S,Q) \tag{5}$$

La expresión (5) es una extensión del valor de Solidaridad para el caso de juegos en forma de función de partición.

Considérese el siguiente conjunto de juegos:

$$w_{(T,K)}(S,Q)=\begin{cases} \binom{s}{t}^{-1} / \left(\|Q_{T}\|^{\min\{1,(s-t)\}}\right) & \text{si } T\subseteq S \text{ y (si } T=S \Rightarrow K=Q) \\ 0 & \text{en caso contario} \end{cases}$$

La familia de juegos $\left\{w_{(T,K)}\right\}_{(T,K)\in EPT}$ forman una base para el espacio de juegos G^{P}.

Lema 43 *Todo $i \in N\backslash T$ es A_{II}-nulo en los juegos $w_{(T,K)}$.*

Demostración. Suponga los siguientes escenarios posibles:

1) $i \in N\backslash T$ y $T \nsubseteq S$, entonces $T \nsubseteq S\backslash\{i\}$ para todo $S \ni i$. Luego:

$$w_{(T,K)}(S,Q)=w_{(T,K)}(S\backslash\{i\},\bar{Q})=0$$

para toda $\bar{Q} \ni S\backslash\{i\}$. Así:

$$A_{II}^{w_{(T,K)}}(S,Q)=0$$

para todo $(S,Q) \in EPT$ tal que $S \ni i$.

Nótese que para este caso T siempre es distinto de S dado que: $i \notin T$ y $S \ni i$.

2) $i \in N\backslash T$ y se cumple que $w_{(T,K)}(S,Q)=\binom{s}{t}^{-1} / \left(\|Q_{T}\|^{\min\{1,(s-t)\}}\right)$

2.1) Suponiendo que $T \subset S$ y $s-t \geq 2$. Como en demostraciones anteriores, S se puede expresar como $S=T\cup D$, $T\cap D=\emptyset$ y $D\neq\emptyset$. Para probar que i es A_{II}-nulo deberá demostrase que:

$$w_{(T,K)}(S,Q)=\frac{1}{s\left\|Q_{S\backslash\{i\}}\right\|} \sum_{\substack{i\in S \\ \bar{Q}\ni S\backslash\{i\}}} \left[w_{(T,K)}(S\backslash\{i\},\bar{Q})\right] \tag{6}$$

para todo $(S,Q) \in EPT$ tal que $S \ni i$.

Como $s-t \geq 2$, entonces $|S\setminus\{i\}|-t \geq 1$, lo cual garantiza que $T \subset S\setminus\{i\}$. También es cierto que

$$\sum_{\substack{i\in S\\ \bar{Q}\ni S\setminus\{i\}}} \left[w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q})\right] = \sum_{\substack{i\in D\\ \bar{Q}\ni S\setminus\{i\}}} w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q})$$

En la última suma se están sumando $|D| = d$ elementos iguales y el hecho que $|S\setminus\{i\}|-t \geq 1$ garantiza que $w_{(T,K)}(S,Q) = \binom{s}{t}^{-1} / \left(\|Q_T\|^{\text{mín}\{1,(s-t)\}}\right)$ para las $\|S\setminus\{i\}\|$ particiones que contienen a $S\setminus\{i\}$ y no haya términos iguales a cero. Luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i\in S\\ \bar{Q}\ni S\setminus\{i\}}} \left[w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q})\right] &= \sum_{\substack{i\in D\\ \bar{Q}\ni S\setminus\{i\}}} w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q}) \\
&= d\left\|Q_{S\setminus\{i\}}\right\| w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q})
\end{aligned}$$

Además, por el hecho de que $\text{mín}\{1,(|S\setminus i|-t)\} = 1$ para este caso, se cumple

$$w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q}) = \frac{(d-1)!t!}{\|Q_T\|(t+d-1)!}$$

Luego:

$$\sum_{\substack{i\in S\\ \bar{Q}\ni S\setminus\{i\}}} \left[w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q})\right] = \frac{d\left\|Q_{S\setminus\{i\}}\right\|(d-1)!t!}{\|Q_T\|(t+d-1)!} = \frac{\left\|Q_{S\setminus\{i\}}\right\| d!t!}{\|Q_T\|(s-1)!}$$

Donde finalmente,

$$\frac{1}{s\left\|Q_{S\setminus\{i\}}\right\|} \sum_{\substack{i\in S\\ \bar{Q}\ni S\setminus\{i\}}} \left[w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q})\right] = \frac{d!t!}{\|Q_T\| s!} = w_{(T,K)}(S,Q)$$

2.2) Suponiendo que $T \subset S$ y $s-t=1$, resulta que $|S\setminus\{i\}| = t$.

Para este caso $T \subset S$ y $T = S\setminus\{i\}$. Además:

$$\sum_{\substack{i\in S\\ \bar{Q}\ni S\setminus\{i\}}} \left[w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q})\right] = w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q}) = 1$$

Entonces,

$$\frac{1}{s\left\|Q_{S\setminus\{i\}}\right\|} \sum_{\substack{i\in S\\ \bar{Q}\ni S\setminus\{i\}}} \left[w_{(T,K)}(S\setminus\{i\},\bar{Q})\right] = \frac{1}{s\left\|Q_{S\setminus\{i\}}\right\|}$$

Por otro lado,

$$w_{(T,K)}(S,Q) = \binom{s}{s-1}^{-1} / \|Q_T\| = \frac{1}{s\|Q_T\|}$$

Y como $s-t=1$, se tiene que $\|Q_T\| = \left\|Q_{S\setminus\{i\}}\right\|$. Por lo tanto se cumple (6) y todo $i \in N\setminus T$ es A_{II}-nulo en los juegos base $w_{(T,K)}$. ■

Demostración del Teorema .

Unicidad.

Procediendo de la misma manera que en la prueba de unicidad para la primera propuesta, se tiene que el único valor posible Ψ_i^e para los juegos base $w_{(T,K)}$ es:

$$\Psi_i^e(w_{(T,K)}) = \begin{cases} \binom{n}{t}^{-1}/t\left(\|Q_T\|^{\text{mín}\{1,(n-t)\}}\right) & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \notin T \end{cases}$$

para todo $i \in N$.

Por linealidad:.

$$\Psi_i^e(v) = \sum_{(T,K)\in EPT} c_{(T,K)} \cdot \left(\binom{n}{t}^{-1}/t\left(\|Q_T\|^{\text{mín}\{1,(n-t)\}}\right)\right)$$

Con $c_{(T,K)} \in \mathbb{R}$ y para todo $i \in N$.

Por extensión lineal de los juegos base se concluye que existe un único valor que cumple con los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y A_{II}-nulidad.

La prueba de **existencia** es análoga a la prueba para la propuesta anterior. ■

Se presentan a continuación una aplicación interesante para los valores de Solidaridad propuestos en esta sección en comparativa con el valor de Myerson.

Ejemplo 44 (Suministro de agua) *Una empresa gubernamental se encarga de suministrar agua a 3 comunidades agrícolas vecinas. Las tres comunidades utilizan una parte considerable del vital líquido para regar sus cultivos y generar producción agrícola. A mayor producción (medida en toneladas de cultivo), mayor es la necesidad de suministro de agua. Por ello la firma encargada del abastecimiento del vital líquido adopta el siguiente criterio: por cada tonelada de producción que realicen las entidades se les dotará de A litros de agua mensuales, además se les asigna una cantidad de agua independiente usada para cubrir otras necesidades de los habitantes, la cual se denota como A_0. Así, la cantidad de agua asignada mensualmente (en litros) C está dada por: $C = A_0 + AY$ donde Y es la cantidad de siembra producida en un mes.*

Supóngase que la producción de cada comunidad se puede modelar como una función de producción Cobb- Douglas clásica con rendimientos constantes a escala como a continuación se muestra:

$$Y_i = L_i^{\alpha_i} K_i^{\beta_i}$$

donde Y_i, L_i y K_i es la producción, el insumo mano de obra, el capital (tractores, equipos agrícolas, etcétera) respectivamente, de la $i-$ésima comunidad y donde $\alpha_i + \beta_i = 1$.

Supóngase que si dos entidades agrícolas deciden unirse para producir, pueden conseguir financiamiento para realizar un proyecto conjunto. En caso de ser así, para llevar a cabo el nuevo proyecto agrícola, las comunidades pertenecientes a la coalición deben incrementar tanto su capital como su mano de obra en una cuantía λ, con $\lambda > 1$. Asumiendo que cada comunidad cuenta con una disponibilidad de mano de obra exacta para producir sólo lo de sus proyectos originales, las comunidades colisionadas deberán conseguir la mano de obra faltante para llevar a cabo la nueva producción conjunta. Para atraer a los trabajadores, se pueden ofrecer buenos salarios. Ante tal situación, los trabajadores de la comunidad que no esté en la alianza, tendrían un incentivo para unirse al proyecto de sus comunidades vecinas (además la cercanía geográfica representa otro aliciente para trabajar en las ciudades colindantes). De esta manera los requerimientos de las dos entidades del bloque productivo agrícola, podrían absorber el total de la cantidad de trabajadores disponibles en la comunidad no aliada e incluso necesitar más agricultores.

Se puede modelar la situación antes descrita de la siguiente manera:

Para una coalición $|S| \geq 2$, por ejemplo $S = \{1, 2\}$, se tiene que la producción conjunta vendrá dada por

$$Y_S = L_{1f}^{\alpha_1} K_{1f}^{\beta_1} + L_{2f}^{\alpha_2} K_{2f}^{\beta_2}$$

Con $L_{1f} = \lambda L_1$, $L_{2f} = \lambda L_2$, $K_{1f} = \lambda K_1$, $k_{2f} = \lambda K_2$. *Y donde* L_{if} *y* K_{if} *es la mano de obra y el capital necesarios para llevar a cabo la producción conjunta necesaria.*

Así,

$$\begin{aligned} Y_S &= (\lambda L_1)^{\alpha_1}(\lambda K_1)^{\beta_1} + (\lambda L_2)^{\alpha_2}(\lambda K_2)^{\beta_2} \\ &= \lambda^{(\alpha_1+\beta_1)}Y_1 + \lambda^{(\alpha_1+\beta_1)}Y_2 \end{aligned}$$

Dado de las tecnologías presentan rendimientos constantes a escala resulta que: $\alpha_i + \beta_i = 1$, *por lo tanto la producción de las dos comunidades aliadas será:*

$$Y_S = \lambda(Y_1 + Y_2)$$

Bajo este escenario las comunidades 1 *y* 2, *para incrementar su mano de obra en una cantidad* λ, *podrían absorber parte o la totalidad de la mano de obra de la comunidad* 3 *(siempre que haya suficientes trabajadores en la comunidad* 3 *para satisfacer esta demanda de agricultores; en caso contrario, el faltante se buscaría en otros lugares aledaños). Así la comunidad* 3 *tendrá una mano de obra disponible dada por:*

$$\begin{aligned} L_{3_f} &= \text{máx}\{0, L_3 - [(\lambda L_1 - L_1) + (\lambda L_2 - L_2)]\} \\ &= \text{máx}\{0, L_3 - (\lambda - 1)(L_1 + L_2)\} \end{aligned}$$

Así, bajo esta estructura coalicional el nivel de producción de la comunidad 3 *es:*

$$Y_3 = [\text{máx}\{0, L_3 - ((\lambda - 1))(L_1 + L_2)\}]^{\alpha_3} (K_2)^{\beta_3}$$

Finalmente, si las 3 entidades deciden formar la gran coalición, conseguirían su mano de obra faltante en otros pueblos aledaños (supóngase que hay suficiente mano de obra disponible en estos lugares) y su producción será:

$$Y_N = \lambda(Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

Resumiendo los resultados anteriores, se puede definir el juego en función de partición para el caso de tres jugadores de la manera siguiente:

$$C(S,Q) = \begin{cases} A_0 + A\lambda_s \sum\limits_{i \in S} Y_i \ \textit{si}\ ((Q = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}\ \textit{y}\ |S| = 1)\ \textit{ó}\ (|S| \geq 2)) \\ A_0 + A\left[\text{máx}\left\{0,\ \underset{i \in S}{L_i} - (\lambda - 1)\sum\limits_{j \neq i} L_j\right\}\right]^{\alpha_i} (K_2)^{\beta_3}\ \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

donde,

$$\lambda_s = \begin{cases} 1 & \textit{si}\ |S| = 1 \\ k\ \textit{con}\ k \geq 2 & \textit{si}\ |S| \geq 2 \end{cases}$$

Donde $c(S,Q)$ *representa la cantidad (en litros) de agua asignada a cada coalición dentro de una partición* Q.

Considérese los siguientes vectores como los valores de las variables involucradas en el juego: $L_i = (100, 200, 500)$, $K_i = (50, 80, 100)$, $\alpha_i = (1/2, 1/3, 1/4)$, $\beta_i = (1/2, 2/3, 3/4)$; *supóngase además* $A = 1,000$, $A_0 = 5,000$ *y* $k = \lambda = 2$.

Los respectivos valores para $c(S,Q)$ *en el juego* c, *se muestran a continuación:*

Partición			$c(S,Q)$		
{1}	{2}	{3}	75710.6781	113576.705	154534.878
{3}	{1,2}		105000	363574.766	
{1}	{2,3}		5000	521223.166	
{2}	{1,3}		5000	445491.112	
{1,2,3}			662644.522		

El valor de Myerson para este juego es:

$$\phi(c) = (168099.80,\ 187032.81,\ 307511.90).$$

Mientras que valor de Solidaridad extendido (propuesta 1 y propuesta 2) resulta:

$$\psi^e(c) = (198191.74,\ 220280.25,\ 244172.52)$$

$$\Psi^e(c) = (198887.16,\ 216242.43,\ 247514.92)$$

Aplicar el valor de Solidaridad para este caso puede resultar una mejor alternativa si se quiere adoptar una decisión más "fraternal" con las comunidades menos favorecidas en la asignación. Aún más cuando se trata de la distribución de agua; dado que, por unanimidad social, sería indeseable que el vital líquido escaseara demasiado en algún lugar.

8. Conclusiones

Proponer soluciones axiomáticas para problemas de justicia distributiva implica un avance sustancial; se aceptan o refutan propuestas de solución en base al cumplimiento o incumplimiento de ciertos principios.

La modelación de juegos en función característica presenta un método de análisis importante, sin embargo posee limitantes. Dado que los juegos en función característica sólo miden las valías de las coaliciones en términos de ellas mismas, resultan inadecuados para estudiar casos en donde las externalidades afectan el pago de los jugadores.

Los juegos en forma de función de partición permiten abordar situaciones más realistas en donde las externalidades influyen en el resultado de un juego, por lo que ya se han propuesto soluciones para juegos de esta índole.

Atendiendo a la necesidad existente de contribuir al desarrollo de los juegos con externalidades, en este trabajo se han planteado un par de propuestas que adaptan el valor de Solidaridad para este tipo de juegos. Hasta donde se sabe no ha habido extensiones de este valor al caso de juegos con externalidades.

Respecto a los valores aquí propuestos, se han medido las contribuciones marginales medias de los jugadores en (S, Q) de dos maneras distintas. Una de ellas sólo toma en cuenta cierto arreglo posible para el acomodo de los miembros que no están dentro de alguna coalición, mientras que la otra toma en cuenta todas las particiones posibles donde se encuentra incrustada la coalición que no contiene al jugador del cual se desea conocer su pago; presentado así una visión general de las maneras posibles en las cuales pueden reaccionar la coaliciones del complemento de S que contiene a algún jugador $k \in N$ una vez que éste la ha abandonado.

En base a las nuevas definiciones de contribución marginal medias se ha planteado un nuevo axioma, relativo a la A-nulidad para el caso de juegos en función de partición y el cual se adhiere a las propiedades de aditividad, simetría y eficiencia. Haciendo las demostraciones correspondientes se ha concluido que las soluciones planteadas están caracterizadas de manera única por el conjunto de postulados ya mencionados.

Se ha concluido el documento con una aplicación cuyo ánimo es ilustrar el cálculo de los valores propuestos a situaciones económicas concretas que se pueden presentar en la realidad.

Referencias

[1] Consejo Estatal Electoral y de Participación cuidadana de San Luis Potosí. http://www.ceepacslp.org.mx

[2] Lucas W. F. and Thrall R. M. (1963). "n-person games in partitión function form", Naval Research Logistics Quarterly, 10, 281-298.

[3] Myerson R. B. (1977), "Values of games in partition function form", International Journal of Game Theory, 6(1), 23-31.

[4] Nowark and Radzik (1994). "A Solidarity Value for n-Person Transferable Utility Games". International Journal of Game Theory, vol. 23; 43-48

[5] Pham Do K. and Norde H. (2007), "The Shapley value for partition function games", International Game Theory Review, 9(2), 353-360.

[6] Rodríguez-Segura J. (2012). Caracterización del valor de Solidaridad para juegos con externalidades. Tesis de licenciatura dirigida por Erick Joss Sánchez Pérez. Universidad Autonoma de San Luis Potosí, Facultad de Economía.

[7] Sánchez-Pérez J. (2010), "Juegos cooperativos y sus aplicaciones ecónomicas", Revista de Análisis de Economía Comercio y Negocios internacionales,4(1), 59-75.

[8] Shapley L. (1953), "A value for n-person games", Contribution to the Theory of Games, 2, 307-317.

[9] Von Neuman J. and Morgernstein O. (1944). "Theory of games and economic behavior", Priceton University Press.