UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE ECONOMÍA

CUADERNOS DE TRABAJO

Caracterización de Soluciones en Juegos Cooperativos Vía Consistencia

Febrero 2010

JOSS SÁNCHEZ-PÉREZ

Caracterización de soluciones en juegos cooperativos vía consistencia

Joss Sánchez-Pérez
Facultad de Economía, UASLP
San Luis Potosí, México
joss.sanchez@uaslp.mx

March 2, 2010

Abstract

Una de las propiedades importantes para caracterizar soluciones es consistencia. Esta noción establece relaciones entre vectores solución de un juego cooperativo y aquellos de su juego reducido. Este último se obtiene a partir del juego inicial al remover uno o más jugadores, y asignándoles pagos de acuerdo a un principio específico. Consistencia en una solución significa que la restricción de un vector solución del juego inicial a cualquier coalición, pertenece al conjunto de soluciones del juego reducido. En este artículo, se muestra la forma de caracterizar soluciones usando esta noción de consistencia, tal como en Hart and Mas-Colell (1989) y Sánchez-Pérez (2010). También se establecen las nociones de juegos reducidos para consistencia en soluciones de división de excesos.

1 Introducción

El problema principal que se aborda en juegos cooperativos es la distribución de ganancias conjuntas o el reparto de costos comunes. La teoría más conocida que actualmente da una respuesta categórica a estos problemas es la de valores en juegos cooperativos. En ella se agrupan problemas, se definen soluciones concebibles y se pide que una solución satisfaga un conjunto de axiomas que la determinen unívocamente. El avance que se obtiene con esto es sustancial: se aceptan o se eliminan soluciones para toda una clase de problemas con sólo aceptar o no "simples" supuestos generales.

Como ejemplo de esta metodología, L. Shapley axiomatizó en 1953 el valor que lleva su nombre; Kalai y Samet el Valor de Shapley Ponderado en 1987 y Lehrer en 1988 axiomatizó el índice de Banzhaf.

Una de las propiedades importantes al axiomatizar soluciones en juegos cooperativos es consistencia. Thomson fue el primero en introducir esta noción en 1980. La idea intuitiva de consistencia que originalmente dio Thomson es que, si en un juego se vuelve a repartir con una solución φ lo que gana una coalición, entre los jugadores de tal coalición, cada uno gana lo que originalmente le fue asignado.

Después, en 1989 Hart y Mas-Colell definen de otra manera consistencia, pero con el mismo espíritu: consistencia establece relación entre los vectores solución de un juego cooperativo y los de su juego reducido. Este último es obtenido del juego original removiendo uno o más jugadores y asignando sus pagos correspondientes de acuerdo a un principio específico (una solución propuesta φ). Entonces φ se dice consistente si, cuando es aplicado a cualquier juego reducido, se conservan los mismos pagos que en el juego original.

El artículo de Hart y Mas-Colell ha impulsado una gran cantidad de nuevas investigaciones. Algunos de los trabajos recientes se han enfocado a dar generalizaciones de ciertas clases de soluciones, las cuales son axiomatizadas vía consistencia.

El axioma de consistencia es por sí solo el más ambicioso. Basta con que se tenga un axioma donde se especifique el comportamiento de la solución para juegos de dos jugadores y otro axioma de consistencia para poder extender tal solución al espacio de los juegos n-personales (procediendo de forma recursiva).

En la actualidad hay una gran diversidad de soluciones en juegos cooperativos; las cuales, no todas han sido axiomatizadas usando algún axioma de consistencia. Cabe mencionar que la consistencia en una solución, depende de la definición de su juego reducido; es decir, de su función característica y como tal definición no es única, se pueden hallar soluciones consistentes con respecto a una gran variedad de juegos reducidos. Estas son algunas de las razones que motivan a la elaboración de este trabajo y a lo largo de él se presentan aportaciones interesantes, tales como una propuesta de axiomatización de una solución que no había sido axiomatizada usando la propiedad de consistencia, así como también nuevas ideas de juegos reducidos para otras soluciones.

2 Preliminares

Por un *juego n-personal* en forma de función característica (o juego coooperativo con utilidad transferible), en lo que sigue sólo un juego, nos referimos a una pareja (N, v), donde $N = \{1, ..., n\}$ es un conjunto finito de jugadores y v es una función $v : 2^N \to \mathbb{R}$ con la propiedad $v(\varnothing) = 0$ (2^N denota el conjunto de subconjuntos de N). Usualmente nos referimos a subconjuntos S de N como *coalitiones* y al número $v(S)$ como la *valía* de S. Un juego (N, v) es superaditivo si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ para todo $S, T \subset N$, y es subaditivo si la desigualdad se cumple en la otra dirección. Hay diversas interpretaciones para (N, v), dependerá en lo que se desea modelar. Por ejemplo, si el juego es superaditivo, $v(S)$ se interpreta como el monto máximo que los jugadores en S pueden obtener si ellos deciden jugar de forma conjunta. Mientras que, si el juego es subaditivo, $v(S)$ usualmente se interpreta como el costo conjunto que los jugadores en S tienen que pagar para obtener un servicio. Adicionalmente, se denotará la cardinalidad de un conjunto por su correspondiente letra minúscula, por ejemplo $n = |N|$, $s = |S|$ y $t = |T|$.

Se denotará por G al espacio de todos los juegos con conjunto finito de jugadores N, i.e., $G = \{v : 2^N \to \mathbb{R} \mid v(\varnothing) = 0\}$. Una *solución* $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ sobre G es una regla para dividir la ganancia o costo conjunto, entre los jugadores en N. Sea Γ el conjunto de soluciones sobre G.

Dados $v, w \in G$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos la suma y producto $v + w$ y λv en G en la forma usual, i.e.,

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S) \quad \text{y} \quad (\lambda v)(S) = \lambda v(S)$$

respectivamente.

De forma similar, para $\varphi, \psi \in \Gamma$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos la suma y producto $\varphi + \psi$ y $\lambda\varphi$ en G, como

$$(\varphi + \psi)(v + w) = \varphi(v) + \psi(w) \quad \text{and} \quad (\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v)$$

Es fácil demostrar que G y Γ son espacios vectoriales con estas operaciones.

Ahora bien, definimos algunos axiomas que son comunes en la teoría de juegos cooperativos.

Axioma 1 (Linealidad) *La solución φ es lineal si $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ y $\varphi(cv) = c\varphi(v)$, para todo $v, w \in G^N$ y $c \in \mathbb{R}$.*

Consideremos el grupo $S_n = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}$, el grupo de permutaciones del conjunto de jugadores. Por cada $\theta \in S_n$ y cada $v \in G$ definimos otro juego $\theta \cdot v$ como:

$$\theta \cdot v(S) = v(\theta^{-1}S)$$

Axioma 2 (Simetría) *La solución φ se dice simétrica si y sólo si $\varphi(\theta \cdot v) = \theta \cdot \varphi(v)$ para todo $\theta \in S_n$ y $v \in G$.*

El jugador i se dice nulo en el juego v if $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N$. El axioma de nulidad requiere que cada jugador nulo en v obtenga un pago de cero.

Axioma 3 (Nulidad) *Si el jugador i es un jugador nulo en v entocnes $\varphi_i(v) = 0$.*

Para cada coalición $T \subseteq N$ obtenemos un nuevo juego v_T, donde el conjunto de jugadores T se considera como un jugador; y lo denotamos por T'. El espacio de jugadores para v_T es $N \backslash T \cup \{T'\}$ y se define por:

$$v_T(S) = v(S) \quad \text{y} \quad v_T(S \cup \{T'\}) = v(S \cup T)$$

donde $S \subseteq N \backslash T$. El axioma de reducción establece que la unificación de cualesquiera dos jugadores es siempre productivo para ellos.

Axioma 4 (Eficiencia) *La solución φ se dice eficiente si y sólo si $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$ para todo $v \in G$.*

Teorema 5 (Shapley, 1953) *Existe un único operador $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que satisface aditividad, eficiencia, nulidad y simetría y está dado por:*

$$\varphi_i(N,v) = \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left[v(S\cup\{i\}) - v(S)\right]$$

A este operador se le conoce como el Valor de Shapley.

Axioma 6 (Reducción) *La solución φ satisface el axioma de reducción si y sólo si $\varphi_i(v) + \varphi_j(v) \leq \varphi_{T'}(v_T)$ para toda coalición $T = \{i,j\}$ de dos jugadores.*

La axiomatización para el Valor de Banzhaf que se presenta a continuación se debe a Lehrer (1988).

Teorema 7 (Lehrer, 1988) *Existe una única solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de linealidad, simetría, nulidad y reducción. Más aún, está dada por*

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} \left[v(S\cup\{i\}) - v(S)\right]$$

A esta solución se le conoce como el Valor de Banzhaf.

3 Consistencia en soluciones

La forma de presentar el axioma de consistencia se debe al artículo de Hart y Mas-Colell. Consistencia puede ser descrita informalmente como sigue: sea φ una función que asocia un pago a cada jugador en cada juego. Para cada grupo de jugadores en un juego, se define un juego reducido entre ellos, dando al resto de los jugadores pagos de acuerdo a φ. Entonces φ se dice ser consistente si, cuando es aplicado a cada juego reducido, conserva los mismos pagos que en el juego original.

Formalmente,

Definición 8 *Una solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ es consistente con respecto al juego reducido $(N\backslash\{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}})$ si, para $N\backslash\{i\} \subset N$ y todo $v \in G$, se tiene que*

$$\varphi_j(N\backslash\{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}) = \varphi_j(N,v) \qquad \text{para todo } j \in N\backslash\{i\}$$

3.1 Consistencia en el Valor de Shapley

Aquí se verá la axiomatización del Valor de Shapley basada en la propiedad de consistencia. Para ello, primero definiremos un juego reducido de la siguiente forma:

Definición 9 *Sea φ una función solución, (N,v) un juego (con $n \geq 3$) e $i \in N$. El juego reducido $(N\backslash\{i\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}})$ se define como*

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{i\}}(S) = v(S\cup\{i\}) - \varphi_i(S\cup\{i\}, v), \;\; \text{para todo } S \subset N\backslash\{i\} \qquad (1)$$

La interpretación es como sigue: dada una función solución φ, un juego (N, v) y una coalición $N\backslash\{i\} \subset N$, los miembros de $N\backslash\{i\}$ (o, más preciso, cada subcoalición de $N\backslash\{i\}$) necesitan considerar el pago total restante después de pagar a i de acuerdo a φ. Para calcular la valía de la coalición $S \subset N\backslash\{i\}$ (en el juego reducido), se supone que los miembros de $(N\backslash\{i\})\backslash S$ no están presentes; en otras palabras, se considera el juego $(S \cup \{i\}, v)$, en el que los pagos son distribuidos según φ. Lo apropiado de esta definición de juego reducido depende, por supuesto, en la situación particular que se esté modelando.

Lo que resta ahora, es mostrar de qué forma se axiomatiza una función solución usando la propiedad de consistencia. Para ello, se debe precisar el comportamiento de la solución en cuestión para juegos de dos jugadores.

Definición 10 *Una función solución φ es estándar para juegos de dos jugadores si*

$$\varphi_i(\{i, j\}, v) = v(\{i\}) + \frac{1}{2}\left[v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})\right] \tag{2}$$

para todo $i \neq j$ y todo $v \in G$.

Así, el excedente $[v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})]$ es repartido equitativamente entre los dos jugadores. La mayoría de las soluciones satisfacen esta propiedad, en particular, el Valor de Shapley. En el siguiente resultado se muestra la caracterización del Valor de Shapley en términos de las dos propiedades anteriores.

Teorema 11 (Hart and Mas-Colell, 1989) *Sea φ una función solución. Entonces:*

(i) *φ es consistente con respecto al juego reducido (1); y*

(ii) *φ es estándar para juegos de dos jugadores;*

si y sólo si φ es el Valor de Shapley.

3.2 Consistencia en el Valor de Banzhaf

Es bien sabido que una solución en particular es consistente con respecto a distintos juegos reducidos, todo dependerá en la forma de definir las valías para coaliciones de $N\backslash\{k\}$, cuando el jugador k ha salido del juego. Se demostrará que el Valor de Banzhaf es consistente con respecto al siguiente juego reducido:

Definición 12 *Dada una solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ en G, un juego (N, v) (con $n \geq 3$). El juego reducido $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$ se define como*

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[v(N) + v(N\backslash\{k\}) - v(\{k\})\right] & si\ S = N\backslash\{k\} \\ \frac{1}{2}\left[v(S) - v(N\backslash S)\right] & si\ \varnothing \neq S \subset N\backslash\{k\} \\ 0 & si\ S = \varnothing \end{cases} \tag{3}$$

En Sánchez-Pérez (2010) se demuestran resultados de consistencia para el Valor de Banzhaf; sin embargo, se muestran nuevamente aquí dada su importancia.

Proposición 13 (Sánchez-Pérez, 2010) *El Valor de Banzhaf es una solución consistente.*

Demostración. Se debe calcular este valor al juego reducido $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$. Notemos que el jugador j en $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$ obtiene:

$$\varphi_j(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{S\subseteq N\backslash\{j,k\}} \left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S\cup\{j\}) - v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S)\right]$$

Así, usando el juego reducido (3) en la expresión anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}
2^{n-2}\cdot\varphi_j(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) &= \sum_{S\subseteq N\backslash\{j,k\}} \left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S\cup\{j\}) - v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S)\right] \\
&= \sum_{\phi\neq S\subset N\backslash\{j,k\}} [v(S\cup\{j\}) - v(N\backslash(S\cup\{j\})) - v(S) + v(N\backslash S)] \\
&\quad +v(\{j\}) - v(N\backslash\{j\}) + v(N) + v(N\backslash\{k\}) - v(N\backslash\{j,k\}) + v(\{j,k\}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{S\subseteq N\backslash\{j,k\}} [v(S\cup\{j\}) - v(S) + v(N\backslash S) - v(N\backslash(S\cup\{j\}))]
\end{aligned}$$

Observemos que en la última suma, la valía $v(N\backslash S)$ corresponde a valías de coaliciones que contienen a $\{j,k\}$; mientras que la valía $v(N\backslash S\cup\{j\})$ corresponde a valías de coaliciones que contienen a $\{k\}$, pero no a $\{j\}$. Por lo que se puede hacer el siguiente cambio:

$$\begin{aligned}
\varphi_j(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) &= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\sum_{S\subseteq N\backslash\{j,k\}} [v(S\cup\{j\}) - v(S)] + \sum_{S\subseteq N\backslash\{j\}, S\ni\{k\}} [v(S\cup\{j\}) - v(S)]\right\} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{S\subseteq N\backslash\{j\}} [v(S\cup\{j\}) - v(S)] \\
&= \varphi_j(N,v)
\end{aligned}$$

■

El siguiente resultado muestra que la única solución consistente y estándar para juegos de dos jugadores, es el Valor de Banzhaf. Esta caracterización es equivalente a la del Valor de Shapley dada en la sección anterior, donde la única diferencia radica en la noción de juego reducido.

Teorema 14 *Sea $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ una solución en G. Entonces:*
(i) *φ es consistente con respecto al juego reducido (3); y*
(ii) *φ es estándar para juegos de dos jugadores;*
si y sólo si φ es el Valor de Banzhaf.

Demostración. *Una dirección es inmediata, de acuerdo a la proposición anterior y el hecho que:*

$$\begin{aligned}\varphi_i(\{i,j\},v) &= \frac{1}{2}\sum_{S\subseteq\{j\}}[v(S\cup\{i\})-v(S)]\\ &= v(\{i\})+\frac{1}{2}[v(\{i,j\})-v(\{i\})-v(\{j\})]\end{aligned}$$

Para la otra dirección, la demostración es por inducción sobre el número de jugadores. Supongamos que $\varphi,\psi : G\to\mathbb{R}^n$ satisfacen (i) y (ii). Es claro que $\varphi=\psi$ para juegos de dos jugadores, ya que para $k\in\{i,j\}$:

$$\begin{aligned}\varphi_k(\{i,j\},v) &= v(\{k\})+\frac{1}{2}[v(\{i,j\})-v(\{i\})-v(\{j\})]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{S\ni k\\ S\subseteq\{i,j\}}}[v(S)-v(\{i,j\}\backslash S)]\\ &= \psi_k(\{i,j\},v)\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que φ y ψ coinciden para todos los juegos con $n-1$ jugadores. Los juegos reducidos para dos jugadores: $(\{i,j\},v^{\varphi}_{\{i,j\}})$ y $(\{i,j\},v^{\psi}_{\{i,j\}})$ coinciden, ya que $v^{\varphi}_{\{i,j\}}(S)=v^{\psi}_{\{i,j\}}(S)$ para todo $S\subset\{i,j\}$.

Así entonces, $\varphi_i(v^{\varphi}_{\{i,j\}})=\psi_i(v^{\psi}_{\{i,j\}})$ por ser estándar para juegos de dos jugadores, y $\varphi_i(N,v)=\varphi_i(\{i,j\},v^{\varphi}_{\{i,j\}})=\psi_i(\{i,j\},v^{\psi}_{\{i,j\}})=\psi_i(N,v)$ por consistencia.

De forma similar, $\varphi_j(N,v)=\psi_j(N,v)$. Aplicando esto a cualquier par de jugadores, se obtiene que $\varphi_i(N,v)=\psi_i(N,v)\quad\forall i\in N$. ■

3.3 Consistencia en soluciones de división de excesos

Por último, en esta sección se estudia el axioma de consistencia para soluciones que sugieran algo de equidad, en el sentido de que se asigne a cada jugador algún pago inicial y reparta el resto de $v(N)$ en partes iguales entre todos los jugadores. Ejemplos de este tipo de soluciones son las soluciones CIS, $ENSC$ y la solución *Igualitaria* (EG). La solución CIS asigna a cada jugador su valía individual y reparte por igual el resto de $v(N)$. La solución $ENSC$ asigna a cada jugador su contribución marginal a la gran coalición y reparte el resto de $v(N)$ por igual entre todos los jugadores; de hecho, es la solución CIS aplicada a su juego dual. La solución EG sólo reparte $v(N)$ equitativamente entre todos los jugadores.

La solución CIS está dada por

$$CIS_i(N,v)=v(\{i\})+\frac{1}{n}\left[v(N)-\sum_{j\in N}v(\{j\})\right]\quad \text{para todo } i\in N$$

El juego dual (N, v^*) del juego (N, v) es el juego que asigna a cada coalición $S \subseteq N$ la ganancia que es perdida por la gran coalición N si la coalición S deja N, es decir,

$$v^*(S) = v(N) - v(N \backslash S) \quad \text{para todo } S \subseteq N$$

La solución $ENSC$ queda determinada por la solución CIS aplicada al juego (N, v^*), es decir,

$$\begin{aligned} ENSC_i(N,v) &= CIS_i(N,v^*) = v^*(\{i\}) + \frac{1}{n}\left[v^*(N) - \sum_{j \in N} v^*(\{j\})\right] \\ &= v(N) - v(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j \in N}(v(N) - v(N\backslash\{j\}))\right] \\ &= -v(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{n}\left[v(N) + \sum_{j \in N} v(N\backslash\{j\})\right] \quad \text{para todo } i \in N \end{aligned}$$

Las soluciones anteriores sugieren algo de equidad, en el sentido de que se reparte de forma equitativa el excedente que es dejado después de que todos los jugadores reciben algún pago individual.

Se mostrará que estas dos soluciones son consistentes con respecto a determinados juegos reducidos, definidos en función de los excedentes.

Anteriormente se mencionó que la solución CIS asigna a cada jugador su valía individual y distribuye el excedente en partes iguales entre todos los jugadores. Es decir,

$$CIS_i(N,v) = v(\{i\}) + E(N,v) \qquad \text{para todo } \; i \in N$$

donde el operador $E : G \to \mathbb{R}$ denota la parte del excedente que le corresponde a cada jugador, la cual está dada por

$$E(N,v) = \frac{1}{n}\left[v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})\right]$$

Así, esta solución es un concepto de solución central en términos de equidad. Más aún, es particularmente útil para clases de juegos en donde sólo se espera la completa cooperación de todos los jugadores o la no cooperación. Otra posible interpretación podría ser que sólo se tenga información acerca de los dos extremos del juego: los valores individuales y el valor de la gran coalición; o simplemente cuando uno no esté interesado en la cooperación parcial.

Ahora, se presenta una nueva definición de juego reducido con el fin de hacer la solución CIS consistente:

Definición 15 *Sea φ una función solución, (N, v) un juego ($n \geq 3$) y $T \subset N$.*

Definimos el juego reducido (T, v_T^{φ}) *como*

$$v_T^{\varphi}(S) = \begin{cases} v(N) - \sum\limits_{i \in N \setminus T} \varphi_i(N,v) & si\ S = T \\ v(S) & si\ s = 1 \\ 0 & si\ S = \varnothing \end{cases} \tag{4}$$

Proposición 16 *La solución* CIS *es una función solución consistente con respecto al juego reducido (4).*

Demostración. Usando la solución CIS ($\varphi = CIS$) en el juego reducido (T, v_T^{φ}), a cada jugador en T le corresponde

$$\varphi_i(T, v_T^{\varphi}) = v(\{i\}) + E(T, v_T^{\varphi}) \tag{5}$$

donde,

$$E(T, v_T^{\varphi}) = \frac{1}{t}\left[v_T^{\varphi}(T) - \sum_{j \in T} v_T^{\varphi}(\{j\})\right] = \frac{1}{t}\left[\left(v(N) - \sum_{i \in N \setminus T} \varphi_i(N,v)\right) - \sum_{j \in T} v(\{j\})\right]$$

Nótese que, para demostrar que la solución CIS es una función solución consistente, basta con demostrar que $E(N,v) = E(T, v_T^{\varphi})$. En efecto, nótese que φ es eficiente, ya que

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N,v) = \sum_{i \in N}\left[v(\{i\}) + \frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})\right)\right] = v(N)$$

por lo que,

$$v(N) - \sum_{i \in N \setminus T} \varphi_i(N,v) = \sum_{i \in T} \varphi_i(N,v)$$

Además, por (5)

$$\sum_{i \in T} \varphi_i(N,v) = \sum_{j \in T} v(\{j\}) + t \cdot E(N,v)$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} E(T, v_T^{\varphi}) &= \frac{1}{t}\left[\left(v(N) - \sum_{i \in N \setminus T} \varphi_i(N,v)\right) - \sum_{j \in T} v(\{j\})\right] = \frac{1}{t}\left[\sum_{i \in T} \varphi_i(N,v) - \sum_{j \in T} v(\{j\})\right] \\ &= \frac{1}{t}\left[\left(\sum_{j \in T} v(\{j\}) + t \cdot E(N,v)\right) - \sum_{j \in T} v(\{j\})\right] = \frac{1}{t}\left[t \cdot E(N,v)\right] \\ &= E(N,v) \end{aligned}$$

Así pues, se concluye que

$$\varphi_i(T, v_T^{\varphi}) = \varphi_i(N,v)$$

■

Por último, para la solución $ENSC$ también se propone otra definición de juego reducido, en donde se maneja la misma idea que para la solución CIS (se conserva la parte de excedente para cada jugador en el juego reducido). Así pues, la solución $ENSC$ asigna a cada jugador su contribución marginal a la gran coalición y reparte el resto de $v(N)$ por igual entre todos los jugadores:

$$ENSC_i(N,v) = -v(N\backslash\{i\}) + E'(N,v)$$

para todo $i \in N$ y donde el operador $E' : G \to \mathbb{R}$ denota la parte del excedente que le corresponde a cada jugador, la cual está dada por

$$E'(N,v) = \frac{1}{n}\left[v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\})\right]$$

Definición 17 *Sea φ una función solución, (N,v) un juego ($n \geq 3$) y $k \in N$. Se define el juego reducido $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$ como*

$$v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(S) = \begin{cases} v(N) - \varphi_k(N,v) & si\ S = N\backslash\{k\} \\ v(S\cup\{k\}) & si\ s = n-2 \\ 0 & si\ S = \phi \end{cases} \tag{6}$$

Proposición 18 *La solución $ENSC$ es una función solución consistente con respecto al juego reducido (6).*

Demostración. Usando la solución $ENSC$ ($\varphi = ENSC$) en el juego reducido $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$, a cada jugador en $N\backslash\{k\}$ le corresponde

$$\begin{aligned} \varphi_i(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) &= -v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{i,k\}) + E'(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) \\ &= -v(N\backslash\{i\}) + E'(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) \end{aligned}$$

donde,

$$E'(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) = \frac{1}{n-1}\left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{k\}) + \sum_{j\in T} v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{j,k\})\right]$$

De nuevo aquí, para demostrar que la solución $ENSC$ es una función solución consistente, basta con demostrar que coinciden las partes de excedente para los juegos (N,v) y $(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$. Es decir, demostrar que $E'(N,v) = E'(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}})$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
E'(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) &= \frac{1}{n-1}\left[v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{k\}) + \sum_{j\in T} v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}(N\backslash\{j,k\})\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[v(N) - \varphi_k(N,v) + \sum_{j\in N\backslash\{k\}} v(N\backslash\{j\})\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[v(N) + v(N\backslash\{k\}) - \frac{1}{n}\left(v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\})\right) + \sum_{j\in N\backslash\{k\}} v(N\backslash\{j\})\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\}) - \frac{1}{n}\left(v(N) + \sum_{j\in N\backslash\{k\}} v(N\backslash\{j\})\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\})\right] \\
&= E'(N,v)
\end{aligned}$$

Así pues, se concluye que

$$\varphi_i(N\backslash\{k\}, v^{\varphi}_{N\backslash\{k\}}) = \varphi_i(N,v)$$

■

References

[1] Hart, S., and A. Mas-Colell (1989), "Potencial, Value, and Consistency", Econometrica, 57, 589-614.

[2] Lehrer E. (1988), "An axiomatization of the Banzhaf value", International Journal of Game Theory, 15, 89-99.

[3] Owen G., "Consistency in values", Naval Postgraduate School.

[4] Shapley L. (1953), "A value for n-person games", Contribution to the Theory of Games, 2, 307-317.

[5] Sánchez-Pérez J. (2010), "Characterization of the Banzhaf Value using a Consistency Axiom", CUBO, A Mathematical Journal, 12(1), 01-06.

[6] Thomson W. and Myerson R. (1980), "Monotonicity and independence axioms", International Journal of Game Theory, 9, 37-49.

[7] Thomson W. (1996), "Consistent Allocation Rules", Rochester Center for Economic Research, Working Paper No. 418.